LES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE

À UN NOMBRE QUELCONQUE DE PÉRIODES

(Premier Mémoire[1])

PAR

F. CASORATI.

À PAVIE.

§ 1.

Lorsque j'étudiai, il y a longtemps, le célèbre Mémoire: *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur* publié par JACOBI en 1835 (Journal de CRELLE, T. 13), je n'y ai pas trouvé de raisons suffisantes pour regarder comme impossible l'inversion des intégrales Abéliennes, une à une, et, plus en général, pour regarder comme absurde la périodicité plus que double dans les fonctions analytiques d'une seule variable. L'admiration, que je ressentais pour le grand géomètre, et l'importance de la question m'engagèrent à insister sur ce point, dans l'espoir que, à l'aide des principes de la variabilité complexe, j'aurais pu parvenir à l'honneur de l'éclaircir.

JACOBI a démontré rigoureusement que, trois grandeurs ω, ω', ω'' étant données, on peut, en général, choisir des nombres entiers m, m', m'' de manière que le module de

$$m\omega + m'\omega' + m''\omega''$$

soit moindre qu'une grandeur donnée, si petite qu'elle soit.

Cette proposition, pour ainsi dire, arithmétique, transportée dans la théorie des fonctions, fait voir immédiatement qu'il ne peut pas exister

[1] Ce premier Mémoire est la reproduction, corrigée par l'auteur, d'une brochure imprimée à Milan en 1885, et sert d'introduction au Mémoire plus étendu qui suit, et qui était inédit.

de fonctions *uniformes* ayant plus de deux périodes.[1] Mais qu'est-ce qu'elle nous dit par rapport aux fonctions non uniformes? C'est la demande que je me suis faite à un certain point du Mémoire du tome 13.

Pour les fonctions ayant un nombre fini de valeurs pour chaque valeur de la variable on fait bien aisément la même conclusion que pour les fonctions uniformes. Mais pour les fonctions ayant une *infinité de valeurs* (j'entends, toujours, pour chaque valeur de la variable), une conclusion n'était pas aussi facile à atteindre.

C'est pour cela que j'ai entrepris l'analyse de quelques équations différentielles très simples, dont chaque intégrale devait admettre une infinité de valeurs et posséder une périodicité qui serait impossible dans une fonction uniforme. J'ai trouvé que ces intégrales, bien loin d'être absurdes ou de ne pas posséder les caractères de fonctions analytiques, non seulement se comportaient comme les fonctions analytiques les plus usuelles dans le voisinage de chaque valeur particulière de la variable (ce que le théorème de CAUCHY sur l'existence des fonctions intégrales nous apprenait bien déjà); mais aussi, qu'elles pouvaient être continuées de proche en proche indéfiniment, sans obstacles, comme les dites fonctions.

Alors je présentai une partie de ces recherches à l'Académie des sciences de Paris, qui les faisait imprimer dans ses Comptes rendus de décembre 1863 et janvier 1864. Je ne manquais pas de dire que, en affirmant l'absurdité de la périodicité multiple, JACOBI *n'avait probablement en vue que la classe de fonctions de laquelle font partie les fonctions circulaires et elliptiques,*[2] c'est-à-dire, la classe des fonctions uniformes. Mais j'avais dû aussi faire remarquer que la limite supérieure Z[3] de l'intégrale

$$z = \int_0^Z \frac{\alpha + \beta Z}{\sqrt{Z(1-Z)(1-\varkappa^2 Z)(1-\lambda^2 Z)(1-\mu^2 Z)}} dZ$$

n'était pas monodrome (lisez uniforme), *ni avait un nombre fini de valeurs.*

---

[1] Deux périodes aussi seraient impossibles (§ 1 du Mémoire de JACOBI) dans une fonction uniforme, si leur rapport devait être réel et incommensurable. Lorsque nous dirons *périodicité multiple que l'on croit absurde,* on doit y comprendre aussi le cas de deux périodes en rapport réel et incommensurable entre elles.

[2] Comptes rendus, T. 57, p. 1019.

[3] Comptes rendus, T. 58, p. 207. — Cette fonction Z s'y trouve désignée aussi par $\Phi(z)$.

J'ai pensé que JACOBI n'avait pas soupçonné l'existence d'une infinité de valeurs pour cette fonction; car, en cas contraire, il n'aurait pas appliqué sa conclusion (*functio tripliciter periodica non datur*) à cette limite Z, et détourné les géomètres de toute recherche sur les fonctions (d'une seule variable) inverses des intégrales.[1]

Bien que publiées dans un recueil très répandu, mes recherches n'eurent pas le bonheur d'attirer l'attention des géomètres.[2] On continua de croire à l'absurdité *absolue* de la périodicité multiple pour les fonctions analytiques d'une seule variable.

Des causes étrangères à la science m'ont éloigné ensuite de cette question. Cependant, je ne savais douter des résultats que j'avais obtenus, et je pensais que l'usage des variables complexes s'étendant toujours plus, et les conséquences de cette croyance erronée s'accumulant et s'aggravant de plus en plus, le moment serait venu, où j'aurais pu rappeler avec plus de succès l'attention bienveillante des savants sur ma thèse de 1863.

Ce moment me paraît à présent arrivé. M. FUCHS, l'éminent géomètre auquel la doctrine des équations différentielles doit tant de progrès, s'appuyant sans soupçon sur l'interprétation dominante du Mémoire de JACOBI, commence d'en tirer les conséquences les plus immédiates à l'égard des équations différentielles.[3]. En rappelant que le résultat de JACOBI peut s'énoncer en disant que *les intégrales de l'équation*

$$(\alpha) \qquad \frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)},$$

où $R(x)$ est une fonction entière de degré supérieur à 4, ne peuvent pas être regardées comme des fonctions analytiques de u, il ajoute: *Es ist aber ein für die Grundlagen der Theorie der Differentialgleichungen wesentlicher Umstand dass es auch unter den Differentialgleichungen jeder Ordnung und*

---

[1] Il est, au reste, presque superflu de remarquer que l'étude de ces fonctions ne va pas amoindrir mais augmenter la haute valeur des résultats déjà acquis dans la direction tracée par JACOBI.

[2] Quelques fautes d'impression en rendaient, peut-être, la lecture difficile dès le premier paragraphe. L'obscurité de l'auteur aura fait le reste.

[3] Voir sa communication du 15 janvier 1885 à l'Académie des sciences de Berlin, sous le titre: *Über den Charakter der Integrale von Differentialgleichungen zwischen complexen Variabeln.*

jeden Grades, welche nicht nur Transformationen von (α) sind, Classen solcher Art gibt, welche zwischen der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen keine functionale Beziehung im gewöhnlichen Sinne des Wortes festsetzen, so lange jene Veränderlichen complexe Werthe annehmen dürfen.

Il me semble que la gravité de ces conséquences peut bien faire désirer un nouvel examen de leur source.

§ 2.

Rien de plus facile aujourd'hui que de vérifier sur le Mémoire même de JACOBI l'exactitude de mes remarques. Mais je laisse de côté maintenant toute autre observation rétrospective et je prie mes collègues, et en particulier M. FUCHS, dont je connais l'affabilité comme j'admire les talents, d'avoir la bonté de lire ce peu de pages, où je présente le commencement de mes recherches [1] d'une manière qui me paraît extrêmement claire et facile.[2] En 1863 je n'avais pas connaissance de ces lieux représentatifs des fonctions et de leurs transformations conformes, qui aujourd'hui sont devenus beaucoup plus familiers. Avec leur secours, l'intuition et l'étude de ces fonctions périodiques, que l'on croit impossibles ou trop étranges, deviennent aussi faciles que pour les fonctions usuelles.

Je commence par expliquer mon procédé, et les dénominations qui s'y rattachent, sur une de ces transcendantes que l'on dit élémentaires.[3] Je prends la fonction Z définie par l'équation

$$\frac{AdZ}{Z-a} - dz = 0,$$

---

[1] Ne s'agissant ici que de la question de possibilité de la périodicité multiple dans les fonctions analytiques, je ne considère que deux cas très-simples; l'un bien connu à une période et l'autre à deux périodes. Le lecteur verra de lui même, assez clairement pour notre but, ce qu'il arrive dans tout autre cas.

[2] Mon exposition paraîtra même trop développée. C'est que j'ai voulu être facile aussi pour d'autres lecteurs moins exercés.

[3] J'entre dans beaucoup de détails relativement à ce cas connu, afin d'être clair et bref dans le cas successif.

avec la condition initiale $Z = 0$ pour $z = 0$.[1] C'est la fonction inverse de l'intégrale

$$(1) \qquad z = \int_0^Z \frac{A}{Z-a} dZ,$$

ou bien la fonction Z implicite dans l'équation $z = A \log\left(1 - \frac{Z}{a}\right)$. Nous savons que cette fonction n'est autre chose que l'exponentielle

$$Z = a(1 - e^{\frac{z}{A}});$$

mais nous voulons l'étudier, sans rien savoir, à l'aide de l'équation différentielle ou de l'équation (1).

Le second membre de cette équation a une infinité de valeurs pour chaque valeur de Z. Pour le rendre monodrome par rapport à Z, nous savons qu'il suffit d'empêcher Z d'accomplir des tours autour du point a.[2] A cet effet et pour notre but, il convient d'envisager comme lieu du point Z une surface étendue sur le plan Z, recouvrant partout ce plan une seule fois, et coupée suivant une ligne (droite, si l'on veut) allant du point a à l'infini. Je nomme cette surface la *surface monodromique* pour l'intégrale (1). Chaque point de cette surface est censé représenter la même valeur de Z que le point qui lui est au-dessous dans le plan Z. Mais nous devons aussi imaginer que l'on dépose en chaque point de cette surface la valeur de l'intégrale, c'est-à-dire la valeur de z donnée par l'intégration de la différentielle

$$\frac{A}{Z-a} dZ$$

le long d'un chemin conduisant d'une manière quelconque dans cette surface du point $Z = 0$ au point envisagé. Chaque point de la surface

---

[1] Cette condition, que j'ajoute pour fixer les idées, ici comme dans la suite, n'entame en rien la nature de la recherche. Si l'on fixait un autre système z_0, Z_0 de valeurs initiales, on reviendrait au premier en posant $z = z_0 + z'$, $Z = Z_0 + Z'$; z' et Z' étant les nouvelles variables.

[2] J'emploie la représentation usuelle des valeurs d'une variable complexe par les points d'un plan. Le point a est donc le point du plan Z qui représente la valeur a de Z. Il en est de même pour z et pour le plan z.

monodromique *portera* donc (pour ainsi dire) un couple de valeurs correspondantes de z et Z. [1]

Je transporte la surface ainsi *chargée* sur le plan z, en l'y étendant de manière que chaque valeur de z tombe au-dessus du point qui la représente dans le plan z. J'appelle la surface ainsi transformée *lieu fondamental* de la fonction Z, sur le plan de la variable indépendante z. [2]

Dans notre cas, tout le monde sait que ce *lieu* recouvre une bande infinie de plan z contournée par deux lignes congruentes, ayant entre elles la différence $A \,.\, 2\pi i$. [3] Mais je vais chercher la forme de ce lieu, comme si elle nous était inconnue. Pour faire cette recherche, il n'est pas nécessaire de déterminer beaucoup de choses relativement à la transformation que subit la *surface monodromique* en devenant *lieu fondamental*. Il suffit de déterminer la transformée du contour, et de plus, dans les cas successifs, les positions que viennent prendre certains points singuliers.

J'envisagerai la surface monodromique comme bornée à l'infini par un cercle. [4] Partant, son contour sera formé par ce cercle, par un cercle infiniment petit (fig. 1) autour du point a, et par deux lignes $2 \,.\,.\, 3$ et $1 \,.\,.\, 4$, qui sont les bords, droit et gauche, de la coupure imaginée.

Fig. 1 (sur le plan Z).

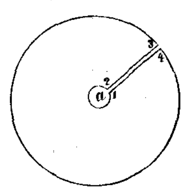
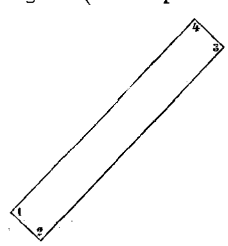


Fig. 1' (sur le plan z).



Pour trouver la transformée de ce contour, faisons-le parcourir par Z, dans sa direction positive, [5] et cherchons le chemin correspondant de z sur le plan z.

---

[1] Nous concevons ce point et son couple comme indissolublement liés entre eux dorénavant.

[2] Les figures dans ce lieu sont, comme on sait, des représentations conformes des figures correspondantes dans la surface monodromique.

[3] Je dis que deux lignes ou figures sont congruentes entre elles lorsque l'une peut venir coïncider avec l'autre par une simple translation. Et dans notre plan z, je dirai que la différence (de position) $M - N$ de deux figures congruentes M et N est une certaine quantité complexe lorsque cette quantité exprime en grandeur et en direction la plus petite translation par laquelle N peut aller coïncider avec M.

[4] Si au plan z on substituait la sphère z, ce cercle infiniment grand serait conçu comme un cercle infiniment petit autour du point $z = \infty$.

[5] Je conserve les définitions, que je crois usuelles, de *direction positive d'un contour*

Nous désignerons par z_1, Z_1; z_2, Z_2; etc., les valeurs des variables dans les points marqués 1, 2, etc. dans la surface monodromique comme dans le lieu fondamental.

Z partant du point marqué 1 dans fig. 1 et décrivant le petit cercle 1 .. 2, z partira du point marqué 1 dans fig. 1′, qui représente le lieu fondamental, et décrira la droite 1 .. 2.[1] La différence $z_2 - z_1$ étant le résultat de l'intégration de la différentielle

$$\frac{A}{Z-a}dZ$$

pendant le tour négatif de Z autour de a, on aura

$$z_2 - z_1 = - A . 2\pi i.$$

De même, lorsque Z décrira le grand cercle 3 .. 4, z décrira la droite 3 .. 4 de fig. 1′; et l'on aura $z_4 - z_3 = A . 2\pi i$.

Z décrivant la ligne 2 .. 3, z décrira une ligne correspondante 2 .. 3.[2] Enfin, quant à la quatrième portion 4 .. 1 du contour, je remarque que, si Z partait de 1 pour aller à 4, z décrirait (sur le plan z) une ligne 4 .. 1 congruente de la ligne 2 .. 3 décrite auparavant; car l'intégration de la différentielle sur les deux bords de la coupure donnerait mêmes résultats. Mais Z devant parcourir toute portion du contour dans la

et de *tour positif autour d'un point* adoptées aussi dans ma *Teorica delle funzioni di variabili complesse* (§ 70). Ici, Z décrira *positivement* le contour, si en partant du point 1, elle ira successivement aux points 2, 3, 4, 1.

[1] Je rappelle que, pendant ce mouvement, on peut poser $Z - a = re^{i\theta}$, $dZ = re^{i\theta} id\theta$, $dz = Aid\theta$.

Si, ayant fixé un point 1 dans la fig. 1, on voulait déterminer le point 1 correspondant dans la fig. 1′, on ferait marcher Z de son O au point 1 par tel chemin que l'on veut dans la fig. 1, et l'on déterminerait le chemin correspondant de z dans la fig. 1′ par les valeurs successives de l'intégrale (1).

[2] N'importe ici de préciser la nature géométrique de ces lignes. Cependant, si l'on veut imaginer que la coupure soit faite suivant une droite, la ligne 2 .. 3 sera dans la surface monodromique une droite issue du point a, et l'on pourra poser

$$Z - a = re^{i\theta}, \qquad dZ = e^{i\theta} dr.$$

Alors la différentielle à intégrer devient $dz = A\frac{dr}{r}$; ce qui nous dit que la ligne 2 .. 3 dans le lieu fondamental est une droite ayant la direction déterminée par l'argument de la grandeur complexe A.

direction positive, elle partira de 4 pour aller à 1. Alors z décrira en sens contraire la dite ligne congruente.

Le lieu fondamental est donc la bande parallélogrammique exprimée par la fig. 1'; dont les côtés 1..2 et 3..4 doivent être éloignés à l'infini respectivement dans les directions de $-A$ et A,[1] si l'on veut qu'ils correspondent aux deux cercles dans leur état limite.[2]

Quant à la distribution des valeurs de Z dans ce lieu, il nous suffit de remarquer que ces valeurs sont égales entre elles dans chaque couple de points correspondants[3] des côtés 2..3 et 1..4. Cette égalité, qui dans la surface monodromique est en évidence, exprime la périodicité de Z, comme fonction de z.

On peut remarquer aussi que, la bande parallélogrammique tendant à son état limite, les valeurs de Z en 1..2 tendent à devenir égales à a, en 3..4 à devenir infinies, en restant partout à l'intérieur finies et bien déterminées.

§ 3.

Prenons maintenant la fonction Z définie par l'équation

$$\left(\frac{A}{Z-a}+\frac{B}{Z-b}\right)dZ-dz=0,$$

avec la condition initiale $Z=0$ pour $z=0$. C'est la fonction inverse de l'intégrale

$$z=\int_0^Z\left(\frac{A}{Z-a}+\frac{B}{Z-b}\right)dZ, \tag{2}$$

[1] Par *direction de A* on entend celle de la droite qui va du point O au point A. Les droites *perpendiculaires à A* ont la direction de Ai ou de $-Ai$.

[2] C'est-à-dire, lorsque le petit cercle sera réduit au point a, et l'autre sera infiniment grand. Au reste, si les cercles n'étaient pas à l'état limite, la transformée de fig. 1 serait toujours une bande parallélogrammique, mais finie. Car les deux bords de la coupure se transforment toujours dans deux lignes congruentes, ayant entre elles la différence $A.2\pi i$.

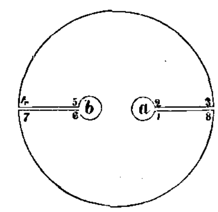
[3] C'est-à dire de points qui ont entre eux la même différence de position que les deux côtés.

ou la fonction implicite dans l'équation

$$z = A \log\left(1 - \frac{Z}{a}\right) + B \log\left(1 - \frac{Z}{b}\right).$$

L'intégrale (2) a, comme on sait, une double infinité de valeurs pour chaque valeur de Z, à cause des multiples arbitraires des deux périodes $A.2\pi i$ et $B.2\pi i$. Mais on la réduit monodrome en empêchant Z de tourner autour des points a et b. A cet effet, nous concevons comme lieu du point Z une surface étendue sur le plan Z et coupée suivant deux lignes allant des points a et b à l'infini (fig. 2).[1] Cette surface, dont chaque point est censé *porter* la valeur de Z avec la valeur correspondante de l'intégrale (2), est notre *surface monodromique* pour cette intégrale.

Fig. 2 (sur le plan Z).



Transportons cette surface sur le plan z. Il en résulte un certain *lieu fondamental*. Quel est son contour? Pour le reconnaître, faisons marcher Z sur le contour de fig. 2 en direction positive, et voyons quel est le chemin correspondant de z sur le plan z.

Z marchant sur le cercle 1..2, z marche sur une droite parallèle à $-A.2\pi i$. Car, le cercle 1..2 étant inf. petit, l'intégration du second terme

$$\frac{B}{Z-b}dZ$$

de la différentielle ne donne qu'un contribut inf. petit, et il suffit de considérer l'intégration du premier terme

$$\frac{A}{Z-a}dZ.$$

Z parvenant au point 2, on aura $z_2 - z_1 = -A.2\pi i$.

Semblablement, lorsque Z décrira le cercle 5..6, z décrira une droite congruente à $-B.2\pi i$.

Z marchant sur une des portions, 3..4 ou 7..8, du grand cercle,

---

[1] Cette figure et le lieu fondamental correspondant se rapportent au cas particulier, où $a = 1$, $b = -1$, $A = 1$, $B = i$, avec les coupures suivant l'axe réel. Mais le discours est tout-à-fait général. Toutes ces figures, d'ailleurs, sont purement schématiques.

z marchera sur une droite parallèle à $(A+B)2\pi i$. Car, pendant cette marche, on peut poser

$$Z = Re^{i\theta}, \qquad dZ = Re^{i\theta} i d\theta,$$

d'où

$$dz = \left(\frac{A}{1-\frac{a}{Z}} + \frac{B}{1-\frac{b}{Z}}\right) i d\theta,$$

c'est-à-dire, en négligeant les rapports de a et b à Z,

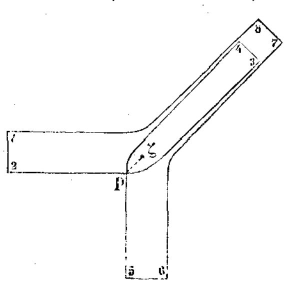
$$dz = (A+B) i d\theta.$$

Venons enfin aux bords des coupures. Pendant que Z décrira les bords $2\,.\,.\,3$ et $8\,.\,.\,1$, z décrira deux portions de contour du lieu fondamental congruentes l'une de l'autre prise en sens contraire. Même chose, lorsque Z décrira les bords $4\,.\,.\,5$ et $6\,.\,.\,7$.

Le contour de notre *lieu fondamental* sera donc formé comme il est exprimé schématiquement par la fig. 2′. Les portions de contour $1\,.\,.\,2$ et $5\,.\,.\,6$, congruentes de $-A\,.\,2\pi i$ et $-B\,.\,2\pi i$, et les portions $3\,.\,.\,4$ et $7\,.\,.\,8$, dont la somme est congruente à $(A+B)2\pi i$, doivent être imaginées à l'infini dans les directions de $-A$, $-B$, $A+B$.

Dans son *lieu fondamental*, la fonction Z aura même valeur dans les points correspondants des deux côtés congruents $2\,.\,.\,3$ et $1\,.\,.\,8$, dont la différence de position est la période $A\,.\,2\pi i$; et aura, semblablement, des valeurs égales entre elles dans les points correspondants des côtés $4\,.\,.\,5$ et $7\,.\,.\,6$, dont la différence de position est $B\,.\,2\pi i$. On peut remarquer aussi que notre fonction aura la valeur a en $1\,.\,.\,2$, la valeur b en $5\,.\,.\,6$, la valeur ∞ en $3\,.\,.\,4$ et $7\,.\,.\,8$; et partout ailleurs une valeur finie et bien déterminée. Tout cela comme dans le cas (1).

Fig. 2′ (sur le plan z).



Mais un fait se présente ici qui ne pouvait se présenter auparavant; c'est que le *lieu fondamental* ne recouvre pas *une seule fois partout* la portion de plan z sur laquelle il s'étend. Ce lieu dans l'étendue $P'34P$ (fig. 2′) recouvre deux fois le plan z, ou, en d'autres termes, est constitué par deux couches. Il y a ici un point de ramification ζ qui appartient aux deux couches, et autour duquel les deux couches se continuent l'une dans l'autre, le long d'une ligne ζP,[1] comme les couches des surfaces Riemanniennes qui servent à représenter les fonctions algébriques.

Quelles sont les valeurs de Z et z en ζ? Il faut se rappeler le théorème de CAUCHY, qui nous assure que, jusqu'à ce que le coefficient différentiel

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{(Z-a)(Z-b)}{(A+B)Z-(Ab+Ba)}$$

demeure synéctique, la fonction intégrale Z se comporte elle-même en fonction synéctique. Notre fonction ne peut donc cesser d'être synéctique, par rapport au plan z, qu'autour du point où

$$Z = \frac{Ab+Ba}{A+B}.$$

Voilà la valeur de Z dans le point de ramification. La valeur de z s'obtiendra par l'intégration de

$$\left(\frac{A}{Z-a} + \frac{B}{Z-b}\right) dZ,$$

depuis la valeur o jusqu'à celle que nous venons de trouver, le long d'un chemin tracé comme on veut dans la surface monodromique. Je poserai pour abréger:

$$(3) \qquad \frac{Ab+Ba}{A+B} = \eta, \qquad \int_0^\eta \left(\frac{A}{Z-a} + \frac{B}{Z-b}\right) dZ = \zeta.$$

Après un tour autour de ζ dans le lieu fondamental on revient à la même valeur de z mais non pas à la même valeur de Z; ce n'est qu'après deux tours que l'on retrouve la même valeur de Z. Analytiquement, cela signifie que, autour de ζ, notre fonction Z ne peut pas s'exprimer par une série de puissances entières et positives de $z-\zeta$; cependant, elle s'y exprime par les puissances entières et positives de $(z-\zeta)^{\frac{1}{2}}$. D'ailleurs, autour de tout autre point (où $z = z_0$), c'est bien par les puissances entières et positives de $z - z_0$ qu'elle peut s'exprimer. *Notre fonction Z est donc une fonction analytique, aussi bien que l'exponentielle considérée auparavant et les autres fonctions analytiques usuelles.*

[1] Ligne que je dis *de passage*, et qui dans fig. 2' est désignée par des traits.

Nous allons maintenant remarquer un second fait, dépendant du premier, qui ne se présente pas dans la représentation des fonctions périodiques uniformes.

Dans le cas de la fonction uniforme considérée auparavant (fig. 1 et 1′) nous savons que, pour en concevoir la continuation en dehors du lieu fondamental, on n'a qu'à imaginer un autre lieu congruent au fondamental, *chargé* des mêmes valeurs de Z dans les points homologues, et joint au lieu fondamental le long du bord $2 \ldots 3$ ou $4 \ldots 1$. En continuant de joindre aux nouveaux lieux d'autres lieux toujours congruents et également chargés, on ira recouvrir tout le plan z. Mais on le recouvre une seule fois, ce qui exprime que cette fonction périodique est *uniforme*.

Dans le cas de la fonction définie par l'équation (2), on peut en concevoir la continuation de la même manière. La fonction a les périodes

$$A \, . \, 2\pi i \quad \text{et} \quad B \, . \, 2\pi i.$$

Dans le lieu fondamental l'existence de ces périodes se traduit, comme on a vu, dans l'égalité des valeurs de Z le long des côtés (fig. 2) $2 \ldots 3$ et $1 \ldots 8$, $4 \ldots 5$ et $7 \ldots 6$. Maintenant, on pourra donc imaginer quatre lieux congruents et joints au lieu fondamental, le long respectivement des quatre côtés que nous venons de nommer. A chacun de ces lieux on pourra en ajouter trois autres nouveaux, et ainsi de suite. Bien entendu, ces lieux congruents doivent porter toujours les mêmes valeurs de Z également distribuées.[1] De cette manière on recouvrira peu à peu le plan z, comme dans le cas de la fonction uniforme. Mais le fait nouveau, qu'il faut remarquer à présent, est que chaque lieu peut empiéter plus ou moins sur les lieux contigus. Par conséquent, le nombre des couches sur un même point du plan z pourra croître indéfiniment. Et si, envisageant ensemble tous ces lieux, l'on se permet de passer de l'un à l'autre tel nombre de fois que ce soit, et par conséquent aussi de traverser tel nombre de fois que ce soit les lignes de passage d'une à autre couche

[1] A ces lieux on peut concevoir qu'il correspond, sur le plan Z, autant de surfaces monodromiques superposées l'une à l'autre et se continuant l'une dans l'autre le long de leurs bords $2 \ldots 3$, $1 \ldots 8$, $4 \ldots 5$, $7 \ldots 6$. Mais il est superflu maintenant de considérer cette correspondance.

(lignes homologues de ζP), alors on pourra revenir au dessus d'un même point du plan z dans des couches toujours nouvelles et dans des positions non homologues des precédentes, où l'on trouvera des valeurs toujours nouvelles pour Z. Voilà donc que notre fonction sera en même temps doublement périodique, monodrome dans la surface constituée par tel nombre que ce soit de lieux congruents, et ∞-drome par rapport au plan z, c'est-à-dire, admettant une infinité de valeurs pour chaque valeur de z.

§ 4.

Qu'il me soit permis d'ajouter quelques remarques à ce que je viens de dire sur l'équation (2), bien qu'elles paraîtront superflues pour le simple but de ce Mémoire. C'est ce que je ferai en considérant le cas particulier où le rapport des deux périodes devient réel et incommensurable. [1]

Parmi les fonctions que j'avais étudiées en 1863, j'avais choisi pour les Comptes rendus celle qui est définie par l'équation

$$z = \int_0^Z \left(\frac{1}{Z-1} - \frac{\sqrt{2}}{Z-2}\right) dZ \tag{4}$$

---

[1] Si le rapport des périodes devenait commensurable, le nombre des positions non homologues (dont on vient de parler) resterait fini. La fonction serait simplement périodique, mais non pas uniforme, si les points de diramation ne disparaissent pas. Si l'on voulait remonter à l'équation (2), en y faisant $A \,.\, 2\pi i = \mu\omega$ et $B \,.\, 2\pi i = \nu\omega$, où μ et ν désignent des nombres entiers premiers entre eux, on obtiendrait par l'intégration

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega}z} = \left(1 - \frac{Z}{a}\right)^{\mu}\left(1 - \frac{Z}{b}\right)^{\nu}.$$

Si n est le degré en Z de cette équation, on pourra donc, en effet, représenter Z par une surface recouvrant n fois le plan z. Z étant algébrique par rapport à l'exponentielle, toutes ses valeurs se trouvent déjà dans une bande recouvrant n fois un lieu fondamental de l'exponentielle, qui est une bande de largeur ω, sur le plan z. Ainsi, par exemple, dans le cas très-simple, où $\mu = \nu = 1$ et $b = -a$ (avec $\omega = 2\pi i$), tous les couples de valeurs de la fonction simplement périodique $Z = a\sqrt{1 - e^z}$ et de l'exponentielle e^z sont représentés sur le plan z par deux couches de largeur $2\pi i$, superposées l'une à l'autre et se continuant l'une dans l'autre le long d'une ligne de passage qui part du point [formules (3)] où $e^z = 1$ et $Z = 0$.

pour donner un exemple de fonction possédant la plus simple périodicité que l'on disait absurde, c'est-à-dire deux périodes en rapport réel et incommensurable entre elles.

Avant de former la surface monodromique et le lieu fondamental pour ce cas, je veux faire cette remarque générale, que le système des lignes de coupure, abstraction faite maintenant de la nature géométrique de leur cours, peut être aussi tel ou tel autre, différent du système indiqué fig. 2. De même que la surface monodromique, le lieu fondamental pourra donc prendre une ou autre forme.

Ainsi, en revenant au cas (4), si on fait, par exemple, les coupures à partir de $Z = 1$, le long de l'axe réel positif, jusqu'à l'infini (fig. 3),[1] le lieu fondamental sera formé de deux couches (fig. 3') bordées par des droites parallèles à l'axe réel; les droites pour une couche ayant entre elles la distance 2π, et pour l'autre la distance $(\sqrt{2} - 1)2\pi$. Ces couches se continuent l'une dans l'autre le long d'une ligne de passage partant du point de ramification, où la valeur de Z est $\eta = -\sqrt{2}$, et celle de z est exprimée par l'intégrale rectiligne

Fig. 3 (sur le plan Z).

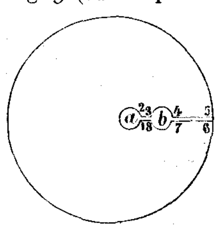
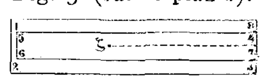


Fig. 3' (sur le plan z).



$$\zeta = \int_0^{-\sqrt{2}} \left(\frac{1}{Z-1} - \frac{\sqrt{2}}{Z-2}\right) dZ = 0{,}125\ldots.$$

On peut aussi former un lieu fondamental complètement simple, c'est-à-dire, qui nulle part ne recouvre deux fois le plan z. Si l'on empêche Z de faire plus d'un demi-tour autour de η dans la surface monodromique, z ne pourra faire plus d'un tour autour de ζ dans le lieu fondamental.

Fig. 4 (sur le plan Z).

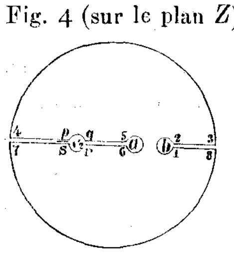
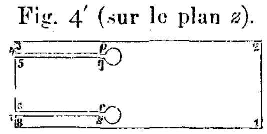


Fig. 4' (sur le plan z).



Partant, si on fait, par exemple, les coupures (fig. 4) le long de tout

[1] Dans cette figure, ainsi que dans la fig. 4, a et b ont respectivement les valeurs 1 et 2.

l'axe réel, hormis entre $Z = 1$ et $Z = 2$, on obtiendra le lieu fondamental tout simple indiqué fig. 4'.

Les lieux congruents contigus au fondamental le long des bords 2 .. 3 et 1 .. 8 n'empiètent pas sur lui; il y a empiètement par les deux autres lieux qui lui sont joints le long des bords 5 .. 4 et 6 .. 7. Ces bords dans fig. 4', étant brisés aux points de ramification, deviennent les lignes de passage d'une à autre couche.

Pour tout autre cas, de périodes en rapport réel et incommensurable entre elles, on aura des lieux fondamentaux de même forme que dans cas (4), mais dont les bords pourront avoir entre eux d'autres distances, et le point de ramification une position différente. Il est même presque évident que l'on peut prendre A, B et $a:b$ de manière à obtenir des bords distants entre eux comme on veut, et à faire tomber où l'on veut le point de diramation. Mais cela se rapporte à une question générale, qui n'a pas de place ici.

La méthode que nous venons d'indiquer, pour reconnaître la manière de se comporter des fonctions inverses des intégrales (1) et (2), s'applique immédiatement à toute intégrale de différentielle rationnelle. Et l'on trouve ainsi évidemment des fonctions dont les lieux fondamentaux sont contournés par tel nombre que l'on veut de couples de côtés congruents, ou, en d'autres termes, l'on trouve des fonctions analytiques douées de tel nombre que l'on veut de périodes; chaque infini logarithmique de l'intégrale pouvant donner naissance à une nouvelle période.

Nous avons pu appliquer aussi aisément la méthode aux intégrales de différentielles algébriques quelconques: car une surface Riemannienne, représentative de la fonction algébrique dont il s'agit, et coupée de manière à annuler l'influence de la connexion multiple et des infinis logarithmiques, nous offrait, toute prête, notre surface monodromique.

Pavie, novembre 1885.