SUR LA SOLUTION DU PROBLÈME DE RIEMANN

PAR

L. SCHLESINGER

À KOLOZSVAR.

En poursuivant les recherches que RIEMANN a touché dans son mémoire posthume sur la théorie des équations linéaires,[1] la première tâche que j'avais à remplir était, de démontrer l'existence d'un système de n fonctions d'une variable x, jouissant des propriétés suivantes. Ces fonctions sont holomorphes pour chaque valeur finie de x, à l'exception de σ points donnés arbitrairement $a_1, \ldots, a_\sigma$, et dans ces points singuliers mêmes, aussi bien que pour $x = \infty$, elles ne sont pas indéterminées (au sens de FUCHS[2]). Quand x franchît les coupures (a_ν, ∞) les dites fonctions subissent des substitutions linéaires arbitrairement données

$$\mathfrak{A}_\nu = (\mathfrak{A}_{ik}^{(\nu)}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma)$$
$$(i, k = 1, \ldots, n)$$

Le problème de déterminer un tel système de fonctions, que j'avais nommé le *Problème de Riemann*, a été résolu par moi en 1898[3] pour le cas particulier où les racines des équations fondamentales, relatives aux substitutions $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\sigma$ et à la substitution

$$\mathfrak{A}_{\sigma+1} = \mathfrak{A}_1^{-1} \ldots \mathfrak{A}_\sigma^{-1}$$

ont pour modules l'unité, à l'aide des fonctions zéta-fuchsiennes de M. POINCARÉ. Pour le cas général, où ces modules diffèrent de l'unité, l'application des séries zétafuchsiennes devient impossible, puisque dans ce cas ces séries sont divergentes. Plus tard je réussis à démontrer l'existence des fonctions satisfaisant au problème

[1] Voir RIEMANN, Werke (2de édit. 1892), p. 379 et suiv.
[2] Sitzungsberichte 1885, p. 281.
[3] Comptes Rendus, t. CXXVI, p. 723—725.

de RIEMANN en appliquant la *méthode de continuité*, dont MM. KLEIN et POINCARÉ se sont servis pour la démonstration du théorème fondamental de la théorie des fonctions fuchsiennes. Comme ma démonstration se trouve répandu dans plusieurs mémoires,[1] se rapportant pour la plus grande part à des sujets différents du problème mentionné, et comme j'ai réussi dernièrement à simplifier notablement la démonstration d'un théorème auxiliaire, je me permets d'exposer sur les quelques pages qui suivent ma démonstration sous sa forme, pour ainsi dire, définitive. Je remarque que récemment M. HILBERT et quelques-uns de ses disciples[2] ont démontré la possibilité de résoudre le problème de RIEMANN à l'aide de méthodes étrangères à la théorie des équations différentielles linéaires, savoir en appliquant la théorie des équations intégrales de MM. FREDHOLM et HILBERT.

*

1. Soient $\omega_1^{(\nu)}, \ldots, \omega_n^{(\nu)}$ les racines de l'équation fondamentale relative à la substitution $\mathfrak{A}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \sigma + 1)$, et supposons, pour simplifier, que ces racines soient tous simples. Formons le système différentiel canonique

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda k}^{(\nu)}}{x - a_\nu}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

de manière que les racines des équations déterminantes relatives aux points singuliers a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, \sigma + 1;\ a_{\sigma+1} = \infty)$ soient

$$r_k^{(\nu)} = \frac{\log \omega_k^{(\nu)}}{2\pi\sqrt{-1}}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les déterminations des logarithmes doivent être choisies conformément à la relation

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{\sigma+1} r_k^{(\nu)} = 0 .$$

---

[1] Comptes Rendus, t. CXXXVIII (1904) p. 955—956; Verhandlungen des III. internat. Mathematiker-Kongresses, (Leipsic, 1905) p. 219—228; Journal de Crelle, t. 130 (1905) p. 26—46; Comptes Rendus, t. CXLII (1906) p. 1031—1033; Mathematische Annalen, t. 63 (1906) p. 273 et suiv.

[2] Voir HILBERT, Verhandlungen des III. internat. Math. Kongresses (Leipsic 1905) p. 233 et suiv.; Göttinger Nachrichten 1905, p. 308; O. D. KELLOG, Mathem. Annalen, t. 60, p. 424 et suiv.; PLEMELJ, Akademischer Anzeiger, Vienne 1906, n:o XIII; c. f. aussi la remarque de M. WIRTINGER, Verhandl. des III. intern. Math. Kongresses, p. 125, 126.

Les constantes $A_{ik}^{(\nu)}$, en nombre de $n^2\sigma$, dépendront alors encore de

$$N = n^2\sigma - n(\sigma + 1) + 1$$

paramètres arbitraires, leur multiplicité que nous allons désigner par M, est donc une multiplicité algébrique à $2N$ dimensions, contenu dans la multiplicité à $2n^2\sigma$ dimensions de $n^2\sigma$ quantités complexes arbitraires. Pareillement les élements $\mathfrak{A}_{ik}^{(\nu)}$ des substitutions $\mathfrak{A}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \sigma)$, dont les équations fondamentales ont pour racines les $\omega_1^{(\nu)}, \ldots, \omega_n^{(\nu)}$ et pour lesquelles la substitution

$$\mathfrak{A}_1^{-1} \ldots \mathfrak{A}_\sigma^{-1}$$

a pour racines de son équation fondamentale les $\omega_1^{(\sigma+1)}, \ldots, \omega_n^{(\sigma+1)}$, forment une multiplicité algébrique $\mathfrak{M}$ à $2N$ dimensions.

À un système différentiel de la forme (A), où l'on regarde comme fixes les points singuliers $a_1, \ldots, a_\sigma$ et les racines des équations déterminantes, corresponde un point de la multiplicité M. Considérons un système fondamental de solutions (une *matrice intégrale*) y_{ik} du système différentiel (A), tel que pour un point régulier x_0 l'on ait:

$$\text{(B)} \qquad \lim_{x=x_0} y_{ii} = 1, \qquad \lim_{x=x_0} y_{ik} = 0 \text{ pour } i \neq k, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

cette matrice intégrale va subir des substitutions déterminées lorsque la variable x franchit les coupures $(a_\nu \infty)$. Il s'ensuit qu'à chaque point de la multiplicité M il correspond un point de $\mathfrak{M}$, et un seul. Il s'agit de démontrer qu'inversément, à chaque point de $\mathfrak{M}$ il correspond aussi un point de M.

2. Nous démontrons d'abord qu'à un point de $\mathfrak{M}$ il ne peut correspondre qu'un *seul* point de M.

Soit en effet z_{ik} la matrice intégrale d'un système différentiel de la même forme et au mêmes racines des équations déterminantes que (A), satisfaisant aux mêmes conditions initiales que y_{ik}. Supposons que z_{ik} subit aussi les mêmes substitutions que y_{ik}, lorsque la variable x franchit les coupures $(a_\nu \infty)$. Alors des équations

$$\text{(1)} \qquad z_{ik} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda} r_{\lambda k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

on tire les r_{ik} comme fonctions uniformes de la variable x, n'ayant d'autres points singuliers que $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$. Or dans le voisinage de $x = a_\nu$ on a:

$$y_{ik} = \sum_{\lambda=1}^{n} c_{i\lambda}^{(\nu)} (x - a_\nu)^{r_\lambda^{(\nu)}} \varphi_{\lambda k}^{(\nu)}, \tag{2}$$

les $c_{ik}^{(\nu)}$ étant des constantes, tandis que les $\varphi_{ik}^{(\nu)}$ sont des fonctions holomorphes au voisinage de a_ν, dont le déterminant ne s'évanouit pas pour $x = a_\nu$. Une représentation analogue subsiste pour $a_{\sigma+1} = \infty$, seulement au lieu de $x - a_\nu$ on doit mettre $\frac{1}{x}$. De même on aura

$$z_{ik} = \sum_{\lambda=1}^{n} c_{i\lambda}^{(\nu)} (x - a_\nu)^{r_\lambda^{(\nu)}} \psi_{\lambda k}^{(\nu)}, \tag{3}$$

où les $\psi_{ik}^{(\nu)}$ sont aussi des fonctions holomorphes au voisinage de $x = a_\nu$. En substituant les valeurs (2) et (3) dans les équations (1), on en tire pour les r_{ik} des développements suivant les puissances entières et positives de $x - a_\nu$; les r_{ik} sont donc holomorphes au voisinage de chacun des points $a_1, \ldots, a_\sigma$ et ∞, d'où 'on conclut, que les r_{ik} se réduisent à des constantes. Mais comme pour $x = x_0$ on a $z_{ik} = y_{ik}$, il s'ensuit que les z_{ik} doivent coïncider avec les y_{ik}. Nous avons donc le *théorème fondamental:*

Il n'y a qu'un seul système différentiel de la forme (A) *pour lequel la matrice intégrale satisfaisant aux conditions initiales* (B), *subit les substitutions* $\mathfrak{A}_\nu$ *lorsque la variable* x *franchit les coupures* $(a_\nu \infty)$, *et pour lequel les racines des équations déterminantes sont fixées.*

3. Selon un théorème de M. Poincaré les coefficients $\mathfrak{A}_{ik}^{(\nu)}$ des substitutions fondamentales, sont des fonctions entières et transcendentes des $A_{ik}^{(\nu)}$:

$$\mathfrak{A}_{ik}^{(\nu)} = \mathfrak{G}_{ik}^{(\nu)} (A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}), \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \ldots, n, \\ \nu = 1, 2, \ldots, \sigma \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Si les $A_{ik}^{(\nu)}$ parcourent les points de la multiplicité M, les valeurs correspondantes des fonctions $\mathfrak{G}_{ik}^{(\nu)}$ vont parcourir une multiplicité $\overline{\mathfrak{M}}$, contenue dans la multiplicité $\mathfrak{M}$ définie plus haut. Nous avons deux cas à distinguer:

a) ou la multiplicité $\overline{\mathfrak{M}}$ remplit la multiplicité $\mathfrak{M}$ toute entière,

b) ou $\overline{\mathfrak{M}}$ ne constitue qu'une portion de $\mathfrak{M}$.

Il s'agit de démontrer que le cas b) ne se présente pas.

Remarquons d'abord que M est une multiplicité *fermée*, c'est à dire qu'elle n'a pas de *bord*. En effet selon un théorème de Riemann[1] une multiplicité à m

[1] Werke (1892), p. 481; c. f. Poincaré, Acta Mathematica t. IV, p. 277.

dimensions ne peut être limité que par une multiplicité à $m-1$ dimensions; mais les points limites de M sont nécessairement des points singuliers des fonctions entières $\mathfrak{E}_{ik}^{(\nu)}$, donc pour ces points limites il faut qu'au moins l'une des équations $A_{ik}^{(\nu)}=\infty$ soit satisfaite. Une telle équation complexe équivaut à deux équations réelles, donc l'ensemble S des points limites de M ne peut constituer que des multiplicités à $2N-2$ dimensions au plus, il ne pourra donc former un bord de M. — Pour la même raison, si le cas b) se présentait, il faudrait que les points $\mathfrak{M}$ qui n'appartiennent pas à $\overline{\mathfrak{M}}$ soient séparés des points de $\overline{\mathfrak{M}}$ par une multiplicité Σ à $2N-1$ dimensions. Or considérons un point parcourant la multiplicité $\overline{\mathfrak{M}}$, et suivons le mouvement du point correspondant de M. Si le point de $\overline{\mathfrak{M}}$ va parvenir à un point de Σ, le point correspondant de M doit parvenir ou à un point de M pour lequel le déterminant fonctionnel des $\mathfrak{E}_{ik}^{(\nu)}$ suivant les $A_{ik}^{(\nu)}$ s'évanouit, ou en un point de S. Le premier cas est impossible, car d'après le théorème fondamental du n:o 2, à un point de $\overline{\mathfrak{M}}$ ne peut correspondre qu'un seul point de M, c'est à dire que la multiplicité M forme en quelque sorte un »domain fondamental» pour les fonctions entières $\mathfrak{E}_{ik}^{(\nu)}$. Quand au second cas, nous savons que pour les points de S l'une au moins des quantités $A_{ik}^{(\nu)}$ devient infinie. Mais selon un théorème que j'ai démontré,[1] lorsque l'une des quantités $A_{ik}^{(\nu)}$ dévient infinie de telle manière que les racines des équations déterminantes du système (A) ne soient pas altérées, il faut qu'au moins un des éléments des substitutions fondamentales devienne infinie aussi. Donc, lorsque le point de M atteint un point de S, le point correspondant de $\overline{\mathfrak{M}}$ atteindra un point pour lequel au moins une des équations $\mathfrak{A}_{ik}^{(\nu)}=\infty$ sera vérifiée. L'ensemble de ces points formant au plus des multiplicités à $2N-2$ dimensions ne peut donc partager la multiplicité $\mathfrak{M}$, qui a $2N$ dimensions, en deux parties, donc $\overline{\mathfrak{M}}$ ne peut constituer une portion de $\mathfrak{M}$, c'est à dire, que $\overline{\mathfrak{M}}$ coïncide avec la multiplicité $\mathfrak{M}$ toute entière, donc à tout point de $\mathfrak{M}$ correspond un point de M, c. q. f. d.

[1] Voir: Comptes Rendus, t. CXLII (1906), p. 1031—1033 et Mathem. Annalen t. 63, p. 276, 300.