DAS MAXIMALGESCHLECHT DER ALGEBRAISCHEN CURVEN IM R_r

VON

S. KANTOR

HALPHEN hat bekanntlich zuerst im 70. Bande der Comptes rendus de l'Académie de Sciences de Paris die Zahl $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right]$, wo [...] die grösste im eingeklammerten Bruche enthaltene ganze Zahl bedeutet, als die Minimalzahl der scheinbaren Doppelpunkte der windschiefen Curve der Ordnung p bezeichnet. Daraus wurden dann Formeln für das Maximalgeschlecht und später auch für Curven im R_r hergeleitet.

Eine allgemeine in meiner Abh. Acta Math. Bd. 21. angewandte Schlussfolgerung gestattet, nicht nur einen Beweis des Halphen'schen Resultates, sondern auch ein entsprechendes Resultat für den R_r zu geben. Ich lege meinem hier zu gebenden Beweise aber noch deswegen ein besonderes Gewicht bei, weil er dazu führt, derartige Formeln, wie sie HALPHEN und seine Nachahmer (CASTELNUOVO, STURM) gegeben haben, Formeln mit dem unwissenschaftlichen Symbole [...] für eine grösste oder bei anderen für eine kleinste ganze Zahl, aus diesem Gebiete für immer zu beseitigen, und aber auch weil er die erste Methode enthält, mit deren Hilfe man auch Maximalgeschlechter für $M_2, M_3, \ldots, M_i$ im R_r berechnen kann. Auf diesen letzteren Punkt möge diesmal noch nicht eingegangen werden.

I.

Theorem. *Das Maximalgeschlecht, das eine algebraische Curve C_n im R_r haben kann, ohne einem niederen Raume anzugehören, ist*

$$p_n = \frac{(n-1)(n-r)}{2(r-1)} - \frac{(q-1)(q-r)}{2(r-1)}$$

wo q der um 1 verminderte kleinste Rest von n nach dem Divisor $r-1$ ist.

Dieser Ausdruck ist stets eine ganze Zahl. Er fällt durch den gleichen Bau der beiden Terme auf. Aus ihm schliessen wir, dass wenn

$$(q-1)(q-r) < 2(r-1),$$

das ist, wenn $r < 8$, man den durch den ersten Term dargestellten Bruch nur auf die nächste ganze Zahl zu ergänzen hat und dass, wenn $q = 1$, also $n-1$ (und $n-r$) ein Vielfaches von $r-1$ ist, der erste Term allein schon der Werth p_n ist. Also:

Corollar. Für alle Werthe von n, für welche $n-1$ Vielfaches von $r-1$ ist, ist

$$p_n = \frac{(n-1)(n-r)}{2(r-1)}$$

und für alle Werthe von $r < 8$ kann man symbolisch setzen (bei willkürlichem n)

$$p_n = \left[\frac{(n-1)(n-r)}{2(r-1)}\right]$$

gleich der kleinsten ganzen Zahl, welche nicht kleiner als der eingeklammerte Bruch ist.

Ich gebe nun in den nächsten Numern den Beweis des Theoremes.

II.

Eine Transformation im R_r, welche in der Form $x' = 1 : x_i$ geschrieben werden kann, also $r+1$ Fundamentalpunkte 1. Art, sonst aber nur Fundamental $-M_1, -M_2, \ldots, -M_{r-2}$ von höherer als der 1. Art (d. h. mit zugehörigen Abfalls $-M_{r-2}$ höchstens, nicht aber mit $-M_{r-1}$) besitzt, bezeichne ich als eine Reciprokaltransformation $(RT)_r$ im R_r. Durch Zusammensetzung einer willkürlichen Anzahl solcher Transformationen entstehen immer wieder nur Transformationen ohne Fundamental $-M_1, \ldots, M_{r-2}$ 1. Art, also nur mit Fundamentalpunkten 1. Art und solchen Fundamental $-M_i$, welche eine nothwendige Consequenz der Fundamentalpunkte sind, und jede solche Transformation kann durch Zusammensetzung einer Reihe von $(RT)_r$ gewonnen werden.[1] Ich nenne sie Rec. tr. m. O., bezeichnet $(RT)_m$.[2]

Nun benutze ich die für den R_3 in Acta Math. Bd. 21. gemachte Schlussfolgerung, dass die homaloiden Curven dieser $(RT)_m$, dass sind die Curven, welche den Geraden des einen R_r durch die $(RT)_m$ entsprechen, nothwendig solche Curven sein müssen, welche das Geschlecht Null nur in Folge ihrer vielfachen Punkte, welche sie in den Fundamentalpunkten der $(RT)_m$ besitzen, aufgezwungen erhalten. Sie müssten also vermöge ihrer Entstehung als Schnittcurven von je $r-1$ M_{r-1} der m. Ordnung, wenn sie nicht ihre vielfachen Punkte hätten, das *maximale Geschlecht* haben, das für sie als algebraische Curven m. Ordnung im R_r möglich ist. Sei dieses p_m und seien die Vielfachheiten, welche die Curven in den Fundamentalpunkten besitzen, $a_1, \ldots, a_\sigma$. Jeder a_i-fache Punkt erniedrigt das Geschlecht der Curve um $a_i(a_i-1):2$, also besteht die Gleichung

$$(1) \qquad 2p_m - \sum a_i(a_i-1) = 0.$$

Um diese allgemeinere und energischere Form der Anwendung des Principes aus Acta Math. Bd. 21. und also einen auf sehr breiten Grundlagen ruhenden Beweis zu geben, wäre uns die Auswerthung der beiden Summen $\sum a_i$, $\sum a_i^2$ nothwendig die in folgenden Weise geschehen kann.

---

[1] Diese Eigenschaft wird im unseren Beweise (IV., V.) nicht erfordert.

[2] Es kann wie aus der Abhandlung hervorgeht, geschehen, dass es mehrere der Art nach verschiedene Rec. tr. gleicher Ordnung m gebe.

III.

Jede Vielfachheit a_i ist gleich der Ordnung der dem Fundamentalpunkte entsprechenden Abfallsmannigfaltigkeit M_{r-1}. Die Summe der Ordnungen aller Abfallsmannigfaltigkeiten, wobei jede einzelne, weil sie Fundamentalpunkten 1. Art entsprechen, $(r-1)$-fach zu zählen ist,[1] ist gleich der Ordnung der Jacobi'schen Mannigfaltigkeit, also gleich $(r+1)(m-1)$, daher besteht die Gleichung

$$(r-1)\sum a_i = (r+1)(m-1). \tag{2}$$

Um $\sum a_i^2$ zu berechnen, bediene ich mich der »fundamentalen linearen Substitutionen», welche nach meiner Abh. Crelles Journal, Bd. 114, und Acta Math., Bd. 21., jeder $(RT)_r$ zukommen, indem sie die Verwandlung der M_i $(i = 1, \ldots, r-1)$ durch die Transformation wenigstens arithmetisch vollständig enthalten. Die Substitution für die Verwandlung der M_1 durch die $(RT)_r$ ist (mit Beibehaltung der Schreibweise aus Acta Math., Bd. 21):

$$\begin{array}{lllll} n' & = rn - (r-1)\mathfrak{x}_1 - & \ldots - (r-1)\mathfrak{x}_{r-1}, & & \\ \mathfrak{x}'_n & = n - & - \mathfrak{x}_2 \ldots - & \mathfrak{x}_{r+1}, & \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \\ \mathfrak{x}'_{r+1} & = n - & \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 \ldots - \mathfrak{x}_r. & & \end{array} \tag{3}$$

Diese Substitution lässt, wovon man sich bei der Einfachheit der Coefficienten leicht durch Ausrechnung überzeugt, die quadratische Form

$$n^2 - (r-1)\mathfrak{x}_1^2 - \ldots - (r-1)\mathfrak{x}_{r+1}^2 \tag{4}$$

invariant. Vermöge eines Schlusses, der seine Begründung in meinen ausführlichen Erläuterungen an jener Stelle findet, können wir behaupten, dass auch die zu $(RT)_m$ gehörigen fundamentalen linearen Substitutionen für die M_1, welche die Form

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
n' &= mn - b_1\mathfrak{x}_1 - \ldots - b_\sigma\mathfrak{x}_\sigma,\\
\mathfrak{x}_1' &= a_1 n - a_{11}\mathfrak{x}_1 - \ldots - a_{1\sigma}\mathfrak{x}_\sigma,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{x}_\sigma &= a_\sigma n - a_{\sigma 1}\mathfrak{x}_1 - \ldots - a_{\sigma\sigma}\mathfrak{x}_\sigma,
\end{aligned}
$$

haben, die quadratisehe Form

$$(6)\qquad n^2 - (r-1)\sum_1^\sigma \mathfrak{x}_i^2$$

invariant lassen. Aus dieser Invarianz rechnen wir dann durch Einsetzen der (5) in (6) sofort die Gleichung

$$(7)\qquad (m^2-1) - (r-1)\sum a_i^2 = 0$$

und andererseits von neuem die Gleichung (2), welche so ein zweites Mal bewiesen ist.

Hiemit haben wir die Werthe von $\sum a_i$ und $\sum a_i^2$ und erhalten aus (1), (2), (7)

$$(8)\qquad 2p_m = \frac{(m-1)(m-r)}{r-1}.$$

Da in der Formel (2) $\sum a_i$ und in (7) $\sum a_i^2$ ganz nothwendig eine ganze Zahl ist, so gilt die Formel (8) bislang sicher nur dann, wenn die rechte Seite eine ganze Zahl ist, wenn also auch $m-1 \equiv 0 \mod (r-1)$, da die Differenz der beiden Factoren $m-1$, $m-r$ eben $r-1$ ist, aber überdies muss die rechte Seite $\equiv 0 \mod 2$ sein.

Ob dann (8) für *alle* solche Zahlen gelte, dies ist eine Frage, die erfordert, für jedes solche m eine $(RT)_m$ nachzuweisen. Dies ist bisher nur für $r=3$ von mir in Acta Math. Bd. 21 geschehen.

IV.

Um dieser Frage aus dem Wege zu gehen, und auch um die Formel (8) leichter auf solche Werthe[1] von m auszudehnen, für welche die vorige

[1] Auch für $(RT)_m$ kann man ein dem in IV. durchzuführenden analoges Verfahren anlegen. Hatten die Transformirten der Geraden die Vielfachheiten $a_1, \ldots, a_\sigma$ in den

Congruenz nicht gilt, stelle ich den Beweis auf eine schmälere Basis, ohne dass er deshalb an Tragweite einbüsste.

Ich benütze nur die Rec. tr. $(RT)_r$ und aber nicht nur die Transformirten der Geraden sondern die Transformirten aller Curven m. Ordnung. Diese Transformirten haben den Singularitätencomplex

$$(9) \qquad \mathfrak{n} = nr\,,\ \mathfrak{x}_1 = n_1\,,\ \ldots\,,\ \mathfrak{x}_{r+1} = n\,.$$

Sie müssen dasselbe Geschlecht haben, wie die Curven der Ordnung n, deren Transformirte sie sind. Dann aber gilt wieder für sie derselbe Schluss wie für die Transformirten der Geraden (homaloidalen Curven), dass sie sämmtlich dieses Geschlecht nur durch die vielfachen Punkte aufgezwungen erhalten und dass sie also ohne diese Verminderung, welche $(r+1)n(n-1):2$ beträgt, das Maximalgeschlecht, das für ihre Ordnung nr im R_r möglich ist, haben müssten. Das Geschlecht, das sie nun wirklich haben, ist sogleich das »Geschlecht der Curven n. Ordnung», nämlich *aller* im R_r (unbestimmt welcher) und es ist selbstverständlich, dass sich darunter auch Curven vom Maximalgeschlechte finden; also kann das Geschlecht der allgemeinen Transformirten C_{nr} nicht kleiner und aber es kann gewiss auch nicht grösser sein als das Maximalgeschlecht der C_n im R_r, das ist als p_n, daher:

$$(10) \qquad 2p_{nr} - 2p_n = (r+1)n(n-1).$$

Diese Formel kann sofort verallgemeinert werden, wenn wir C_n benützen, welche durch b Fundamentalpunkte von $(RT)_r$ gehen. Ihre Transformirten haben

$$(11) \quad \mathfrak{n}=nr-b(r-1),\quad \mathfrak{x}_1=\ldots=\mathfrak{x}_{r-b+1}=n-b,\quad \mathfrak{x}_{r-b+1}=\ldots=\mathfrak{x}_{r+1}=n-b+1$$

Fundamentalpunkten, so haben die Transformirten der C_n die Vielfachheiten $na_1,\ldots,na_\sigma$ in jenen Punkten und die Ordnung mn. Sie müssen dasselbe Geschlecht haben, wie die Curven C_n und indem wir denselben Schluss wie im Anfange von IV. anwenden, können wir sagen, dass dieses Geschlecht das Maximalgeschlecht der C_n sein müsse. Also ist

$$2p_{mn} - 2p_n = \Sigma na_i(na_i - 1) = n^2\Sigma a_i^2 - n\Sigma a_i$$

und durch Einsetzung der in III. gefundenen Werthe

$$p_{mn} - p_n = \frac{(nm-1)(nm-r)}{2} - \frac{(n-1)(n-r)}{2}$$

eine theils mehr, theils weniger allgemeine Gleichung als (14).

und es folgt daraus durch denselben Schluss wie soeben die Formel

$$(12)\qquad 2p_{nr-b(r-1)} - 2p_n = (r+1-b)(n-b)(n-b-1) + (n-b+1)(n-b)b,$$

wobei der erste Term rechts von den $r+1-b$ je $(n-b)$-fachen, der zweite von den b je $(n-b+1)$-fachen Punkten herrührt.

Es ist nun wirklich merkwürdig zu sehen, wie durch eine einfache algebraische Umformung die rechte Seite von (12) den Werth annimmt

$$(13)\qquad \frac{(nr-b(r-1)-1)(nr-b(r-1)-r)}{r-1} - \frac{(n-1)(n-r)}{r-1}.$$

Wir setzen $nr - b(r-1) = n_1$ und erhalten

$$(14)\qquad 2p_{n_1} - 2p_n = \frac{(n_1-1)(n_1-r)}{r-1} - \frac{(n-1)(n-r)}{r-1}.$$

Hier ist zu bemerken, dass in dieser unbedingten Gleichheit die Differenz rechts stets eine ganze Zahl ist, dass aber die beiden Terme einzeln, in welche der Ausdruck (14) gespalten erscheint, nicht ganze Zahlen sein müssen. Es darf also nicht aus (14) auf: $p_n =$ dem einen Terme geschlossen werden.

V.

Wir hatten $n_1 = nr - b(r-1) = (n-b)r + b$, mit b von 0 bis $r+1$, da $r+1$ Fundamentalpunkte vorhanden sind, dagegen $n > 0$. Aber es genügt für die Berechnung aller p_{n_1}, das b stets nur bis $r-1$ zu nehmen; denn ist $b = r$, dann entsteht n_1 auch als $(n-\beta)r$, wo $\beta = r-1$, und ist $b = r+1$, dann entsteht n_1 auch als $(n-\beta)\,r+1$, wo $\beta = r-1$.

Ist also eine Zahl n_σ vorgelegt, für welche p_{n_σ} zu berechnen ist, so stelle man zunächst dar $n_\sigma = g_{\sigma-1}r + q_{\sigma-1}$, wo $q_{\sigma-1} < r$. Dann kann man (14) auf n_σ anwenden, wenn man dort $g_{\sigma-1} + q_{\sigma-1}$ für n nimmt. Aber es ist $n_\sigma = g_{\sigma-1}(r-1) + n_{\sigma-1}$, wenn $g_{\sigma-1} + q_{\sigma-1} = n_{\sigma-1}$ gesetzt ist, also $g_{\sigma-1} + q_{\sigma-1} < n_\sigma$. Wir wenden nun auf $n_{\sigma-1}$ dieselbe Zerlegung an und setzen so fort, wodurch wir eine Succession von Zahlen $n_\sigma, n_{\sigma-1}, \ldots, n_1, n$ erhalten, deren letzte sicherlich $\leqq r-1$ sein wird. Es war nun jedesmal

$$(15)\qquad 2p_{n_i} - 2p_{n_{i-1}} = \frac{(n_i-1)(n_i-r)}{r-1} - \frac{(n_{i-1}-1)(n_{i-1}-r)}{r-1}$$

$$i = 1, \ldots, \sigma$$

und die Addition aller Gleichungen (15) liefert

$$(16)\qquad p_{n_\sigma} - p_n = \frac{(n_\sigma - 1)(n_\sigma - r)}{2(r-1)} - \frac{(n-1)(n-r)}{2(r-1)}$$

mit $n < r$.

Wir kennen aber a priori die Werthe $p_1 = p_2 = \ldots = p_{r-1} = p_r = 0$. Daher ist in (16) $p_n = 0$ einzusetzen.

Die Beziehung von n zu n_σ ist aus den Gleichungen

$$n_\sigma = g_{\sigma-1} r + q_{\sigma-1}, \quad n_{\sigma-1} = g_{\sigma-2} r + q_{\sigma-2}, \ \ldots, \ n_2 = g_1 r + q_1, \quad n_1 = gr + q,$$

ferner

$$n_{\sigma-1} = g_{\sigma-1} + q_{\sigma-1}, \quad n_{\sigma-2} = g_{\sigma-2} + q_{\sigma-2}, \ \ldots, \ n_1 = g_1 + q_1, \quad n = g + q$$

und

$$n_\sigma = g_{\sigma-1}(r-1) + n_{\sigma-1}, \quad n_{\sigma-1} = g_{\sigma-2}(r-1) + n_{\sigma-2}, \ \ldots, \ n_2 = g_1(r-1) + n_1,$$
$$n_1 = g(r-1) + n$$

sofort zu erkennen. n aus (16) ist der um 1 verkleinerte Rest, der bei der Division $n_\sigma : r - 1$ verbleibt.

Werden die Bezeichnungen n_σ, n in (16) mit n, q vertauscht, so entsteht die Formel[1] des zu beweisenden Theoremes.

Rom, den 28. Januar 1900.

---

[1] Die von Castelnuovo und Bertini (1889, 1890) auf total verschiedene Art bewiesene Formel

$$(\alpha)\qquad \chi\left\{n - \frac{r+1}{2} - \chi\frac{r-1}{2}\right\}$$

wo $\chi = \left[\frac{n-r}{r-1}\right]$ die kleinste ganze Zahl ist, welche nicht unterhalb des eingeklammerten Bruches liegt, kann durch einige Umformungen in meine obige Formel verwandelt werden.

Man setze präciser $\chi = \frac{n-r}{r-1} + \frac{q_1}{r-1}$, wo q_1 der Rest der Division $(n-r):(r-1)$ ist, so entsteht aus dieser Formel (α) die andere

$$\frac{(n-1)(n-r)}{2(r-1)} - \frac{q_1(r-1-q_1)}{2(r-1)}.$$

Wenn man aber jetzt $q_1 = q - 1$ hier einsetzen will, um meine Formel zu erhalten, muss man gleichzeitig die Reste aus dem Systeme $0, 1, \ldots, r-2$, in dem q_1 zu nehmen war, um 1 verkleinern. Hiedurch wird der Definition für χ Rechnung getragen.