ENDLICH-PROJEKTIVGEOMETRISCHES ANALOGON DES MINKOWSKISCHEN FUNDAMENTALSATZES.[1]

Von

L. RÉDEI

in SZEGED (UNGARN).

Herrn Prof. Friedrich Riesz zum 70. Geburtstage hochachtungsvoll zugeeignet.

Jarnik[2] hat folgenden Satz bewiesen:

Sind $p_1, \ldots, p_k$ Primzahlen, $e_1, \ldots, e_k$ nichtnegative ganze Zahlen, $L_i = L_i(x) = L_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, k)$ Funktionen, so dass L_i für p_i-adische ganze Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ eine p_i-adische ganze Zahl ist und aus

$$L_i(x) \equiv L_i(y) \pmod{p_i^{e_i}}$$

stets

$$L_i(x-y) \equiv 0 \pmod{p_i^{e_i}}$$

folgt, hat ein konvexer Körper $\mathfrak{K}$ im n-dimensionalen Euklidischen Raum R_n den Mittelpunkt $0 = (0, \ldots, 0)$ und das Volumen

$$V(\mathfrak{K}) \geqq 2^n p_1^{e_1} \ldots p_k^{e_k},$$

so enthält $\mathfrak{K}$ einen Gitterpunkt[3] $x \neq 0$ mit

$$L_i(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{e_i}} \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Wie auch Jarnik bemerkt hat, entstand sein Satz als Verallgemeinerung eines Satzes von Mahler[4], der sich auf den Spezialfall bezieht, wo $\mathfrak{K}$ ein Parallelotop

---

[1] Diese Arbeit (insbesondere Satz 2) bildete einen Teil eines Vortrags von mir gehalten am 26. April 1948 im Seminar von Prof. T. Nagell an der Universität in Uppsala. (Satz 1 entstand erst inzwischen, nachdem mir Jarniks Satz bekannt wurde.)

[2] V. Jarnik, Sur un théorème de M. Mahler, Časopis pro Pěstování Mat. a Fys., 68 (1939), S. 59—60.

[3] Einen Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit ganzen rationalen x_i nennen wir einen Gitterpunkt.

[4] K. Mahler, Über Diophantische Approximationen im Gebiete der p-adischen Zahlen, Jahresber. d. deutschen Mathematikervereinigung 44 (1934), S. 250—255.

und L_i eine homogene Linearform mit ganzen p_i-adischen Koeffizienten ist. Jarniks Satz lässt sich so verallgemeinern[5]:

Satz 1. *Sind $m_1, \ldots, m_k$ natürliche Zahlen, $L_i = L_i(x) = L_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, k)$ Funktionen, die für ganze rationale $x_1, \ldots, x_n$ ganz rational sind, zieht dabei*

$$L_i(x) \equiv L_i(y) \pmod{m_i} \tag{1}$$

jedesmal

$$L_i(x-y) \equiv 0 \pmod{m_i} \tag{2}$$

nach sich, so enthält jeder konvexe Körper $\mathfrak{K}$ in R_n mit dem Mittelpunkt 0 *und*

$$V(\mathfrak{K}) \geqq 2^n m_1 \ldots m_k \tag{3}$$

einen Gitterpunkt $x \neq 0$ mit

$$L_i(x) \equiv 0 \pmod{m_i} \qquad (i = 1, \ldots, k)\,. \tag{4}$$

Setzt man für die m_i eine Primzahl p und für die L_i homogene Linearformen mit ganzen rationalen Koeffizienten ein, so entsteht ein Spezialfall des Satzes, der mehrere wichtige Anwendungen zulässt, worauf wir an einer anderen Stelle eingehen. Hier beschränken wir uns bezüglich dieses Spezialfalles darauf, dass wir ihn in eine merkwürdige andere Form bringen, die ein endlich-projektivgeometrisches Analogon des Fundamentalsatzes von Minkowski genannt werden kann.

Denken wir eine Primzahl p festgehalten. Indem wir die ganzen rationalen Zahlen als Elemente des Primkörpers $K(p)$ von der Charakteristik p auffassen, so wird jedem Gitterpunkt $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit nicht lauter durch p teilbaren $x_1, \ldots, x_n$ ein Punkt eines $(n-1)$-dimensionalen (endlichen) projektiven Raumes P_{n-1} über $K(p)$ eindeutig zugeordnet[6]. Obige Spezialisierung von Satz 1 liefert uns den folgenden:

Satz 2. *Ist $\mathfrak{U}_r$ ein r-dimensionaler linearer Unterraum des $(n-1)$-dimensionalen projektiven Raumes P_{n-1} über $K(p)$, $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper in R_n mit dem Mittelpunkt* 0 *und*

---

[5] Man sieht so ein, dass unser Satz eine Verallgemeinerung des Satzes von Jarnik ist. Definiert man in diesem die L_i nur für ganze rationale (statt für p_i-adische) Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ und ersetzt die Werte von L_i je durch einen ganzen rationalen Näherungswert mod $p_i^{e_i}$, so kommt man eben zum Spezialfall $m_i = p_i^{e_i} (i = 1, \ldots, k)$ von Satz 1. (Diese Spezialisierung bedeutet übrigens keine wesentliche Einschränkung von Satz 1, den wir ebensogut nur für $m_i = p_i^{e_i}$ hätten aussprechen dürfen.) Man kann deshalb sagen, dass Jarniks Satz nicht vom Wesen nach »p-adisch« ist.

[6] Bekanntlich definiert man P_n als die Menge der »Punkte« $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$, wobei die ξ_i nicht lauter verschwindende Elemente von $K(p)$ sind, die nur bis auf einen gemeinsamen Faktor in Betracht kommen. Lineare Unterräume und ihre Dimension sind dann wie üblich zu definieren.

$$V(\mathfrak{K}) \geqq 2^n p^{n-r-1} \qquad (r = 0, \ldots, n-1)\,, \tag{5}$$

enthält $\mathfrak{K}$ *keinen Gitterpunkt* ($\neq 0$) *mit lauter durch* p *teilbaren Koordinaten, so gibt es einen Gitterpunkt in* $\mathfrak{K}$, *dem ein Punkt von* $\mathfrak{U}_r$ *zugeordnet ist.*

Beweis von Satz 1[7]. Die Menge der Gitterpunkte bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}$ und nennen das natürliche Punktgitter. Im allgemeinen verstehen wir unter einem Punktgitter das durch eine nichtausgeartete und 0 festhaltende Affinität erzeugte Bild von $\mathfrak{N}$. Der Fundamentalsatz von Minkowski lautet (in affininvarianter Form) so: Gilt

$$V(\mathfrak{K}) \geqq 2^n V(\mathfrak{P})\,, \tag{6}$$

wobei $\mathfrak{K}$ einen konvexen Körper mit dem Mittelpunkt 0 und $\mathfrak{P}$ ein Grundparallelotop eines Punktgitters $\mathfrak{M}$ bezeichnet, so enthält $\mathfrak{K}$ einen Punkt $\neq 0$ von $\mathfrak{M}$. Unser Beweis von Satz 1 wird einfach darin bestehen, dass wir diesen Satz auf den eben formulierten Fundamentalsatz zurückführen[8].

Bezeichne jetzt $\mathfrak{M}$ die Menge derjenigen Gitterpunkte x, für die

$$L_i(x) \equiv 0 \pmod{m_i} \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{7}$$

gilt. Aus der Annahme folgt, dass $\mathfrak{M}$ einen Untermodul von $\mathfrak{N}$ bildet, wobei die Punkte von $\mathfrak{N}$ wie Vektoren zu addieren sind. Auch gehören die Punkte x von $\mathfrak{N}$ mit festem $L_i(x)$ mod m_i ($i = 1, \ldots, k$), stets in eine feste Nebenklasse von $\mathfrak{M}$, also ist der Index von $\mathfrak{M}$ endlich und höchstens $m_1 \ldots m_k$. Hieraus folgt, dass $\mathfrak{M}$ ein Punktgitter ist. Selbst der gesagte Index ist bekanntlich gleich dem Volumen eines Grundparallelotops $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{M}$, und so haben wir bekommen, dass jetzt wegen (3) noch mehr (6) gilt. Hiernach enthält $\mathfrak{K}$ einen Gitterpunkt $x(\neq 0)$ in $\mathfrak{M}$. Da hierfür auch (7) gilt, so haben wir den Beweis von Satz 1 beendet[9].

Beweis von Satz 2. Die Punkte x von $\mathfrak{U}_r$ lassen sich durch Kongruenzen

$$L_i(x) \equiv 0 \pmod{p} \qquad (i = 1, \ldots, n-1-r) \tag{8}$$

charakterisieren, wobei die $L_i(x) = L_i(x_1, \ldots, x_n)$ homogene Linearformen mit ganzen rationalen Koeffizienten sind. Das bedeutet, dass ein Gitterpunkt $x=(x_1, \ldots, x_n)$ mit nicht lauter durch p teilbaren $x_1, \ldots, x_n$ dann und nur dann eine Lösung von (8) ist, wenn der zugeordnete Punkt von P_{n-1} in $\mathfrak{U}_r$ gehört. Die Anwendung von

---

[7] Obiger Beweis ist leichter als der Originalbeweis des weniger allgemeinen Satzes von Jarnik.

[8] Umgekehrt stimmt der Fall $k=0$ von Satz 1 mit dem Fundamentalsatz von Minkowski überein.

[9] Obiger Beweis zeigt, dass Satz 1 im Grunde die Anwendung des Fundamentalsatzes von Minkowski auf das als die Lösungsmenge von (4) definierte Punktgitter ist.

Satz 1 mit $k = n-r-1, m_1 = \ldots = m_k = p$ ergibt also eben die Richtigkeit von Satz 2.

Bemerkungen. Als einfaches Beispiel für Satz 2 betrachten wir den Fall $n = 2, r = 0$. Dann ist $\mathfrak{K}$ ein konvexer Bereich in der Ebene R_2, ferner handelt es sich um die Punkte $\mathfrak{U}_0$ der (endlichen) projektiven Gerade P_1. Verwendet man für diese inhomogene Koordinaten, so gewinnt man folgendes:

Bezeichne $\mathfrak{K}$ einen konvexen Bereich in der Ebene mit dem Mittelpunkt 0 *und dem Inhalt* $4p$, *so dass $\mathfrak{K}$ ausser* 0 *keinen Gitterpunkt* (x, y) *mit* $p|x, y$ *enthält. Durchläuft* (x, y) *alle Gitterpunkte* $\neq 0$ *von* $\mathfrak{K}$, *so representiert* $\frac{y}{x}$ *alle Restklassen* mod p.

Wählt man für $\mathfrak{K}$ insbesondere das Quadrat $|x|, |y| \leqq \sqrt{p}$, so kommt man zu einem wenig beachteten Satz von Thue[10], dem aber zuerst Scholz[11] diese Formulierung gab, der auch einen zweiten ähnlich leichten Fall betrachtet hat. Von diesen Beispielen ausgehend bin ich allmählich zum Satz 2 gekommen, dabei hat mir auch ein Gedankenaustausch mit Herrn T. Szele geholfen. Einen Teil der oben in Aussicht gestellten Anwendungen werde ich aus Thues Satz gewinnen.

---

[10] A. Thue, Et par antydninger til en taltheoretisk methode, Christiania Videnskabs-Selskabs Forhandlinger, 1902. No. 7, S. 3—21.

[11] A. Scholz, Einführung in die Zahlentheorie, Berlin 1939, insb. S. 45—46.