EINE BEMERKUNG ZUR MITTAG-LEFFLER'SCHEN APPROXIMATION EINER BELIEBIGEN ANALYTISCHEN FUNKTION INNERHALB DES STERNGEBIETES.

(Auszug aus einem Briefe des Verfassers an Herrn Prof. MITTAG-LEFFLER.)

Von

LEOPOLD FEJÉR

in KOLOZSVÁR.

. . . Es sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1}$$

eine beliebige Potenzreihe, deren Konvergenzradius von Null verschieden ist. Herr Professor haben bewiesen, dass man auf unendlich-vieler Weise eine Folge

$$F_0(x),\ F_1(x),\ \ldots,\ F_n(x),\ \ldots \tag{2}$$

aufstellen kann, deren Glieder ganze transcendente (oder auch ganze rationale) Funktionen von x sind, so dass innerhalb des Sterngebietes, welches zur Stelle $x = 0$ und zur Funktion $f(x)$ gehört,

$$\lim_{n=\infty} F_n(x) = f(x), \tag{3}$$

wobei die Konvergenz gleichmässig ist innerhalb jedes Gebietes, das vollständig im Innern des Sterngebietes liegt. Die Potenzreihe von $F_n(x)$ entsteht aus der Potenzreihe (1) von $f(x)$ dadurch, dass die Glieder von (1) durch absoluten Konstanten multipliziert werden. $f(x)$ bedeutet an der rechten Seite von (3) die unmittelbare analytische Fortsetzung von (1) in das Sterngebiet hinein.

Man bekommt z. B. nach Herrn LINDELÖF eine solche Folge (2), wenn man in

$$F(\alpha, x) = a_0 + \frac{a_1}{1^{\alpha.1}} x + \frac{a_2}{2^{\alpha.2}} x^2 + \cdots + \frac{a_\nu}{\nu^{\alpha.\nu}} x^\nu + \cdots, \tag{4}$$

$$(\alpha > 0)$$

für α, der Reihe nach, die Glieder einer Folge

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \tag{5}$$

einsetzt, deren Glieder alle positiv sind und mit wachsendem n zu Null konvergieren. (E. LINDELÖF, Le Calcul des Résidus, 1905, Chapitre V.)

Man betrachte nun die Summe der ersten $(n+1)$ Glieder der Reihe (1), und der Reihe (4):

$$s_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

$$\sigma_n(\alpha, x) = a_0 + \frac{a_1}{1^{\alpha.1}} x + \cdots + \frac{a^n}{n^{\alpha.n}} x^n,$$

$$(\alpha > 0).$$

Man bilde ihre Differenz

$$s_n(x) - \sigma_n(\alpha, x) = a_2\left(1 - \frac{1}{2^{\alpha.2}}\right) x^2 + \cdots + a_n\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha.n}}\right) x^n.$$

Ich will zunächst den absoluten Betrag dieser Differenz abschätzen, wenn $|x| \leqq R$, wo R eine beliebige positive Grösse bedeutet.

Es sei ϱ eine positive Zahl, die kleiner ist als der Konvergenzradius der Reihe (1) (und auch kleiner ist als R). Es sei weiter $|f(x)| \leqq M$, wenn $|x| = \varrho$. Dann ist

$$|a_\nu| \leqq \frac{M}{\varrho^\nu},$$

$$(\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Weiter ist, bekanntlich,

$$1 - e^{-\sigma} < \sigma,$$

wenn σ eine beliebige positive Zahl bedeutet. Also ist

$$1 - \frac{1}{\nu^{\alpha.\nu}} = 1 - e^{-\alpha\nu\log\nu} < \alpha\,\nu\log\nu,$$

$$(\nu = 2, 3, 4, \ldots).$$

Ich erhalte daher

$$|s_n(x) - \sigma_n(\alpha, x)| < \frac{M}{\varrho^2} . \alpha . 2 \log 2 . R^2 + \cdots + \frac{M}{\varrho^n} . \alpha . n \log n . R^n < \alpha M n^2 \log n . \left(\frac{R}{\varrho}\right)^n,$$

$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Es sei nun z. B.

$$\alpha = \alpha_n = \frac{1}{n!}, \tag{7}$$

$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Dann ist

$$|s_n(x) - \sigma_n(\alpha_n, x)| < \frac{M n^2 \log n . \left(\frac{R}{\varrho}\right)^n}{n!},$$

und daher

$$\lim_{n=\infty} (s_n(x) - \sigma_n(\alpha_n, x)) = 0, \tag{8}$$

und zwar gleichmässig in *jedem* Kreise

$$|x| \leqq R.$$

Dies vorausgeschickt betrachte ich nun die Folge von ganzen transcendenten Funktionen $F(\alpha_n, x)$, wo

$$\alpha_n = \frac{1}{n!},$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Es ist

$$F(\alpha_n, x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{\frac{\nu}{n!}}} x^\nu - (s_n(x) - \sigma_n(\alpha_n, x)).$$

Wenn ich nun Gleichung (8) berücksichtige, so erhalte ich den Satz:
Die Folge von ganzen transcendenten Funktionen

$$\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x), \ldots, \tag{9}$$

wo

$$\Phi_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{\frac{\nu}{n!}}} x^\nu,$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

konvergiert zu $f(x)$ innerhalb des Sterngebietes (u. z. gleichmässig innerhalb jedes Gebietes, das vollständig im Innern des Sterngebietes liegt). *Die approximierenden ganzen transcendenten Funktionen $\Phi_n(x)$ haben hier die Spezialität, dass die ersten $(n+1)$ Koeffizienten der Potenzreihe von $\Phi_n(x)$ mit den ersten $(n+1)$ Koeffizienten der Potenzreihe von $f(x)$ resp. gleich sind.*[1]

Es ist übrigens klar, dass man mit Hilfe einer beliebigen Mittag-Lefflerschen Folge (2) eine Folge mit dieser Spezialität herstellen kann. Mann bedenke nur, dass aus (3) die Gleichungen

$$\lim_{n=\infty} F_n(0) = f(0),$$

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{d^\nu F_n(x)}{dx^\nu}\right]_{x=0} = \left[\frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu}\right]_{x=0},$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

folgen.

Mit Anwendung der Folge (9) erhalte ich, im Innern des Sterngebietes, für $f(x)$ die Reihenentwickelung

$$f(x) = \Phi_0(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\Phi_{\nu+1}(x) - \Phi_\nu(x)). \tag{10}$$

---

[1] Ich habe schon in meiner ersten Note in Acta mathematica (Tome 23 pag. 60) eine Funktion hergestellt, welche die obengenannte Eigenschaft besitzt, nämlich die Funktion:

$$g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_n!} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(0) \left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}.$$

Weil:

$$\sum_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\lambda} \frac{\lambda!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_n!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^\lambda = 1$$

bekommt man unmittelbar:

$$g_n(x) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} x + \cdots + \frac{F^{(n^2)}(0)}{n!} x^{n^2} + x^{n^2+1} G(x)$$

wo $G(x)$ ein Polynom in x vom Grade $n^4 + \cdots + n^{2n} - 1 = (n^{2n} - n^2)\frac{n^2}{n^2-1} - 1$ bezeichnet.

Meine Funktion $g_n(x)$ hat also dieselben karakteristischen Eigenschaften die Herr Fejér für die Funktion $\Phi_{n^2}(x)$ erhält. Sie ist insofern einfacher als die Fejér'sche dass ihre Herleitung mehr elementar ist als die Herleitung des Lindelöf'schen Satzes, welchen Herr Fejér zur Herstellung seiner Funktion braucht.

Wie Herr Fejér richtig angiebt können übrigens alle meine verschiedene Darstellungsformeln so modifizirt werden, dass sie die von Ihm angegebene karakteristische Eigenschaft erhalten. (M. L.)

Hier hat das allgemeine Glied der Reihe die Potenzreihenentwickelung

$$\Phi_n(x) - \Phi_{n-1}(x) = a_n\left(1 - \frac{1}{\frac{n}{n^{(n-1)!}}}\right)x^n + \cdots,$$

hat also, wenn $a_n \neq 0$, (für $n = 2, 3, 4, \ldots$) *an der Stelle* $x = 0$ *genau eine* n*-fache Nullstelle.*

Herr KÜRSCHÁK teilte mir in einem Briefe seine Vermuthung über die Existenz einer solchen Reihenentwickelung (10) mit, und wünschte einen Beweis für diese Existenz. Er kam zu der Frage nach einer solchen Entwickelung, indem er ein funktionentheoretisches Analogon eines zahlentheoretischen Satzes von Herrn HENSEL (Theorie der algebraischen Zahlen, 1908, Bd. I, pag. 41—43) aufzustellen versuchte. Dies gab mir die Veranlassung zur Konstruktion der Folge (9) — eine anspruchslose Bemerkung zu Ihrem wichtigen Theorem.

Ich bleibe hochachtungsvoll

Ihr ergebenster

Leopold Fejér.