NOTES SUR DEUX TRAVAUX D'ABEL RELATIFS A L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENCES FINIES

PAR

F. GOMES TEIXEIRA
à PORTO — PORTUGAL.

I.

1. Le premier des travaux d'ABEL que nous allons considérer fut publié dans le Magazin for Naturvidenskaberne (Christiania, t. 2, 1823). Dans la troisième partie de ce travail (Oeuvres complètes, 1881, t. 1, p. 21) présente le grand analyste la formule suivante:

$$\Sigma\varphi(x) = \int\varphi(x)dx - \frac{1}{2}\varphi(x) + \int_0^\infty \frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}i\right) - \varphi\left(x-\frac{t}{2}i\right)}{2i} \cdot \frac{dt}{e^{\pi t}-1} + C, \tag{1}$$

où $\Sigma\varphi(x)$ représente l'intégrale finie de $\varphi(x)$ et C une constante arbitraire, et en fait application à la détermination de quelques intégrales définies, qui avait été considérées par LEGENDRE dans ses *Exercices de Calcul intégral*, parmi lesquelles se trouve la suivante:

$$\int_0^\infty \frac{\sin\frac{ut}{2}\,dt}{e^{\pi t}-1} = \frac{1}{e^u-1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2}. \tag{2}$$

C'est de cette formule (1) que nous allons premièrement nous occuper, pour en faire une nouvelle application, en démontrant au moyen d'elle et de (2) la formule qui donne l'expression de la dérivée d'ordre quelconque des fonctions de e^x, connue par le nom de *formule d'Herschell.*

Appliquons, pour cela, la formule (1) à la fonction $e^{ux}x^{2n}$, n étant un nombre entier positif et u un nombre quelconque, et remarquons que, au moyen de l'intégration par parties, on trouve

$$\sum e^{ux}x^{2n} = \frac{e^{ux}}{e^u - 1}x^{2n} - \sum \frac{e^{u(x+1)}}{e^u - 1}\Delta x^{2n},$$

et par conséquent

$$\sum e^{ux}x^{2n} = \frac{e^{ux}}{e^u - 1}\left[x^{2n} - \frac{e^u}{e^u - 1}\Delta x^{2n} + \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^2 \Delta^2 x^{2n} - \dots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^{2n}\Delta^{2n}x^{2n}\right].$$

En posant alors

$$P = x^{2n} - \binom{2n}{2}\frac{x^{2n-2}}{2^2}t^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^{2n}}t^{2n},$$

$$Q = 2n\frac{x^{2n-1}}{2}t - \binom{2n}{3}\frac{x^{2n-3}}{2^3}t^3 + \dots,$$

on trouve

$$\int_0^\infty \left(P\sin\frac{ut}{2} + Q\cos\frac{ut}{2}\right)\frac{dt}{e^{\pi t} - 1}$$
$$= \frac{1}{e^u - 1}\left[x^{2n} - \frac{e^u}{e^u - 1}\Delta x^{2n} + \dots + \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^{2n}\Delta^{2n}x^{2n}\right]$$
$$- \left[\frac{x^{2n}}{u} - \frac{2nx^{2n-1}}{u^2} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{u^{2n+1}}\right] + \frac{1}{2}x^{2n} + Ce^{-ux}.$$

Les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres de cette identité doivent être égals. En considérant premièrement ceux de x^{2n}, on trouve l'égalité

$$\int_0^\infty \frac{\sin\frac{ut}{2}\,dt}{e^{\pi t} - 1} = \frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} + \frac{u^{2n}}{1 \cdot 2 \dots 2n}C,$$

qui, à cause de la formule (2), fait voir qu'est $C = 0$. Et en y posant ensuite $x = 0$, il vient

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n} \sin \frac{ut}{2}\, dt}{e^{\pi t} - 1} = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} e^u}{(e^u - 1)^2} \left[\Delta 0^{2n} - \frac{e^u}{e^u - 1} \Delta^2 0^{2n} + \dots - \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^{2n-1} \Delta^{2n} 0^{2n} \right] + (-1)^{n+1} 2^{2n} \frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{u^{2n+1}}.$$

En appliquant la formule (1) à la fonction $x^{2n-1} e^{ux}$, on trouve de la même manière

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n-1} \cos \frac{ut}{2}\, dt}{e^{\pi t} - 1} = (-1)^n \frac{2^{2n-1} e^u}{(e^u - 1)^2} \left[\Delta 0^{2n-1} - \frac{e^u}{e^u - 1} \Delta^2 0^{2n-1} + \dots + \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^{2n-2} \Delta^{2n-1} 0^{2n-1} \right] - (-1)^n 2^{2n-1} \frac{1 \cdot 2 \dots (2n-1)}{u^{2n}}.$$

Mais, d'un autre côté, en dérivant les deux membres de l'égalité (2), par rapport à u, $2n - 1$ et $2n$ fois, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n-1} \cos \frac{ut}{2}\, dt}{e^{\pi t} - 1} = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \left[\frac{1 \cdot 2 \dots (2n-1)}{u^{2n}} + \frac{d^{2n-1} (e^u - 1)^{-1}}{du^{2n-1}} \right],$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n} \sin \frac{ut}{2}\, dt}{e^{\pi t} - 1} = (-1)^{n+1} 2^{2n} \left[\frac{1 \cdot 2 \dots 2n}{u^{2n+1}} - \frac{d^{2n} (e_u - 1)^{-1}}{du^{2n}} \right].$$

De ces deux égalités et des deux antérieures on tire la suivante:

$$\frac{d^m (e^u - 1)^{-1}}{du^m} = - \frac{e^u}{(e^u - 1)^2} \left[\Delta 0^m - \frac{e^n}{e^u - 1} \Delta^2 0^m + \dots \pm \left(\frac{e^u}{e^u - 1}\right)^{m-1} \Delta^m 0^m \right].$$

Maintenant il n'a qu'un pas à donner pour obtenir la dérivée d'ordre m de $y = f(e^u)$ par rapport à u. Il suffit qu'on forme quelques dérivées successives de $f(e^x)$ pour remarquer qu'on a

$$y^{(m)} = f'(e^u) e^u + A f''(e^u) e^{2u} + B f'''(e^u) e^{3u} + \dots + f^m(e^u) e^{mu},$$

A, B, ... étant des nombres, qui ne dépendent pas de la fonction considérée, et qu'on peut, par conséquent, obtenir au moyen d'une fonction particulière. En appliquant, pour cela, cette formule à la fonction $(e^u - 1)^{-1}$, on trouve

$$y^{(m)} = -\frac{e^u}{(e^u-1)^2}\left[1 - 1.2A\frac{e^u}{e^u-1} + 1.2.3B\left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^2 - \dots \right.$$
$$\left. \pm 1.2\dots m\left(\frac{e^u}{e^u-1}\right)^{m-1}\right].$$

On voit donc qu'est

$$A = \frac{1}{1.2}\Delta^2 0^m, \qquad B = \frac{1}{1.2.3}\Delta^3 0^m, \qquad C = \frac{1}{1.2.3.4}\Delta^4 0^m, \quad \dots,$$

et par conséquent

$$y^{(m)} = f'(e^u)e^u + \frac{\Delta^2 0^m}{1.2} f''(e^u)e^{2u} + \frac{\Delta^3 0^m}{1.2.3} f'''(e^u)e^{3u} + \dots + f^m(e^u)e^{mu},$$

qui est la *formule d'Herschell.*

II.

2. Le second travail d'ABEL que nous allons considérer, fut publié pour la première fois après sa mort, et se trouve dans le tome 2, p. 1 des Oeuvres complètes. Il y donne la représentation de l'intégrale finie $\sum \frac{1}{x^\alpha}$ par une intégrale définie, au moyen de laquelle il l'étudie. Ici nous allons étudier la même fonction en prenant pour point de depart une série qui la représente, et en appliquant les méthodes de la théorie des fonctions analytiques.

Considérons la série

$$(1) \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+x)^\alpha}\right],$$

où α représente un nombre positif quelconque, laquelle contient comme cas particulier quelqu'unes qu'on trouve dans la théorie de la fonction $\Gamma(x)$, qui correspondent aux valeurs entières de α, et supposons que m^α représente une quelconque des valeurs que prend z^α, quand $z = m$, et qu'on détermine $(m+x)^a$ par la condition de se reduire à la valeur choisie pour m^a, quand $x=0$.

Cela posé, nous allons démontrer que la série considérée est *uniformément convergente* dans une aire A, limitée par un contour quelconque, laquelle ne contienne aucun des points d'affixes $-1, -2, -3, \ldots$.

Pour cela nous remarquerons premièrement que, si n est le premier nombre entier supérieur à la plus grande des valeurs que prend le module de x dans l'aire A, il suffit qu'on démontre qu'est uniformément convergente dans cette aire la série

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\left[\frac{1}{m^a}-\frac{1}{(m+x)^a}\right],$$

ou

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{m^a\left[\left(1+\frac{x}{m}\right)^a-1\right]}{m^a(m+x)^a},$$

ou

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{a\lambda x\left(1+\theta\frac{x}{m}\right)^{a-1}}{m(m+x)^a},$$

où $\lambda \overline{\overline{<}} 1$, $0<\theta<1$.

Or il est facile de voir qu'il existe un nombre M que le module de $\lambda x\left(1+\theta\frac{x}{m}\right)^{a-1}$ ne peut pas surpasser, quand x varie, sans sortir de l'aire A, et m prend les valeurs $n+1, n+2, \ldots$. En effet, si est $\alpha>1$, on a

$$\left|1+\theta\frac{x}{m}\right|^{a-1}\overline{\overline{<}}\left(1+\theta\left|\frac{x}{m}\right|\right)^{a-1}<2^{a-1},$$

quand $m>n$ et $|x|<n$; et, si $\alpha<1$, on a

$$\left|1+\theta\frac{x}{m}\right|^{1-a}>\left(1-\theta\left|\frac{x}{m}\right|\right)^{1-a}>1-\frac{n}{n+1}$$

et par conséquent

$$\left|1+\theta\frac{x}{m}\right|^{a-1}<n+1.$$

Nous avons donc

$$\left|\frac{\lambda x\left(1+\theta\frac{x}{m}\right)^{\alpha-1}}{m(m+x)^{\alpha}}\right| < \frac{M}{m\,|\,m+x\,|^{\alpha}} < \frac{M}{m(m-|\,x\,|)^{\alpha}} < \frac{M}{(m-n)^{\alpha+1}}.$$

Mais la série

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(m-n)^{\alpha+1}}$$

est convergente. La série (1) est donc *uniformément convergente dans l'aire considérée* A, et elle définit, par conséquent, une fonction $L_1(x)$, que nous allons étudier.

3. Soit x_0 l'affixe d'un point quelconque de l'aire A. Chaqu'un des termes de la série (1) peut être développé en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x-x_0$, convergente à l'intérieur d'un cercle dont le centre soit le point d'affixe x_0 et dont le rayon R soit égal ou inférieur à la distance de ce point à celui des points d'affixes -1, -2, -3, ... qu'en est plus prochain. Mais, d'un autre côté, la série (1) est uniformement convergente dans tout cercle de centre x_0 et de rayon inférieur à R. En appliquant un théorème de WEIERSTRASS bien connu, on voit donc que la fonction définie par la série (1) peut être développée en série ordonnée suivant les puissances de $x-x_0$, convergente à l'intérieur du cercle de rayon R, et que, par conséquent elle est *régulière* en tous les points différents de -1, -2, -3, ... Il convient encore remarquer que -1, -2, -3, ... sont des *points critiques* de la fonction considérée et qu'on a

$$L_1(x) = -\frac{1}{(x+n)^{\alpha}} + P(x+n), \qquad (n=-1,-2,-3,\ldots)$$

$P(x+n)$ représentant un développement ordonné suivant les puissances de $x+n$ qu'il est facile d'obtenir, et que cette égalité a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'intérieur d'un cercle dont le centre est le point d'affixe $-n$ et dont le rayon est égal à l'unité.

4. En développant $L_1(x)$ en série ordonnée suivant les puissances de x, on trouve le résultat

$$L_1(x) = \alpha S_{\alpha+1}x - \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2}S_{\alpha+2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1\,.\,2\,.\,3}S_{\alpha+3}x^3 - \ldots,$$

en posant

$$S_i = 1 + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^i} + \frac{1}{4^i} + \dots,$$

laquelle est convergente à l'intérieur de la circonférence de centre 0 et de rayon égale à l'unité.

On tire de cette égalité les suivantes:

$$L_1'(0) = \alpha S_{\alpha+1}, \qquad L_1''(0) = -\alpha(\alpha + 1) S_{\alpha+2}, \quad \dots$$

dont nous allons faire usage en cherchant le développement de la même fonction en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{x}{x+2}$.

Pour cela, remarquons, en premier lieu, que la droite tirée par le point d'affixe -1, perpendiculairement à l'axe des abscisses, divise le plan de représentation de x en deux demiplans et que, dans celui qui contient le point d'affixe 0, la fonction $L_1(x)$ est holomorphe. En appliquant maintenant un théorème que nous avons démontré dans le Journal de Crelle (t. 122, p. 98), on conclut que la fonction $L_1(x)$ peut être développée en série de la forme

$$L_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x}{x+2}\right)^n,$$

convergente dans ce demiplan. On détermine A_n au moyen de la formule

$$A_n = \frac{1}{1 \, . \, 2 \, . \, . \, . \, n} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(L_1'(x)(x+2)^n\right)\right]_{x=0},$$

qui donne

$$A_n = 2L_1'(0) + (n-1)\frac{2^2}{1 \, . \, 2} L_1''(0) + \binom{n-1}{2} \frac{2^3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} L_1'''(0) + \dots$$
$$+ \frac{2^n}{1 \, . \, 2 \, . \, . \, . \, n} L^{(n)}(0),$$

ou

$$A_n = 2\alpha S_{\alpha+1} - (n-1)\frac{2^2}{1.2}\alpha(\alpha+1)S_{\alpha+2} + \binom{n-1}{2}\frac{2^3}{1.2.3}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)S_{\alpha+3} - \dots$$
$$\pm \frac{2^n}{1 \, . \, 2 \, . \, . \, . \, n}\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)S_{\alpha+n}.$$

5. En dérivant n fois la série (1) par rapport à x, il vient

$$L_1^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m+x)^{\alpha+n}}.$$

Donc entre la dérivée d'ordre n de $L_1(x, \alpha)$ et la fonction $L_1(x, \alpha+n)$ existe la relation

$$L_1^{(n)}(x, \alpha) = (-1)^n\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\left[L_1(x, \alpha+n) - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{\alpha+n}}\right].$$

6. Nous avons supposé jusqu'ici que les binômes qui entrent dans la série (1) sont des branches quelconques des fonctions qu'ils représentent. En nous plaçant maintenant dans un point de vue plus particulier, nous supposerons qu'on choisit les valeurs des quantités 1^α, 2^α, 3^α, ..., qui entrent dans cette série, de manière qu'elles coincident avec celles que prend, dans les points d'affixes $1, 2, 3, \dots$, une branche uniforme de la fonction x^α, déterminée par une certaine valeur initialle et par une coupure, qui part du point d'affixe 0 et que x ne puisse traverser, et qu'on prend pour valeurs des binômes $(1+x)^\alpha$, $(2+x)^\alpha$, $(3+x)^\alpha$, ..., dans chaque point, celles que prend la même branche de x^α dans les points $1+x$, $2+x, 3+x, \dots$. Alors, si l'on change dans la série (1) x en $x+1$ et si l'on représente par K_a et K'_a les sommes des a premiers termes des deux séries, on a

$$K'_a - K_a = \frac{1}{(1+x)^\alpha} - \frac{1}{(a+1+x)^\alpha},$$

et, par conséquent, en posant $a = \infty$,

$$L_1(x+1) - L_1(x) = \frac{1}{(1+x)^\alpha}.$$

La fonction $L_1(x)$ représente donc l'intégrale finie de $\frac{1}{(1+x)^\alpha}$, ou $L_1(x-1)$ celle de $\frac{1}{x^\alpha}$. La fonction $L_1(x-1)$ coincide donc, dans le cas particulier maintenant considéré, avec la fonction $L(x)$ de Abel.