REMARQUES SUR LA THÉORIE DE LA REPRÉSENTATION CONFORME

PAR

E. PHRAGMÉN
à STOCKHOLM.

La théorie de la représentation conforme des surfaces est, comme on sait, intimement liée à la théorie du problème de Dirichlet. Après que M. WEIERSTRASS eut attiré l'attention sur l'insuffisance de l'argument par lequel RIEMANN avait voulu démontrer la solubilité de ce problème, M. SCHWARZ, dans plusieurs travaux extrêmement remarquables, dont le plus important se trouve dans les Monatsberichte de l'Académie de Berlin, année 1870, a établi d'une manière rigoureuse cette solubilité, du moins dans des cas très étendus, et a mis à profit ce résultat pour la théorie de la représentation conforme. Plus tard, la méthode de M. SCHWARZ a été commentée par plusieurs auteurs, parmi lesquels je tiens à nommer ici HARNACK [1] et M. JULES RIEMANN. [2]

Ces auteurs ont remarqué une difficulté que l'on rencontre en passant du problème de Dirichlet au problème de la représentation conforme. Cette difficulté, qui paraît avoir échappé à M. SCHWARZ, de même qu'à M. SCHOTTKY, dont on a un mémoire étendu sur la représentation conforme des aires à connexion multiple,[3] consiste principalement en ce qui suit. Si l'on a résolu le problème de Dirichlet pour une aire S et une

---

[1] *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales* etc., Leipzig, Teubner, 1887.

[2] *Sur le problème de Dirichlet,* Thèse, Paris 1888.

[3] Journal für Mathematik, t. 83.

suite continue de valeurs données sur son contour s, c'est-à-dire, si on a trouvé une fonction réelle u harmonique[1] en S, qui tend uniformément vers les valeurs données quand on s'approche du contour, on ne sait pas en général, comment la fonction v conjuguée de u se comporte dans le voisinage du contour. HARNACK a fait disparaître cette difficulté dans des cas assez étendus, en démontrant que la fonction v est holomorphe dans le voisinage de tout point situé sur une portion du contour formée d'un arc régulier d'une ligne analytique et où les valeurs données sont définies par une fonction holomorphe. Tout se réduit dans ce cas, comme il est du reste très facile de le voir, à démontrer que toute fonction u, qui est harmonique d'un côté d'une droite et qui s'annule sur la droite, est *continuable* au-delà de la droite. HARNACK énonce ce résultat à la page 15 du livre cité; mais la démonstration qu'il en donne ne me semble pas satisfaisante. Heureusement qu'il est facile de trouver une autre démonstration absolument rigoureuse, et qui a de plus l'avantage d'être très élémentaire. En effet, joignons deux points de la droite s par un arc de cercle c de manière à former un segment de cercle C tel que la fonction u est harmonique à son intérieur et continue sur le contour. Puis menons l'arc de cercle c' symétrique à c par rapport à la droite, et faisons correspondre à chaque point de cet arc la valeur numériquement opposée à la valeur de la fonction u au point symétrique situé sur c. Formons une fonction U qui soit harmonique dans l'aire limitée par les deux arcs de cercle, qui soit égale à u sur c et prenne sur c' les valeurs qui viennent d'être définies. Il n'y a qu'une seule fonction qui satisfait à ces conditions. Par conséquent, si x', y' sont les coordonnées du point symétrique au point (x, y) par rapport à la droite, on a

$$U(x', y') = - U(x, y).$$

Car si on pose

$$V(x, y) = - U(x', y')$$

---

[1] c.-à-d. satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

la fonction $V(x, y)$ satisfait aux mêmes conditions que $U(x, y)$. Sur la droite elle-même, on a donc $U = 0$. Donc les fonctions u et U, étant harmoniques dans le domaine C et s'accordant sur son contour, sont identiques, et le théorème de HARNACK se trouve démontré rigoureusement.

Voici un autre point de la théorie de la représentation conforme qui me paraît digne de l'attention des géomètres. M. SCHWARZ a indiqué (loc. cit. pag. 785) une importante généralisation du problème de Dirichlet, dont on n'a pas jusqu'ici, ce me semble, tiré tout le parti possible. Supposons une surface telle que le voisinage de tout point puisse être représenté conformément sur une aire plane.[1] Supposons de plus que, par l'intermédiaire de la représentation conforme, on regarde cette fonction, dans le voisinage d'un point de la surface, comme fonction des points d'une aire plane qui représente d'une manière conforme ce voisinage, et supposons qu'elle soit fonction harmonique dans cette aire plane. Je dirai alors simplement que la fonction est harmonique dans le voisinage du point considéré de la surface. Je dirai de plus qu'une fonction est harmonique dans un domaine quelconque d'une surface, si elle est harmonique dans le voisinage de tout point de ce domaine.

Convenons de généraliser le problème de Dirichlet dans le même sens, et désignons par ce nom le problème qui consiste à trouver une fonction harmonique dans un domaine donné d'une surface et tendant uniformément vers des valeurs données quand on s'approche du contour du domaine. Le procédé de M. SCHWARZ nous permet de dire que ce problème généralisé peut être résolu, pourvu que la suite des valeurs données soit continue, et que le domaine donné puisse être composé d'un nombre fini de domaines représentables conformément sur des aires planes pour lesquelles on sait résoudre le problème le Dirichlet.

Comme on sait, le problème de Dirichlet peut être généralisé dans une autre direction, et l'on peut donner, outre les valeurs sur le contour, certaines conditions de discontinuité. En particulier, si le domaine donné est fermé il n'y a lieu de considérer que les conditions de discontinuité.

---

[1] Il me semble que M. SCHWARZ fait trop peu de cas des difficultés que fait naître en général la présence d'*arêtes* à l'intérieur du domaine considéré (cf. loc. cit. pag. 785).

L'existence de la solution se trouve toujours établie par le procédé alterné de M. Schwarz.

On connaît tout le parti qu'on peut tirer de ces théorèmes pour la théorie des intégrales abéliennes, en les appliquant aux surfaces dites de Riemann.[1] Mais il semble avoir échappé à l'attention des géomètres[2] qu'on peut les appliquer tout aussi bien aux polygones générateurs de M. Poincaré et que, de cette manière, on peut établir tout d'un coup l'existence des fonctions fuchsiennes et kleinéennes.

En effet, on n'a qu'à se rendre compte de ce qu'il faut entendre par une fonction harmonique dans le voisinage d'un point $z = z_0$ du polygone. Si le point $z = z_0$ est situé à l'intérieur du polygone, il n'y a rien de particulier. S'il est situé sur un côté du polygone, nous conviendrons de compter au voisinage de z_0 les points du polygone qui appartiennent à un petit cercle autour de z_0, et les points dont les points correspondants du polygone limitrophe appartiennent au même cercle, et nous dirons qu'une fonction est harmonique dans le voisinage de z_0 si elle est harmonique à l'intérieur de ce cercle.

Enfin, si le point z_0 est un sommet du polygone, formons des régions limitrophes ayant le même sommet jusqu'à ce que nous ayons un représentant de chaque sommet faisant partie du même cycle que le sommet $z = z_0$. Si la somme de tous les angles du cycle est égale à 2π, nous compterons au voisinage de z_0 l'ensemble des points du polygone appartenant à un petit cercle autour de z_0 ou y ayant des points correspondants, et nous nommerons fonction harmonique dans le voisinage du sommet z_0 toute fonction harmonique dans un tel cercle. Au contraire, si la somme des angles est différente de 2π, le premier et le dernier côté aboutissant au point z_0 seront correspondants. Choisissons sur ces lignes deux points correspondants et joignons-les par un arc de cercle coupant les deux lignes orthogonalement. Il sera facile de représenter le domaine limité par les deux lignes et par l'arc de cercle conformément sur l'intérieur d'un cercle, de telle sorte qu'au sommet z_0 corresponde le centre du cercle et qu'aux deux lignes correspondantes du contour corresponde

---

[1] Cf. C. Neumann, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*, Leipzig, Teubner, 1884.

[2] Cf. Poincaré, Acta t. 1, p. 294; t. 4, p. 240.

un rayon du cercle. Dans ce cas, une fonction sera dite harmonique dans le voisinage de z_0, si elle devient par cette transformation fonction harmonique à l'intérieur du cercle.

Cela posé, on voit tout de suite que les polygones générateurs de M. Poincaré, considérés comme des surfaces fermées, peuvent être composés, de la manière indiquée par M. Schwarz, d'un nombre fini de domaines pour chacun desquels le problème de Dirichlet est soluble. Donc le problème de Dirichlet, généralisé comme nous venons de le faire, est soluble pour le polygone générateur en entier.

L'existence des fonctions fuchsiennes et kleinéennes est une conséquence immédiate de ce théorème; du reste, on voit facilement que ce n'est pas là le seul point de la théorie de ces transcendantes si remarquables où l'on peut recourir avec profit à la théorie de la représentation conforme.

En parlant de la théorie de la représentation conforme, il convient de dire un mot de la méthode élémentaire par laquelle M. Schläfli à établi la possibilité de la représentation conforme d'un polygone rectiligne donné sur un demi-plan.[1] Cette méthode a été critiquée par M. J. Riemann[2] — à tort, ce me semble. Voici en effet en peu de mots ce qui a été démontré par M. Schläfli.

Partant du fait connu que la fonction

$$P = M\int_0^\omega \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}(1-t\omega)^{\delta-1}\ldots(1-y\omega)^{\theta-1}(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega,$$

où l'on suppose $M > 0$, $1 > s > t > \ldots > y > z > 0$, représente le demi-plan conformément sur un polygone à n côtés, dont les angles sont

$$\alpha\pi, \beta\pi, \gamma\pi, \ldots, \iota\pi, \varkappa\pi,$$

où

$$\varkappa = n - 2 - (\alpha + \beta + \ldots + \iota),$$

[1] Journal für Mathematik, t. 78.

[2] loc. cit. p. 47—49.

et dont les longueurs des côtés sont données par les équations

$$(\alpha\beta) = M\int_0^1 \omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}\ldots(1-y\omega)^{\theta-1}(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega,$$

$$(\beta\gamma) = M\int_1^{\frac{1}{s}} \omega^{\alpha-1}(\omega-1)^{\beta-1}(1-s\omega)^{\gamma-1}\ldots(1-y\omega)^{\theta-1}(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega,$$

. . . .

$$(\theta\iota) = M\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{z}} \omega^{\alpha-1}(\omega-1)^{\beta-1}(s\omega-1)^{\gamma-1}\ldots(y\omega-1)^{\theta-1}(1-z\omega)^{\iota-1}d\omega,$$

il montre que le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial[(\alpha\beta),(\beta\gamma),\ldots,(\theta\iota)]}{\partial[M,s,\ldots,z]}$$

a la valeur

$$(-M)^{n-3}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\ldots\Gamma(\iota)}{\Gamma(1-x)}\cdot s^{x+\gamma-2}t^{x+\delta-2}\ldots z^{x+\iota-2}$$
$$\cdot(1-s)^{\beta+\gamma-2}(1-t)^{\beta+\delta-2}\ldots(1-z)^{\beta+\iota-2}$$
$$\cdot(s-t)^{\gamma+\delta-2}\ldots(s-z)^{\gamma+\iota-2}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdot(y-z)^{\theta+\iota-2}.$$

Par conséquent, si $M, s, t, \ldots, z$ ont des valeurs réelles telles que

$$\delta_1 > M > \delta,\ 1-s>\delta,\ s-t>\delta,\ \ldots,\ y-z>\delta,\ z>\delta,$$

δ et δ_1 étant des quantités positives, les valeurs numériques de ce déterminant sont comprises entre deux valeurs limites positives.

Donnons maintenant à $M, s, t, \ldots, z$ des valeurs particulières $M_0, s_0, t_0, \ldots, z_0$ satisfaisant aux inégalités

$$M_0 > 0, \qquad 1 > s_0 > t_0 > \ldots > z_0 > 0.$$

Nous savons que la fonction correspondante P_0 représente le demi-plan sur un polygone à n côtés

$$(\alpha\beta)_0, (\beta\gamma)_0, \ldots, (\theta\iota)_0$$

et aux angles donnés. Soient $(\alpha\beta)_1 \ldots (\theta\iota)_1$ les longueurs des côtés du polygone donné. Il est clair qu'on peut arriver du polygone $(\alpha\beta)_0 \ldots (\theta\iota)_0$ au polygone donné $(\alpha\beta)_1 \ldots (\theta\iota)_1$, en passant par une série continue de polygones à n côtés, par exemple en égalant $(\alpha\beta) \ldots (\theta\iota)$ à n fonctions régulières d'une variable réelle ξ croissant de ξ_0 à ξ_1. Soit ξ_2 une valeur entre ξ_0 et ξ_1. Si cette valeur est assez rapprochée de ξ_0, puisque le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial[(\alpha\beta), (\beta\gamma), \ldots, (\theta\iota)]}{\partial[M, s, \ldots, z]}$$

est différent de zéro pour $\xi = \xi_0$, on peut déterminer $M, s, \ldots, z$ de manière que $(\alpha\beta) \ldots (\theta\iota)$ prennent les valeurs $(\alpha\beta)_2 \ldots (\theta\iota)_2$ correspondant à ξ_2.

Cela a lieu encore au-delà de ξ_2, si la valeur numérique du déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial[(\alpha\beta), (\beta\gamma), \ldots, (\theta\iota)]}{\partial[M, s, \ldots, z]}$$

reste comprise entre deux quantités positives pour toutes les valeurs de ξ entre ξ_0 et ξ_2.

Or on peut déterminer à priori deux telles quantités. En effet, parce que tous les côtés des polygones $(\alpha\beta) \ldots (\theta\iota)$ correspondant à des valeurs de ξ entre ξ_0 et ξ_1 sont compris entre des limites positives, s'il y a des valeurs $M, s, t, \ldots, z$ $(1 > s > t > \ldots > z > 0)$ qui y correspondent, il faut que la quantité M soit aussi comprise entre des limites positives et que les différences $1 - s, s - t, \ldots, y - z, z - 0$ soient toutes supérieures à une quantité positive. Car si une ou plusieurs de ces différences s'annulaient, le polygone correspondant n'aurait plus n côtés, et si M s'annulait ou devenait infini, tous les côtés s'annuleraient ou deviendraient infinis. Mais dans ces conditions, la valeur numérique du déterminant fonctionnel est toujours comprise entre deux valeurs positives, comme nous l'avons déjà énoncé plus haut.

Donc la propriété dont nous parlons a lieu jusqu'à et au-delà de $\xi = \xi_1$, et on peut déterminer M et $s, t, \ldots, z$ de telle manière que le demi-plan soit représenté conformément sur le polygone donné à l'aide de la fonction

$$P = M\int_0^{\omega} \omega^{\alpha-1}(1 - \omega)^{\beta-1}(1 - s\omega)^{\gamma-1} \ldots (1 - z\omega)^{\iota-1} d\omega,$$

ce qu'il fallait démontrer.

En terminant ces remarques détachées, tirées d'un cours que j'ai professé à l'université de Stockholm pendant le semestre du printemps 1889, je ne puis me refuser le plaisir d'attirer l'attention du lecteur sur la solution simple et élégante du problème de Dirichlet dans le cas d'un domaine convexe donnée par KIRCHHOFF et publiée dans ce même volume des Acta, p. 179—183. Il est superflu de dire que cette solution, donnée primitivement pour le cas de l'espace, s'applique tout aussi bien au cas de deux dimensions.