RELATIONS ENTRE LES POLYNOMES DE JACOBI, LAGUERRE ET HERMITE.

PAR

ERVIN FELDHEIM

à BUDAPEST.

Les polynomes classiques de Jacobi renferment un très grand nombre de polynomes orthogonaux particuliers et fréquemment employés, tout d'abord les polynomes ultrasphériques (et ses nombreux cas spéciaux). On peut aussi déduire des polynomes de Jacobi, comme il est bien connu, les polynomes de Laguerre par un passage à la limite approprié, de même que les polynomes d'Hermite se déduisent d'une façon analogue des polynomes ultrasphériques. Le but de la présente Note est d'étudier la liaison entre ces quatre systèmes de polynomes. Les relations considérées sont en partie connues et admises sans démonstration, d'autres, également connues, seront retrouvées comme des cas particuliers de certains résultats que nous croyons nouveaux.

Ces relations sont de deux sortes: relations de passage d'un système de polynomes à un autre, et relations de passage (d'une valeur du paramètre ou du degré ou de l'argument à une autre) dans le même système de polynomes. On établira des relations limites, des relations contenant des intégrales et des développements en séries des polynomes en question.

Commençons par les *définitions*[1]. Les polynomes de Jacobi sont définis par

$$(1) \qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1;\ \alpha+1;\ \frac{1-x}{2}\right),$$

[1] Pour les définitions, ainsi que pour un grand nombre des résultats connus cités, voir G. SZEGŐ, Orthogonal Polynomials. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. 23. (1939).

où F est la fonction hypergéométrique de Gauss:

$$F(a, b; c; x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (b)_r}{(c)_r r!} x^r, \qquad (a)_r = \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)}, \qquad (a)_0 = 1;$$

α et β sont deux paramètres tels que $\alpha > -1$, $\beta > -1$, et l'on suppose encore $-1 \leqq x \leqq 1$. Pour les polynomes ultrasphériques, nous prenons l'analogue de (1):

$$(2) \qquad P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} F\left(-n, n+2\lambda;\ \lambda + \frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right) \qquad \left(\lambda > -\frac{1}{2}\right).$$

Les polynomes de Laguerre sont donnés par

$$(3) \qquad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\, {}_1F_1(-n;\ \alpha+1;\ x) \qquad (\alpha > -1),$$

où ${}_1F_1(a; c; x)$ est la fonction bien connue (fonction hypergéométrique confluente de Kummer)

$${}_1F_1(a; c; x) = \lim_{\varepsilon \to 0} F\left(a, \frac{1}{\varepsilon}; c; \varepsilon x\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r}{(c)_r r!} x^r.$$

Pour ce qui est des polynomes d'Hermite, ils s'expriment aussi à l'aide de ces fonctions confluentes, mais il sera plus commode d'écrire ici leur expression explicite:

$$(4) \qquad H_n(x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^r \frac{n!\,(2x)^{n-2r}}{r!\,(n-2r)!}.$$

§ 1. Relations de passage d'un système de polynomes à un autre.

1°. *Relations limites.* — La liaison entre les polynomes de Jacobi et ultrasphériques ne peut pas être considérée comme une formule limite proprement dite, les derniers polynomes étant obtenus pour les valeurs égales des deux paramètres ou en donnant une valeur fixe $\left(\pm \frac{1}{2}\right)$ à l'un des paramètres du polynome de Jacobi:

$$(5) \qquad P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)_n} P_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\, \lambda-\frac{1}{2}\right)}(x) = 2^{2n} \frac{(\lambda)_n (2\lambda)_n}{(2\lambda)_{2n}} P_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\, \lambda-\frac{1}{2}\right)}(x) \qquad \left(\lambda > -\frac{1}{2}\right)$$

ou encore

$$(6)\quad \begin{cases} P_{2n}^{(\lambda)}(x) = (-1)^n (\lambda)_n \cdot 2^{2n} \dfrac{n!}{(2n)!} P_n^{\left(-\frac{1}{2},\, \lambda-\frac{1}{2}\right)}(1-2x^2) = \\ \qquad\qquad = (-1)^n \dfrac{(\lambda)_n}{n!} F\left(-n,\, n+\lambda;\, \dfrac{1}{2};\, x^2\right) \\ P_{2n+1}^{(\lambda)}(x) = (-1)^n \cdot 2\lambda(\lambda+1)_n \cdot 2^{2n} \dfrac{n!}{(2n+1)!} x P_n^{\left(\frac{1}{2},\, \lambda-\frac{1}{2}\right)}(1-2x^2) = \\ \qquad\qquad = (-1)^n \cdot 2\lambda \cdot \dfrac{(\lambda+1)_n}{n!} x F\left(-n,\, n+\lambda+1;\, \dfrac{3}{2};\, x^2\right). \end{cases}$$

Les polynomes de Laguerre sont liés à ceux de Jacobi par la formule limite

$$(7)\qquad L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta \to \infty} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1 - \frac{2x}{\beta}\right).$$

Si l'on remarque que

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x),$$

on pourra encore écrire que

$$(7')\qquad L_n^{(\beta)}(x) = \lim_{\alpha \to \infty} (-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{2x}{\alpha} - 1\right).$$

Les polynomes d'Hermite peuvent se déduire des polynomes ultrasphériques et des polynomes de Laguerre. D'abord

$$(8)\qquad H_n(x) = n! \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-\frac{n}{2}} P_n^{(\lambda)}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

tandisque les relations qui lient $H_n(x)$ à $L_n^{(\alpha)}(x)$ sont encore de deux natures: la formule limite[2]

$$(9)\qquad H_n(x) = 2^n n! \lim_{\omega \to \infty} \omega^{-n} L_n^{\left(\frac{\omega^2}{2}+k\right)}\left(\frac{\omega^2}{2} - \omega x\right) \qquad (k \text{ arbitraire})$$

et les relations analogues à (6):

$$(10)\quad \begin{cases} H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2) \\ H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x^2). \end{cases}$$

Pour toutes les relations mentionnées jusqu'ici, exceptée (9), nous renvoyons au livre cité sous[1].

[2] L. TOSCANO, Formule limiti sui polinomi di Laguerre. Boll. Unione Mat. Ital. II. t. 1. (1939). p. 337—339.

Ces relations permettent de passer d'un certain résultat établi pour une des classes des polynomes, les polynomes de Jacobi par exemple, au résultat analogue concernant les autres systèmes de polynomes en question. Pour illustrer, considérons des fonctions génératrices des polynomes de Jacobi, déduites de la relation[3]:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(h)_r}{r!} F(-r, a;\, c;\, x) z^r = (1-z)^{-h} F\left(a, h;\, c;\, -\frac{xz}{1-z}\right) \qquad (|z| < 1)$$

que nous appliquerons à (1) et (6) successivement pour $h = c$, et $h = \frac{1}{\varepsilon}$, $z = \varepsilon t$, $\varepsilon \to 0$.

Nous aurons donc, pour les polynomes de Jacobi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) t^n = (1-t)^{\beta} \left(1 - t\frac{1+x}{2}\right)^{-\alpha-\beta-1} \qquad (|t| < 1), \tag{11}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} e^{t\frac{1+x}{2}} \cdot {}_1F_1\left(-\beta;\, \alpha+1;\, t\frac{1-x}{2}\right) \qquad (\alpha > -1) \tag{12}$$

tandisque pour les polynomes ultrasphériques, il vient (pour les degrés pairs, par exemple)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!} \frac{t^n}{(1-\lambda)_n} P_{2n}^{(\lambda-n)}(x) = (1-t)^{\lambda-\frac{1}{2}} [1 - t(1-x^2)]^{-\lambda} = \tag{13}$$

$$= (1-t)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{tx^2}{1-t}\right)^{-\lambda}, \qquad (|t| < 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(1-\lambda)_n} P_{2n}^{(\lambda-n)}(x) = e^{-t} {}_1F_1\left(\lambda;\, \frac{1}{2};\, tx^2\right) \tag{14}$$

et des relations analogues pour les polynomes ultrasphériques de degrés impairs[4].

Si l'on applique (7) ou (7') à (11) et (12), on retrouve les fonctions génératrices connues des polynomes de Laguerre:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n = (1-t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{tx}{1-t}} \qquad (|t| < 1) \tag{11'}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha-n)}(x) t^n = (1+t)^{\alpha} e^{-tx}, \qquad (|t| < 1) \tag{11''}$$

---

[3] E. FELDHEIM, Contributions à la théorie des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. I. (Sous presse), (formule (69) pour $b = 0$).

[4] Ces fonctions génératrices, et surtout les formules (11), (12), (13) et (14) nous paraissent nouvelles.

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(x) = e^t (tx)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{tx}). \tag{12'}$$

Pour la généralisation de toutes ces formules au cas de deux variables, voir un de nos travaux récents[5].

La relation limite (8) permet de déduire de (13) et (14) les deux formules

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(x) = (1-t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{tx^2}{1-t}} \qquad (|t|<1),$$

qui est une conséquence de la formule connue de Mehler, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(2n)!} H_{2n}(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-t} (x\sqrt{t})^{\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}(2x\sqrt{t}) = e^{-t} ch(2x\sqrt{t}),$$

résultat également connu[6]. Ces dernières relations se déduisent encore, par (9) et (10), des fonctions génératrices ci-dessus des polynomes de Laguerre. La dernière formule concernant les polynomes d'Hermite, en tenant compte de son analogue pour les indices impairs, donne lieu à la fonction génératrice classique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{2tx-t^2},$$

qui est d'ailleurs la limite correspondant à (8) de la relation bien connue

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\lambda)}(x)\, t^n = (1-2tx+t^2)^{-\lambda}.$$

2°. *Relations intégrales.* — Nous connaissons l'équation[7]

$$F(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(c-\gamma)} \int_0^1 v^{\gamma-1}(1-v)^{c-\gamma-1} F(a,b;\gamma;vx)\, dv, \tag{15}$$

---

[5] E. Feldheim, Contributions à la théorie des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables II et III. (Sous presse).

[6] K. Dusl, Quelques remarques sur les polynomes d'Hermite. Congr. Intern. Mat. Bologna. (1928). t. III. p. 315.

[7] A. Erdélyi, Quarterly Journal of Math. t. 8. (1937). p. 200—213, 267—277; t. 10. (1939). p. 176—189. Cette formule est d'ailleurs un cas particulier des relations plus générales, établies dans notre travail cité sous [3].

avec $\Re(c) > \Re(\gamma) > 0$. En remplaçant aux deux membres respectivement (1) et la première des formules (6), il vient

$$(16)\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \\ = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \frac{(\alpha+1)_n}{(\alpha+\beta+1)_n} \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} P_{2n}^{(\alpha+\beta+1)}\left(v\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right) dv \\ \left(\alpha > -\frac{1}{2}\right).$$

C'est la généralisation de la formule d'Uspensky[8] qui lie les polynomes de Laguerre et d'Hermite, et qui se déduit de (16) par l'application de (7):

$$(17)\quad L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} H_{2n}(v\sqrt{x})\, dv \\ \left(\alpha > -\frac{1}{2}\right).$$

Mais la relation (15) peut encore donner lieu à d'autres équations analogues à (16), entre les polynomes de Jacobi et ultrasphériques. En tenant compte de (1) et (2), on trouve les formules inverses suivantes:

$$(18)\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \\ = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\lambda+\frac{1}{2}\right)} \frac{(\alpha+1)_n}{(2\lambda)_n} \int_0^1 v^{\lambda-\frac{1}{2}} (1-v)^{\alpha-\lambda-\frac{1}{2}} P_n^{(\lambda)}[1-v(1-x)]\, dv,$$

avec $\alpha+\beta+1 = 2\lambda, \quad \alpha > \lambda - \frac{1}{2}, \quad \lambda > -\frac{1}{2},$

et

$$(19)\quad P_n^{(\lambda)}(x) = \\ = \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\lambda-\alpha-\frac{1}{2}\right)} \frac{(2\lambda)_n}{(\alpha+1)_n} \int_0^1 v^{\alpha} (1-v)^{\lambda-\alpha-\frac{3}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}[1-v(1-x)]\, dv,$$

avec $\alpha+\beta+1 = 2\lambda, \quad \lambda > \alpha + \frac{1}{2}, \quad \alpha > -1.$

---

[8] Voir G. Szegő, loc. cit. sous [1]. Une autre généralisation de la formule d'Uspensky a été donnée dans notre article II. cité sous [5].

On déduit également une inversion de (16), en appliquant à ses deux membres la seconde des formules (6) et (1) respectivement:

$$(20)\qquad \frac{1}{x} P_{2n+1}^{(\lambda)}(x) = $$
$$= (-1)^n \frac{\lambda \sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \frac{(\lambda+1)_n}{(\alpha+1)_n} \int_0^1 v^\alpha (1-v)^{-\alpha-\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\,\lambda-\alpha)}(1-2vx^2)\,dv$$
$$\left(\alpha < \frac{1}{2}\right).$$

Les formules limites (7) et (8) réduisent (20) à l'inversion de l'équation d'Uspensky:

$$(21)\qquad \frac{1}{x} H_{2n+1}(x) = $$
$$= (-1)^n (2n+1)! \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \int_0^1 v^\alpha (1-v)^{-\alpha-\frac{1}{2}} L_n^{(\alpha)}(vx^2)\,dv$$
$$\left(\alpha < \frac{1}{2}\right).$$

En particulier, si $\alpha = 0$, on trouve

$$\frac{1}{x} H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} \int_{-1}^{+1} L_n[x^2(1-t^2)]\,dt =$$
$$= (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} \int_0^\pi L_n(x^2 \sin^2\theta) \sin\theta\,d\theta.$$

Nous avons déjà établi, dans des travaux antérieurs[9], d'autres relations intégrales entre les polynomes d'Hermite et de Laguerre. Nous les reprenons ici sans démonstration:

[9] E. FELDHEIM, a) Développements en série de polynomes d'Hermite et de Laguerre à l'aide des transformations de Gauss et de Hankel. I—III. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. t. 43. (1940), p. 224—248, 379—386. (Formules (61) et (62)).

b) Équations intégrales pour les polynomes d'Hermite à une et plusieurs variables, pour les polynomes de Laguerre, et pour les fonctions hypergéométriques les plus générales. Annali d. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa. t. 9. (1940), p. 225—252. (Formules (23) et (29)).

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
& H_m(x+v)\, H_n(x-v) = \\
& \qquad = 2^m n!\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+ix)^2} (v+iu)^{m-n} L_n^{(m-n)}(2u^2+2v^2)\, du \\
& 2^m n!\, (v+iu)^{m-n} L_n^{(m-n)}(2u^2+2v^2) = \qquad\qquad (m \geqq n) \\
& \qquad = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-iu)^2} H_m(x+v)\, H_n(x-v)\, dx
\end{aligned}
\right.
$$

et nous donnerons ailleurs des généralisations de ces équations pour les fonctions confluentes et du cylindre parabolique.

Continuons maintenant la considération des équations intégrales qui lient les polynomes de Jacobi et de Laguerre. Rappelons les deux équations fonctionnelles entre fonctions hypergéométriques de Gauss et de Kummer[10]:

$$
(23)\qquad F(a, b; c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-u}\, {}_1F_1(b; c; ux)\, du, \qquad \Re(a) > 0,\ x \neq 1
$$

et une sorte d'inversion

$$
{}_1F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(b)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+,\, x+)} u^{-b} e^{u} F\left(a, b; c; \frac{x}{u}\right) du \qquad (b \neq 0, -1, -2, -3, \ldots)
$$

le chemin d'intégration, pour cette dernière intégrale, en partant de $-\infty$, entoure l'origine et le point x dans le sens positif et retourne vers $-\infty$.

Par (1) et (3), ces relations deviennent

$$
(24)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \int_0^{\infty} u^{n+\alpha+\beta} e^{-u} L_n^{(\alpha)}\left(u \frac{1-x}{2}\right) du
$$

$$
(n+\alpha+\beta > -1)
$$

et

$$
(25)\qquad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+,\, x+)} e^{u} u^{-n-\alpha-\beta-1} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1 - \frac{2x}{u}\right) du
$$

$$
(n+\alpha+\beta \neq -1, -2, \ldots).
$$

[10] La première de ces équations se déduit d'une formule analogue à (15) (voir p. e. loc. cit. sous [8], la seconde est due à M. Erdélyi, loc. cit. sous [7], premier article.

Avant de passer plus loin, *indiquons immédiatement une application* de (24). Nous allons montrer que cette relation redonne, à l'aide des fonctions génératrices connues de $L_n^{(\alpha)}(x)$, les résultats (11) et (12). De (24), pour $|t| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta-n)}(x)\, t^n = \frac{(1-t)^{-\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \int_0^{\infty} u^{\alpha+\beta}\, e^{-u \frac{1-t\frac{1+x}{2}}{1-t}}\, du = (1-t)^{\beta} \left(1 - t\,\frac{1+x}{2}\right)^{-\alpha-\beta-1}$$

identique à (11). La formule (12) se démontre de la même façon, en tenant compte de la relation de Hankel[11]

$$(26) \qquad \int_0^{\infty} e^{-u}\, u^{\beta+\frac{\alpha}{2}}\, I_\alpha(2\sqrt{ux})\, du = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\, x^{\frac{\alpha}{2}}\, e^{-x}\, {}_1F_1(-\beta;\, \alpha+1;\, x).$$

Inversement, (26) est une conséquence immédiate de (23)

$$\left(a = \alpha+\beta+1, \quad c = \alpha+1, \quad a = \frac{1}{\varepsilon}, \quad x \sim \varepsilon x, \quad \varepsilon \to 0\right).$$

Si l'on fait

$$\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2},$$

(24) devient une équation entre les polynomes ultrasphériques et de Laguerre:

$$(27) \qquad P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\Gamma(2\lambda)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n} \int_0^{\infty} u^{n+2\lambda-1}\, e^{-u}\, L_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}\left(u\,\frac{1-x}{2}\right) du, \qquad \left(\lambda > -\frac{1}{2}\right)$$

et son inversion analogue à (25). Indiquons un cas particulier simple de cette formule: si $\lambda = \frac{1}{2}$, on aura une relation entre les polynomes de Legendre et les polynomes de Laguerre d'ordre zéro:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} u^n\, e^{-u}\, L_n\left(u\,\frac{1-x}{2}\right) du.$$

[11] Voir p. e. G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge. 1922.

Comme application de (27), cherchons la fonction génératrice des polynomes ultrasphériques. En tenant compte de (12'),

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)} \int_0^{\infty} u^{2\lambda-1} e^{-u} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ut)^n}{\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)} L_n^{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}\left(u\frac{1-x}{2}\right) du =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)} \left(t\frac{1-x}{2}\right)^{-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}} \int_0^{\infty} u^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-u(1-t)} J_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(2u\sqrt{t\frac{1-x}{2}}\right) du.$$

La dernière intégrale peut être calculée à l'aide d'une formule de Sonine[12], et l'on aura

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n^{(\lambda)}(x) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda)} \left(t\frac{1-x}{2}\right)^{-\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}} \left(\frac{t\sqrt{\frac{1-x}{2}}}{1-t}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(2\lambda)}{(1-t)^{\lambda+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \left(1+\frac{2t(1-x)}{(1-t)^2}\right)^{-\lambda} =$$

$$= (1-2tx+t^2)^{-\lambda},$$

conformément à la théorie classique.

On a encore, entre les polynomes ultrasphériques et d'Hermite, la relation analogue à (27), qui intervient déjà chez N. Nielsen:

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{2}{n!\,\Gamma(\lambda)} \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{n+2\lambda-1} H_n(ux)\,du \qquad \left(\lambda \neq 0, \quad \lambda > -\frac{1}{2}\right). \tag{28}$$

La déduction de la fonction génératrice précédente des $P_n^{(\lambda)}(x)$ peut encore se faire, et même d'une façon plus simple, à partir de (28). Pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\lambda \to 0$, on a les cas particuliers intéressants de (28):

$$P_n(x) = \frac{2}{n!\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^n H_n(ux)\,du, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$T_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{n-1} H_n(ux)\,du, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

[12] Voir loc. cit. sous [11].

ou

$$\cos n\theta = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-u^2} u^{n-1} H_n(u\cos\theta)\,du \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

3°. *Développements en séries.* — Rappelons les »formules de multiplication»[13] des polynomes orthogonaux en question:

$$(29) \qquad P_n^{(\alpha,\beta)}[1-\varrho(1-x)] = \sum_{r=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-r} \varrho^r (1-\varrho)^{n-r} P_r^{(\alpha,\beta+n-r)}(x),$$

$$(30) \qquad P_n^{(\lambda)}(\varrho x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(\lambda)_r}{r!} \varrho^n \left(1-\frac{1}{\varrho^2}\right)^r P_{n-2r}^{(\lambda+r)}(x),$$

et, à la limite,

$$(31) \qquad L_n^{(\alpha)}(\varrho x) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-r} \varrho^r (1-\varrho)^{n-r} L_r^{(\alpha)}(x),$$

$$(32) \qquad H_n(\varrho x) = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \varrho^n \left(1-\frac{1}{\varrho^2}\right)^r \frac{n!}{r!} \frac{H_{n-2r}(x)}{(n-2r)!}.$$

Nous pouvons alors déduire, à l'aide de ces formules, les développements des polynomes orthogonaux figurant aux premiers membres des équations intégrales du n°. 2., en séries des polynomes qui interviennent aux seconds membres.

Par (16) et (30), nous tirons

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \frac{(\alpha+1)_n}{(\alpha+\beta+1)_n} \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} v^{2n} \cdot$$
$$\cdot \sum_{r=0}^{n} \frac{(\alpha+\beta+1)_r}{r!} \left(1-\frac{1}{v^2}\right)^r P_{2n-2r}^{(\alpha+\beta+r+1)}\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right) dv$$
$$= (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \frac{(\alpha+1)_n}{(\alpha+\beta+1)_n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(\alpha+\beta+1)_r}{r!} \cdot$$
$$\cdot P_{2n-2r}^{(\alpha+\beta+r+1)}\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right) \int_{-1}^{+1} (1-v^2)^{r+\alpha-\frac{1}{2}} v^{2n-2r}\,dv,$$

[13] Pour les deux premières, voir notre article cité sous [9b], pour (31) et (32), qui sont d'ailleurs connues, nous renvoyons à l'article cité sous [9a].

et enfin

(33) $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) =$

$$= \frac{1}{(\alpha+\beta+1)_n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(2r)!}{2^{2r}\, r!} \frac{(\alpha+\beta+1)_{n-r}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)_{n-r}}{(n-r)!} P_{2r}^{(\alpha+\beta+n-r+1)}\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right).$$

De (19) et (29), il vient

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma\left(\lambda-\alpha-\frac{1}{2}\right)} \frac{(2\lambda)_n}{(\alpha+1)_n} \int_0^1 v^\alpha (1-v)^{\lambda-\alpha-\frac{3}{2}} \cdot \sum_{r=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-r} v^r (1-v)^{n-r} P_r^{(\alpha,\,\beta+n-r)}(x)\, dv$$

$$= \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma\left(\lambda-\alpha-\frac{1}{2}\right)} \frac{(2\lambda)_n}{(\alpha+1)_n} \cdot \sum_{r=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-r} \frac{\Gamma(\alpha+r+1)\,\Gamma\left(n-r+\lambda-\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)} P_r^{(\alpha,\,\beta+n-r)}(x), \qquad \alpha+\beta+1 = 2\lambda,$$

d'où

$$(33') \qquad P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n} \sum_{r=0}^{n} \frac{\left(\lambda-\alpha-\frac{1}{2}\right)_r}{r!} P_{n-r}^{(\alpha,\,2\lambda-\alpha-1+r)}(x), \qquad \left(\lambda > \frac{\alpha}{2} > -\frac{1}{2}\right).$$

Ensuite, par (21) et (31),

$$\frac{1}{x} H_{2n+1}(x) = (-1)^n (2n+1)!\, \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \int_0^1 v^\alpha (1-v)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{r=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-r} v^r (1-v)^{n-r} L_r^{(\alpha)}(x^2)\, dv$$

$$= (-1)^n (2n+1)!\, \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)} \cdot \sum_{r=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-r} \frac{\Gamma(\alpha+r+1)\,\Gamma\left(n-r-\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} L_r^{(\alpha)}(x^2),$$

ou encore

$$(34) \qquad H_{2n+1}(x) = 2^{2n+1}(-1)^n n! \sum_{r=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)_r}{r!} x\, L_{n-r}^{(\alpha)}(x^2) \qquad \left(\alpha < \frac{1}{2}\right).$$

$\Bigl($Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, cette relation se réduit à la seconde des formules de Szegő (10), pour $\alpha = 0$, voir déjà [9 a]$\Bigr)$. Un développement analogue pour les polynomes d'Hermite d'indice pair et pour $\alpha < -\frac{1}{2}$, se trouve dans une Note récente de M. L. Toscano[14], tandisque l'inversion de ce développement, qui peut être déduite par cette même méthode de la formule d'Uspensky (17), se trouve déjà chez E. Kogbetliantz[15].

La transformation de (24), (27) et (28) donne lieu, tenant compte de (31) et (32), aux développements des polynomes de Jacobi et ultrasphériques en série de polynomes de Laguerre d'argument $\frac{1-x}{2}$, et au développement des polynomes ultrasphériques en série de polynomes d'Hermite. Les coefficients de ces séries ne pouvant être exprimés aussi simplement que ceux des développements établis dans ce n°., nous négligerons ici leur calcul direct, qui peut d'ailleurs être effectué sans aucune difficulté.

§ 2. Relations entre les polynomes d'un même système orthogonal.

1°. *Polynomes de Jacobi.* — Reprenons l'équation (15) où nous poserons $a = -n$, $b = n + \alpha + \beta + 1$, $c = \alpha + 1$, et remplaçons γ par $\gamma + 1$. D'après (1), il vient la relation

$$(35) \qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)\,\Gamma(\alpha-\gamma)} \int_0^1 t^\gamma (1-t)^{\alpha-\gamma-1} P_n^{(\gamma,\alpha+\beta-\gamma)}[1-t(1-x)]\,dt$$
$$(\alpha > \gamma).$$

[14] L. Toscano, Relazioni tra i polinomi di Laguerre e di Hermite. Boll. Un. Mat. Ital. (II). t. 2. (1940). p. 460—466.

[15] E. Kogbetliantz, Recherches sur la sommabilité des séries d'Hermite. Annales de l'Éc. Norm. Sup. (3). t. 49. (1932). p. 137—221.

C'est la généralisation de la formule connue de Kogbetliantz, relative aux polynomes de Laguerre et qui se déduit de (35) par le passage à la limite (7). En particulier, si $\gamma=\beta$, nous avons l'équation intégrale intéressante

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)(-1)^n}{\Gamma(n+\beta+1)\,\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^1 t^\beta(1-t)^{\alpha-\beta-1}\,P_n^{(\alpha,\beta)}[t(1-x)-1]\,dt \quad (\alpha>\beta).$$

Or, si nous appliquons au polynome de Jacobi sous le signe d'intégrale la formule de multiplication (30), il vient, après des calculs analogues à ceux du n^0. 3. § 1.,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{(\alpha-\gamma)_r}{r!}P_{n-r}^{(\gamma,\,\alpha+\beta-\gamma+r)}(x) \qquad (\alpha>\gamma). \tag{36}$$

Remarquons que, comme il est naturel, la relation (35) redonne par l'application de (5) ou (6), les relations (16), (18) et (19).

2°. *Polynomes de Laguerre.* — Appliquons à (35) et (36) la relation limite (7). On retrouve les formules de Kogbetliantz[16]

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\gamma+1)\,\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^1 t^\gamma(1-t)^{\alpha-\gamma-1}\,L_n^{(\gamma)}(xt)\,dt \qquad (\alpha>\gamma) \tag{37}$$

et

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{(\alpha-\gamma)_r}{r!}L_{n-r}^{(\gamma)}(x) \qquad (\alpha>\gamma). \tag{38}$$

Une sorte de généralisation de (37) a été donnée dans un travail précédent[17]

$$(39)\quad L_{m+n}^{(\alpha)}(x)=$$

$$=\frac{\Gamma(m+n+\alpha+1)}{\Gamma(m+\gamma+1)\,\Gamma(n-\gamma+\alpha)}\frac{m!\,n!}{(m+n)!}\int_0^1 t^\gamma(1-t)^{\alpha-\gamma-1}\,L_m^{(\gamma)}(xt)\,L_n^{(\alpha-\gamma-1)}[x(1-t)]\,dt \qquad (\alpha>\gamma)$$

qui se réduit à (31) pour $n=0$ (et $m\equiv n$).

[16] l. c. sous [15].

[17] E. Feldheim, l. c. sous [5], partie II, où nous avons donné une relation plus générale pour les polynomes de Laguerre à deux variables. Le résultat particulier (39) peut aussi se déduire du théorème d'addition transcendant des polynomes de Laguerre de M. F. Tricomi (Annales de l'Inst. Henri Poincaré. t. 8 (1938). p. 129).

L'application des formules (10) à (37) et (38) conduit encore à l'équation d'Uspensky (17), et aux relations (21) et (34). Si nous posons $\alpha = 0$, $\gamma = -\frac{1}{2}$, la relation (39) donne lieu à une nouvelle formule intégrale entre les polynomes de Laguerre d'ordre zéro et les polynomes d'Hermite:

$$L_{m+n}(x) = (-1)^{m+n} \frac{m!\, n!}{(2m)!\,(2n)!} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_{2m}(\sqrt{x} \sin\theta)\, H_{2n}(\sqrt{x}\cos\theta)\, d\theta.$$

Insérons ici encore l'équation suivante (généralisation du cas $m = n$ du résultat précédent)

$$x^{2k} L_{2m-2k}^{(4k)}(x) = (-1)^k \frac{(m-k)!\,(m+k)!}{(2m)!\,(2m-2k)!} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} H_{2m}(\sqrt{x}\sin\theta)\, H_{2m}(\sqrt{x}\cos\theta) \cos 4k\theta\, d\theta.$$

3°. *Polynomes ultrasphériques.* — Considérons encore l'équation (15), avec

$$a = -n, \quad b = n + 2\lambda, \quad c = \lambda + \frac{1}{2}, \; \gamma = \frac{1}{2}.$$

Alors, d'après (2) et (6),

$$\frac{n!}{(2\lambda)_n} P_n^{(\lambda)}(1 - 2x) = \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\lambda)} \int_0^1 v^{-\frac{1}{2}} (1 - v)^{\lambda - 1} \cdot (-1)^n \frac{n!}{(2\lambda)_n} P_{2n}^{(2\lambda)}(\sqrt{vx})\, dv,$$

ou encore

$$P_n^{(\lambda)}(x) = (-1)^n \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\lambda)} \int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^{\lambda - 1} P_{2n}^{(2\lambda)}\left(v \sqrt{\frac{1-x}{2}}\right) dv, \qquad (\lambda > 0)$$

et ce n'est autre que le cas particulier de (16) correspondant à $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$. Pour ces mêmes valeurs des paramètres, le développement (33) devient

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{1}{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)_n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r (2\lambda)_{n-r} (\lambda)_{n-r} \frac{(2r)!}{2^{2r}\, r!\,(n-r)!} P_{2r}^{(2\lambda+n-r)}\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right).$$

4°. *Polynomes d'Hermite.* — Ces polynomes ne contenant pas de paramètres, les relations que nous allons considérer lient des polynomes d'Hermite de degrés et d'arguments différents. De tels résultats ont été établis dans nos différents travaux précédents[18]. Ici nous déduirons des relations du n°. 2. § 1. une formule de M. Bailey[19]. D'après (22), pour $v = 0$.

$$H_m(x)\, H_n(x) = 2^m\, n!\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+ix)^2} (iu)^{m-n} L_n^{(m-n)}(2u^2)\, du,$$

tandisque, moyennant la généralisation déjà signalée de la formule d'Uspensky[20], on aura

$$2^{\frac{m-n}{2}} u^{m-n} L_n^{(m-n)}(2u^2) = \frac{(-1)^n m!}{\pi (m+n)!} \int_0^{\pi} H_{m+n}\left(u\sqrt{2} \cos\frac{\varphi}{2}\right) \cos\frac{m-n}{2}\varphi\, d\varphi,$$

de sorte que

$$H_m(x)\, H_n(x) = 2^{\frac{m+n}{2}} \frac{m!\, n!}{(m+n)!} \frac{i^{m+n}}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\frac{m-n}{2}\varphi\, d\varphi \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u+ix)^2} H_{m+n}\left(u\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) du.$$

La dernière intégrale est connue[21], et l'on trouve

$$(40) \quad H_m(x)\, H_n(x) = 2^{\frac{m+n}{2}} \frac{m!\, n!}{(m+n)!} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\frac{m-n}{2}\varphi \cos^{\frac{m+n}{2}}\varphi\, H_{m+n}\left(x\sqrt{1+\sec\varphi}\right) d\varphi.$$

Pour $m = n$, cela se réduit à une relation de M. W. T. Howell[22]; pour $m = 0$, on a une équation intégrale pour les polynomes d'Hermite

$$(40') \qquad H_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\frac{n}{2}\varphi \cos^{\frac{n}{2}}\varphi\, H_n\left(x\sqrt{1+\sec\varphi}\right) d\varphi.$$

---

[18] E. FELDHEIM, l. c. sous [9a]; voir la bibliographie donnée dans la partie II. de ce travail, et, en particulier, L. TOSCANO, Numeri di Stirling generalizzati, etc. Comment. Pontif. Acad. Sc. t. 3. (1939). p. 721—757.

[19] W. N. BAILEY, Journ. London Math. Soc. t. 13. (1938). p. 202—203.

[20] l. c. sous [5], (formule (19)).

[21] C'est, en effet, un cas particulier d'une relation de la théorie des transformations de Gauss. Voir. l. c. sous [9a].

[22] W. T. HOWELL, Philos. Mag. t. (7). 25. (1938). p. 456—458.

Une équation de nature inverse à (40) est la suivante[23]:

$$(41)\qquad H_{m+n}(x) = \frac{1}{\cos^m\theta\cos^n\theta}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} H_m(x\cos\theta + t\sin\theta)\, H_n(x\sin\theta - t\cos\theta)\, dt.$$

Pour $n = 0$, on trouve une équation du même genre, mais plus simple que (40'). Remarquons que (41) est valable aussi pour des valeurs non-entières de m et n.

§ 3. Fonctions génératrices pour produits de polynomes.

Telles sont, par exemple, les formules connues sous le nom de Hille-Hardy (cas des polynomes de Laguerre) et de Mehler (polynomes d'Hermite), ainsi que les formules analogues concernant les polynomes de Jacobi et ultrasphériques[24]. Ici nous allons considérer des relations de nature différente, semblables à celles que nous avons établies pour les polynomes d'Hermite[25]. Reprenons la fonction génératrice (11') des polynomes de Laguerre, qui donne

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} L_m^{(\alpha-m)}(x)\, L_n^{(\alpha-n)}(x)\, u^m v^n = e^{-(u+v)x}\left[(1+u)(1+v)\right]^{\alpha}.$$

Or, si $\left|\dfrac{uv}{1+u+v}\right| < 1$

$$(1+u)^{\alpha}(1+v)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} u^k v^k (1+u+v)^{\alpha-k},$$

donc

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} L_m^{(\alpha-m)}(x)\, L_n^{(\alpha-n)}(x)\, u^m v^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k} u^k v^k \cdot \sum_{r=0}^{\infty} L_r^{(\alpha-k-r)}(x)\,(u+v)^r =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\binom{r}{s} L_r^{(\alpha-k-r)}(x)\, u^{k+s} v^{r+k-s}.$$

---

[23] Voir les travaux cités sous [9].

[24] Voir l. c. sous [1] et [9], et encore G. N. Watson, Journ. Lond. Math. Soc. t. 8. (1933), p. 189—192, 194—199, 289—292; t. 9. (1934), p. 22—28.

[25] Voir l'article cité sous [9a], formules (27) èt (27').

En prenant $k + s = m$, $r + k - s = n$, il vient la première des relations que nous avons voulu établir:

$$(42) \qquad L_m^{(\alpha+n)}(x)\, L_n^{(\alpha+m)}(x) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \binom{m+n+\alpha}{k} \binom{m+n-2k}{m-k} L_{m+n-k}^{(\alpha+k)}(x),$$

et, pour $m = n$,

$$(42') \qquad \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{2k}{k} L_{2k}^{(\alpha-k)}(x).$$

L'inversion de (42) se trouve d'une façon analogue, et est la suivante:

$$(43) \qquad \binom{m+n}{m} L_{m+n}^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} (-1)^k \binom{m+n+\alpha}{k} L_{m-k}^{(\alpha+n)}(x)\, L_{n-k}^{(\alpha+m)}(x),$$

qui se réduit, pour $m = n$, à l'inversion de (42'):

$$(43') \qquad L_{2n}^{(\alpha-n)}(x) = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \{L_k^{(\alpha)}(x)\}^2.$$

La possibilité des relations (42') et (43') a été déjà indiquée (dans notre travail cité sous [9a]), sans donner explicitement les coefficients.

Ces formules peuvent être généralisées pour les polynomes de Jacobi. Les résultats correspondants sont

$$P_m^{(\alpha,\beta+n)}(x)\, P_n^{(\alpha,\beta+m)}(x) = \frac{(\alpha+1)_m (\alpha+1)_n}{(\alpha+1)_{m+n}} \cdot$$

$$\sum_{k=0}^{\min(m,n)} \binom{m+n+\beta}{k} \binom{m+n-2k}{m-k} \frac{(m+n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{2k} P_{m+k-2k}^{(\alpha+2k,\beta+k)}(x)$$

et

$$P_{m+n}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{m!\,n!}{(m+n)!} \frac{(\alpha+1)_{m+n}}{(\alpha+1)_m (\alpha+1)_n} \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\min(m,n)} (-1)^k \binom{m+n+\beta}{k} \frac{(\alpha)_k (\alpha+1)_{2k} (m+n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha)_{2k} (m+\alpha+1)_k (n+\alpha+1)_k} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{2k} \cdot$$

$$\cdot P_{m-k}^{(\alpha+2k,\beta+k)}(x)\, P_{n-k}^{(\alpha+2k,\beta+k)}(x)$$

qui se réduisent, par l'application du procédé limite (7') aux résultats (42) et (43), tandisque l'application de (7) conduit à d'autres développements connus des produits de polynomes de Laguerre.[26] Si nous appliquons ensuite, à (42) et (43), le passage à la limite (9), nous en tirons les développements également connus, concernant les polynomes d'Hermite. En effet,

$$\binom{m+n+\frac{\omega^2}{2}}{k} = \frac{1}{k!}\frac{\omega^{2k}}{2^k}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)\right], \quad \text{si} \quad \omega \to \infty,$$

et alors, d'après (42),

$$2^m\, m!\, \omega^{-m} L_m^{\left(\frac{\omega^2}{2}+n\right)}\left(\frac{\omega^2}{2}-\omega x\right) \cdot 2^n\, n!\, \omega^{-n} L_n^{\left(\frac{\omega^2}{2}+m\right)}\left(\frac{\omega^2}{2}-\omega x\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \frac{2^k}{k!}\left[1+O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)\right]\frac{m!\,n!}{(m-k)!\,(n-k)!}\,\cdot$$

$$\cdot\, 2^{m+n-2k}(m+n-2k)!\,\omega^{-m-n+2k} L_{m+n-2k}^{\left(\frac{\omega^2}{2}+k\right)}\left(\frac{\omega^2}{2}-\omega x\right),$$

d'où, moyennant (9), si $\omega \to \infty$,

$$H_m(x)\, H_n(x) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} 2^k\, k!\binom{m}{k}\binom{n}{k} H_{m+n-2k}(x), \tag{44}$$

et l'on trouve, par (43), l'inversion de cette relation[27].

Or, on tire de (42′), avec t suffisamment petit (en remarquant que l'échange de l'ordre des sommations est complètement légitime),

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{2k}{k} L_{2k}^{(\alpha-k)}(x)\, t^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k} L_{2k}^{(\alpha-k)}(x)\cdot\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n-k} t^n.$$

Mais,

$$\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n-k} t^n = t^k\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{-k-\alpha-1}{m} t^m = (1-t)^{-\alpha-1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^k,$$

de sorte que, finalement,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 t^n = (1-t)^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n} L_{2n}^{(\alpha-n)}(x)\left(\frac{t}{1-t}\right)^n. \tag{45}$$

---

[26] L. Toscano, Sul prodotto di due polinomi di Laguerre e di Hermite. Rendic. R. Accad. d'Italia (VII) t. 1. (1940). p. 405—411, et aussi, loc. cit. sous [5], partie II.

[27] Voir les travaux cités sous [9], et [26].

C'est une fonction génératrice des développements inverses (42′) et (43′). En effet, il est évident que (42′) se déduit de (45), et si nous écrivons ce dernier sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} L_{2n}^{(\alpha-n)}(x)\, t^n = (1+t)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 \left(\frac{t}{1+t}\right)^n,$$

l'identification des coefficients de t^n aux deux membres fournira (43′). L'application de (9) redonne la fonction génératrice déjà citée sous[25] des formules (44) (et son inverse), c'est-à-dire

$$(46)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{(n!)^2}\, t^n = e^{2t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n}(x)}{(n!)^2}\, t^n.$$

Une généralisation de (45), analogue à celle que nous avons donné à l'endroit cité pour (46), est la suivante:

$$(47)\quad \sum_{n=k}^{\infty} L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)\, L_{n+k}^{(\alpha-k)}(x)\, t^n = (1-t)^{-\alpha-1} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{2n}{n-k} L_{2n}^{(\alpha-n+k)}(x) \left(\frac{t}{1-t}\right)^n \qquad (|t|<1),$$

où k est un entier non-négatif. Pour $k=0$, (47) se réduit à (45). On peut en tirer les cas particuliers de (42) et (43) relatifs à $m \equiv n-k$, $n \equiv n+k$. On peut encore généraliser (47) pour des polynomes d'arguments différents:

$$(48)\quad \sum_{n=k}^{\infty} L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x)\, L_{n+k}^{(\alpha-k)}(y)\, t^n = (1-t)^{-\alpha-1} \sum_{n=k}^{\infty} L_{n-k,\, n+k}^{(\alpha-n+k)}(x,y) \left(\frac{t}{1-t}\right)^n \qquad (|t|<1),$$

où le polynome figurant au second membre est le polynome de Laguerre à deux variables, étudié par M. A. Erdélyi[28], et nous-mêmes[29]. Nous y avons aussi déterminé directement les développements analogues à (42) et (43) pour arguments différents, pouvant être déduits (au moins dans des cas particuliers) de (48).

Si nous posons $k=0$ et $y=0$, (48) se réduira à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} L_n^{(\alpha)}(x)\, t^n = (1-t)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} L_{2n}^{(\alpha-n)}(x) \left(\frac{t}{1-t}\right)^n \qquad (|t|<1).$$

Par identification des coefficients des puissances égales de t, on en déduit deux formules inverses[30], qui sont d'ailleurs des conséquences de relations du type de Kogbetliantz (38).

[28] A. Erdélyi, Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Wien, t. 146. (1937), p. 431—467.
[29] l. c. sous [5], partie II.
[30] Voir p. e. loc. cit. sous [18] (L. Toscano).

Cherchons la valeur commune des deux sommes infinies figurant dans (45). Tout d'abord, en tenant compte de la formule de Hille-Hardy, et de ce que[31]

$$L_m^{(-k)}(x) = (-x)^k \frac{(m-k)!}{m!} L_{m-k}^{(k)}(x), \qquad k \text{ entier } (1 \leqq k \leqq m),$$

il vient

$$\sum_{n=0}^{\infty} [L_n(x)]^2 t^n = \frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} L_n^{(n)}(x) \left(-\frac{tx}{1-t}\right)^n = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{2tx}{1-t}} I_0\left(\frac{2x\sqrt{t}}{1-t}\right), \quad (|t| < 1)$$

d'où la relation assez intéressante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n^{(n)}(x) = e^{2t} J_0(2\sqrt{t(x-t)}) \qquad (x \neq t).$$

Dans le cas général, nous pouvons exprimer cette somme par une intégrale double

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 t^n = x^{-\alpha} e^{2x} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} J_\alpha(2\sqrt{xy}) J_\alpha(2\sqrt{xz}) I_0(2\sqrt{yzt}) e^{-y-z} (yz)^{\frac{\alpha}{2}} dy\, dz,$$

tandisque, pour (46), on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{(n!)^2} t^n = e^{2t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+ix)^2} J_0(4y\sqrt{t})\, dy.$$

Remarquons ensuite que l'application de la transformation de Hankel aux deux membres de (45) et (47) permet de retrouver certaines équations intégrales concernant les polynomes de Laguerre, par exemple celle qui exprime que la fonction $e^{-x} x^\alpha \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2$ est sa propre $R_{2\alpha}$— transformée.[32]

Remarques ajoutées à la correction des épreuves.

Le présent travail fait partie de nos recherches actuelles sur les polynomes de Jacobi et fonctions hypergéométriques. Un grand nombre de résultats de ce travail se trouvent dans mon Mémoire »*Contributions à la théorie des polynomes de Jacobi I*, 2 (en hongrois, Matem. Fiz. Lapok, vol. 48, 1941, p. 453—504). Les

[31] G. Szegő, loc. cit. sous [1].

[32] G. N. Watson, Journ. Lond. Math. Soc. t. 11. (1936), p. 256. Voir aussi la relation (22 a) de loc. cit. sous [9a].

formules (11)—(15) rentrent dans une fonction génératrice générale des polynomes de Jacobi, établie dans la partie II de ce Mémoire (Ibid., sous presse). En relation de (22) et (41), indiquons que les généralisations annoncées se trouvent dans ma Note »*Alcuni risultati sulle funzioni di Whittaker e del cilindro parabolico*» (Atti R. Accad. Sc. Torino, vol. 76, 1940—41). Concernant (29), (30) et (36), remarquons que les formules de multiplication les plus générales des polynomes de Jacobi, c'est-à-dire le développement de $P_n^{(\alpha,\beta)}[1-\varrho(1-x)]$ en série de $P_r^{(\gamma,\delta)}(x)$, ont été données dans mon travail I. en hongrois. Ces formules générales, par l'application des relations de passage du § 1, donnent ensuite des résultats intéressants pour les autres classes de polynomes considérées ici. Finalement, nous avons donné des généralisations et applications des résultats du § 3 dans la Note »*Sul prodotto di due polinomi di Laguerre*». (Sous presse, Comment. Acad. Pontif.)