ADDITION AU MÉMOIRE
SUR LES SÉRIES DE POLYNOMES ET DE FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

EMILE BOREL
à PARIS.

Pendant que le mémoire précédent était à l'impression, je me suis aperçu que l'hypothèse de la convergence *absolue* des séries de polynomes, sur laquelle sont fondées les démonstrations de la seconde et de la troisième partie, n'est pas indispensable. Je n'ai pas cru cependant devoir refondre le mémoire, car cette hypothèse rend les démonstrations très simples et fait bien voir par suite la véritable origine des propositions que nous avons établies.

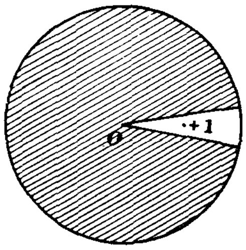
Je me contenterai de montrer, dans le cas le plus simple, comment la démonstration peut être conduite, en supposant simplement la convergence *uniforme*, sans la supposer *absolue;* le lecteur se convaincra sans peine que le même mode de démonstration permettrait d'établir, sous la seule hypothèse de la convergence *uniforme*, toutes les propositions démontrées dans le mémoire précédent, en supposant la convergence absolue et uniforme.

Soit

$$\frac{1}{1-z} = \sum_1^\infty P_n(z)$$

une série de polynomes *uniformément* convergente dans tout domaine fini ne traversant pas la coupure $[+1 \ldots +\infty]$. Nous poserons

$$\sum_1^n P_n(z) = Q_n(z).$$



Soit D_q le domaine, couvert de hachures, limité par le cercle $|z| = 2$ et par les droites

$$\text{arg. de } z = \pm \frac{1}{2q^2}.$$

La série (1) convergeant uniformément dans le domaine D_q on peut trouver un nombre m tel que, quel que soit $n > m$ et z dans D_q, l'on ait

$$\left| \frac{1}{1-z} - Q_n(z) \right| < 1$$

Soit, d'autre part M_q la plus grande des quantités

$$\left| \frac{1}{1-z} - Q_n(z) \right|, \qquad n = 1, 2, \ldots, m$$

lorsque z est quelconque dans D_q (chacune de ces quantités est finie dans D_q). *On aura, dès lors* (en supposant $M_q > 1$), *quel que soit z dans D_q et quel que soit n*

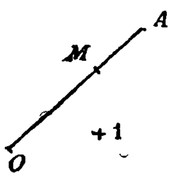
$$\left| \frac{1}{1-z} - Q_n(z) \right| < M_q.$$

Cela posé, prenons:

$$a_q = e^{2q\pi i\sqrt{2}}, \qquad A_q = \frac{e^{-q}}{M_q}$$

et considérons la série

$$F(z) = \sum_1^\infty \frac{A_q}{1 - a_q z}$$



Désignons par D'_q le domaine qui se déduit de D_q en divisant par a_q l'affixe de chacun de ses points et soit OA un rayon de longueur 2 intérieur à tous les D'_q (il existe une infinité de tels rayons, la somme de la série convergente $\sum \frac{1}{q^2}$ étant inférieure à 2π). En un point quelconque M de OA, l'on a, ce point M étant intérieur à D'_q,

$$\left| \frac{1}{1 - a_q z} - Q_n(a_q z) \right| < M_q$$

quel que soit n. Donnons à n une valeur fixe, la série

$$\sum A_q \left| \frac{1}{1 - a_q z} - Q_n(a_q z) \right|$$

est convergente, et il en est de même de la série

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left[\frac{A_q}{1 - a_q z} - A_q Q_n(a_q z) \right].$$

Mais la série

$$\sum \frac{A_q}{1 - a_q z}$$

est évidemment convergente sur OA. Il en est donc de même de la série

$$\sum_{q=1}^{\infty} A_q Q_n(a_q z)$$

dont nous désignerons la somme par

$$G_n(z).$$

$G_n(z)$ est un polynome de même degré que $Q_n(z)$, dont on aurait pu démontrer l'existence d'autres manières.

Nous allons montrer maintenant que $G_n(z)$ tend uniformément sur OA vers $F(z)$, en désignant par $F(z)$ la somme de la série, *uniformément convergente*[1] *sur* OA

$$F(z) = \sum \frac{A_q}{1 - a_q z}.$$

Soit ε un nombre positif arbitraire; déterminons un nombre p tel que l'on ait

$$\sum_{q=p+1}^{\infty} e^{-q} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

[1] On a supposé $A_q = \dfrac{e^{-q}}{M_q}$, $M_q > 1$, les termes de la série $F(z)$ sont donc sur OA, respectivement inférieurs à ceux de la série convergente

$$\Sigma 4q^2 e^{-q}$$

car, à l'intérieur du domaine D'_q, $|1 - a_q z|$ est supérieur à $\dfrac{1}{4q^2}$.

Il en résulte que l'on a, quel que soit le nombre entier n et quel que soit z sur OA

$$\sum_{q=p+1}^{\infty}\left|\frac{A_q}{1-a_q z}-A_q Q_n(a_q z)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

puisque $A_q M_q = e^{-q}$.

Choisissons maintenant le nombre m de telle manière que l'on ait, quel que soit $n > m$ et quel que soit z sur OA

$$\left|\sum_{q=1}^{q=p}\frac{A_q}{1-a_q z}-\sum_{q=1}^{q=p}A_q Q_n(a_q z)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Cela est possible, puis que les $Q_n(a_q z)$ *en nombre limité*, tendent *uniformément* sur OA vers $\frac{1}{1-a_q z}$.

On aura dès lors, quel que soit $n > m$ et quel que soit z sur OA

$$\left|\sum_{q=1}^{\infty}\frac{A_q}{1-a_q z}-\sum_{q=1}^{\infty}A_q Q_n(a_q z)\right|<\varepsilon$$

c'est à dire

$$|F(z)-G_n(z)|<\varepsilon.$$

C. Q. F. D.

Remarques.

1°. La fonction analytique $F(z)$ que nous avons considérée a pour *domaine d'existence* le cercle de rayon 1. La même série de fractions rationnelles définit, au sens de WEIERSTRASS, *une autre* fonction analytique $F_1(z)$ dont le domaine d'existence est la région du plan extérieure au cercle.

2°. Si l'on pose

$$F(z)=\sum_{k=0}^{k=\infty}c_k z_k,$$

$$Q_n(z)=\sum_{k=0}^{k=k_n}c_{nk}z_k,$$

$$G_n(z)=\sum_{k=0}^{k=k_n}\gamma_{nk}z_k,$$

on a évidemment

$$\gamma_{nk} = c_k c_{nk}.$$

3°. La même démonstration s'étendrait, sans modification essentielle aux dérivées de tous ordres d'un développement tel que $f(z)$; en choisissant convenablement les A_q la série de polynomes converge en dehors du domaine d'existence, *ainsi que toutes ses dérivées.*

4°. Avec les valeurs particulières que nous avons prises pour les a_q, on prouverait aisément que toutes les droites issues de 0 et dont l'argument est commensurable avec π, sont des droites de convergence uniforme, à l'intérieur du cercle de rayon 2. Sur les parties de ces droites situées à l'extérieur du cercle de rayon *un*, la somme $G_n(z)$ de la série de polynomes est la fonction analytique $F_1(z)$.

St Paul, par Tournemire, Aveyron, le 4 septembre 1900.