SUR LES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DE LA FORME

$$x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$$

PAR

EDMOND MAILLET

à PALAISEAU.

Nous nous proposons d'établir ici les résultats suivants:

I. Soit λ un nombre 1^{er} non exceptionnel.[1] L'équation indéterminée

$$x^\lambda + y^\lambda = A\lambda^{k\lambda+\beta}z^\lambda$$

($k\lambda + \beta \geqq 1$, $\beta = 0$ ou 1) est impossible en nombres entiers réels x, y, z 1^{ers} entre eux deux à deux et à λ, quand A est réel et égal à 1 ou $r_1^{b_1} \ldots r_i^{b_i}$, $r_1, \ldots, r_i$ étant des nombres premiers différents, différents de λ, et appartenant (mod λ) à des exposants $f_1, \ldots, f_i$ tels que

$$\sum_1^i {}_m \frac{1}{f_m} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}.$$

C'est en particulier le cas quand $A = r_1^{b_1}$, $r_1 \not\equiv 1 \pmod{\lambda}$.

II. L'équation indéterminée

$$x^\lambda + y^\lambda = r_1^{b_1}z^\lambda$$

(λ 1^{er} non exceptionnel, r_1 1^{er}, $b_1 < \lambda$) est impossible en nombres entiers réels:

[1] Nous appelons d'après KUMMER (Journ. de LIOUVILLE, 1851, t. 16 et Abh. der Akad. d. Wissensch., Berlin, an. 1857 et suiv.) nombre 1^{er} non exceptionnel tout nombre 1^{er} $\lambda \geqq 5$ qui ne divise le numérateur d'aucun des $\frac{\lambda - 3}{2}$ premiers nombres de BERNOUILLI. Tout nombre 1^{er} $\geqq 5$ et $\leqq 100$ autre que 37, 59 ou 67 est non exceptionnel.

1°, quand $r_1^{b_1} \equiv -1 + c_1\lambda \pmod{\lambda^2}$, quel que soit λ, c_1 étant un au moins des nombres $1, 2, \ldots, \lambda - 1$, qui dépend de λ;

2°, quand $\lambda = 5, 7$, ou 17 et $r_1^{b_1} \equiv 4 \pmod{\lambda^2}$,

3°, quand $\lambda = 11$ et $r_1^{b_1} \equiv 5$ ou $47 \pmod{\overline{11}^2}$;

4°, quand $\lambda = 13$ et $r_1^{b_1} \equiv 17 \pmod{\overline{13}^2}$.

III. L'équation indéterminée [1]

$$x^7 + y^7 = cz^7$$

est impossible en nombres entiers réels quand c est 1^er^ et d'une des formes $49k \pm 3$, ± 4, ± 5, $+6$, -8, ± 9, ± 10, -15, ± 16, -22, ± 23 ou ± 24.

IV. L'équation indéterminée

$$x^\lambda + y^\lambda = \lambda z^\lambda$$

(λ 1^er^ non exceptionnel) est impossible en nombres entiers.

Les méthodes qui nous ont conduit à ces résultats permettraient d'ailleurs d'obtenir une foule de résultats analogues pour les équations de la forme $x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$, c ayant d'autres valeurs que celles indiquées ci-dessus.

I.

Lemme. Soit λ un nombre 1^er^ non exceptionnel: l'équation

$$(1) \qquad u^\lambda + v^\lambda = E(\alpha)(1-\alpha)^{\mu\lambda - \beta} A w^\lambda \qquad (\mu > 0,\ \beta = 0 \text{ ou } 1)$$

est impossible en nombres entiers complexes u, v, w (u et v n'étant pas idéaux), 1^ers^ entre eux deux à deux et à λ et formés avec une racine $\lambda^{\text{ème}}$ α de l'unité, $E(\alpha)$ étant une unité complexe, et A un nombre entier complexe 1^er^ à λ et égal à 1 ou de la forme $q_1^{a_1} \ldots q_i^{a_i}$, où $q_1, \ldots . q_i$ sont des facteurs 1^ers^ différents, idéaux ou non, avec $i \leqq \lambda - 3$. [2]

---

[1] Le cas où $\lambda = 5$ a été étudié par DIRICHLET (Oeuvres complètes) et LEBESGUE (Journ. de LIOUVILLE, 1843).

[2] KUMMER a établi cette propriété dans le cas particulier où $A = 1$, $\beta = 0$ (Journ. de LIOUVILLE, loc. citat., p. 494). Nous abrégeons la démonstration, qui est une extension de celle donnée par KUMMER pour ce cas particulier.

En effet, on a

$$(2)\qquad u^\lambda + v^\lambda = (u+v)(u+\alpha v)\ldots(u+\alpha^{\lambda-1}v);$$

si l'on a pris

$$u = a + (1-\alpha)^2 Q,$$
$$v = b + (1-\alpha)^2 R,$$

(a, b entiers non complexes, Q, R entiers complexes), ce qui est toujours possible, on a

$$(3)\qquad u + v \equiv 0 \mod (1-\alpha)^2;$$

$u+\alpha^r v$ et $u+\alpha^n v$ $(r \neq n)$ ont pour plus grand commun diviseur $(1-\alpha)$; dès lors parmi les facteurs du 2ème membre de (2) on en a deux au moins $u+\alpha^r v$, $u+\alpha^s v$, $(r>0, s>0, r\neq s)$ qui ne sont divisibles par aucun des nombres $q_1, q_2, \ldots, q_i$ et tels que

$$(4)\qquad \begin{cases} u+\alpha^r v = (1-\alpha)e_r(\alpha)t_r^\lambda(\alpha), \\ u+\alpha^s v = (1-\alpha)e_s(\alpha)t_s^\lambda(\alpha), \end{cases}$$

$e_r(\alpha)$, $e_s(\alpha)$ étant des unités complexes, $t_r^\lambda(\alpha)$, $t_s^\lambda(\alpha)$ des puissances $\lambda^{\text{èmes}}$ exactes non idéales; par suite $t_r(\alpha)$, $t_s(\alpha)$ sont des nombres complexes véritables (wirklich);[1] ils sont premiers entre eux. On en conclut

$$(5)\qquad u+v = (1-\alpha)^{\mu\lambda-\lambda+1-\beta}E'(\alpha)A_1 w_1(\alpha)^\lambda,$$

où $E'(\alpha)$ est une unité complexe, $A_1 w_1(\alpha)^\lambda$ est un nombre complexe véritable: t_r, t_s et w_1 sont premiers entre eux deux à deux, et premiers à λ.

D'abord, d'après (3) et (4), (1) est impossible quand $\mu\lambda < \lambda + 1$, c'est à dire, quand $\mu = 1$: supposons

$$(6)\qquad \mu > 1.$$

(4) et (5) donnent

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha^r & e_r t_r^\lambda \\ 1 & \alpha^s & e_s t_s^\lambda \\ 1 & 1 & (1-\alpha)^{\mu\lambda-\lambda-\beta}E'A_1 w_1^\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

[1] Nous disons que le nombre $f(\alpha)$ est existant ou véritable quand il existe un nombre complexe véritable ayant les mêmes facteurs 1ers idéaux que $f(\alpha)$ avec le même degré de multiplicité.

ou

$$(7) \qquad t_r^\lambda - \varepsilon t_s^\lambda = E_1(\alpha) A_1 (1 - \alpha)^{\mu\lambda - \lambda - \beta} w_1^\lambda,$$

en posan

$$\varepsilon = \frac{e_s(1 - \alpha^r)}{e_r(1 - \alpha^s)},$$

$$E_1 = \frac{E'(\alpha^r - \alpha^s)}{e_r(1 - \alpha^s)}.$$

ε et E_1 sont des unités complexes. D'après (6) et (7)

$$t_r^\lambda - \varepsilon t_s^\lambda \equiv 0 \pmod{\lambda},$$

puisque $\lambda = \varepsilon_1 (1 - \alpha)^{\lambda - 1}$, ε_1 étant une unité complexe; t_r et t_s étant des entiers complexes véritables, on a

$$t_r^\lambda \equiv c, \qquad t_s^\lambda \equiv c' \pmod{\lambda},$$

c et c' étant des entiers réels, et

$$c - \varepsilon c' \equiv 0 \pmod{\lambda}:$$

ε est donc la puissance $\lambda^{\text{ème}}$ d'une unité complexe ε'; posant

$$t_r = u_1, \qquad -\varepsilon' t_s = v_1,$$

(7) devient

$$(8) \qquad u_1^\lambda + v_1^\lambda = E_1 A_1 (1 - \alpha)^{\mu\lambda - \lambda - \beta} w_1^\lambda,$$

équation qui est une conséquence de (1). Cette équation est de la même forme que (1), et l'on peut raisonner sur elle comme on l'a fait sur (1): elle est impossible si $\mu - 1 = 1$; si $\mu - 1 > 1$, on est conduit à une nouvelle équation de la forme (8), où $1 - \alpha$ a pour exposant $\mu\lambda - 2\lambda - \beta$, et ainsi de suite. On sera donc toujours finalement conduit à une impossibilité, car, après la $(\mu - 1)^{\text{ème}}$ opération, on obtient une équation où l'exposant de $1 - \alpha$ est $\lambda - \beta$, équation impossible d'après ce qu'on a vu.

c. q. f. d.

Théorème I. Soit λ un nombre 1^{er} non exceptionnel. L'équation indéterminée

$$(9) \qquad x^\lambda + y^\lambda = A \lambda^{t\lambda + \beta} z^\lambda,$$

($k\lambda + \beta \geqq 1$, $\beta = 0$ ou 1) est impossible en nombres entiers réels x, y, z 1[ers] entre eux deux à deux et à λ, quand A est réel et égal à 1 ou $r_1^{b_1} \ldots r_i^{b_i}$, $r_1, \ldots, r_i$ étant des nombres premiers différents, différents de λ, et appartenant (mod λ) à des exposants $f_1, \ldots, f_i$ tels que

$$\sum_1^i {}_m \frac{1}{f_m} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}. \tag{10}$$

En effet, r_m possède $\dfrac{\lambda - 1}{f_m}$ facteurs premiers, idéaux ou non.[1] D'après (10), les conditions supposées dans l'énoncé du lemme précédent sont réalisées: A a au plus $\lambda - 3$ facteurs premiers différents, et, d'après

$$(k\lambda + \beta)(\lambda - 1) \equiv -\beta \pmod{\lambda},$$

(9) est de la forme (1). Le théorème I est alors une conséquence du lemme précédent.

Corollaire. Tout étant posé comme ci-dessus, l'équation (9) n'est possible quand $A = r_1^{b_1}$ (r_1 1[er] à λ et 1[er]) que si r_1 est $\equiv 1 \pmod{\lambda}$.

En effet, faisant $i = 1$, r_1 appartient (mod λ) à l'exposant f_1, c'est à dire[2] que $r_1^{f_1}$ est la plus petite puissance de r_1, qui soit $\equiv 1 \pmod{\lambda}$. Pour que le théorème soit applicable, il suffit qu'on ait

$$\frac{1}{f_1} \leqq \frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}. \tag{3}$$

Quand $f_1 = 1$, $r_1 \equiv 1 \pmod{\lambda}$, cette condition n'a pas lieu; mais elle est satisfaite quand $f_1 \geqq 2$, puisque $\lambda \geqq 5$, car alors elle a lieu si

$$\lambda - 1 \leqq 2\lambda - 6, \quad \text{ou} \quad 5 \leqq \lambda.$$

II.

Le théorème précédent permet de démontrer *complètement*, ce qu'on n'avait pu faire, croyons-nous, jusqu'ici, l'impossibilité d'une foule d'équa-

---

[1] Kummer, Journ. de Liouville, t. 16, p. 431 et suiv.

[2] Voir par ex. Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 1879, p. 63, ou Serret, Alg. Sup., t. 2, 1885, p. 48.

tions indéterminées en nombres entiers de la forme $x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$, pour λ non exceptionnel et ≤ 100; absolument comme les méthodes de KUMMER seules ont permis jusqu'ici de démontrer *complètement* l'impossibilité de $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ pour $\lambda \leqq 100$ et > 7.[1]

Considérons le cas où $c = r_1^{b_1}$, et soit l'équation indéterminée en nombres entiers

$$x^\lambda + y^\lambda = r_1^{b_1} z^\lambda. \tag{12}$$

Si l'on a x, y, z 1ers entre eux deux à deux, nous distinguerons les trois cas suivants:

1°, $z \equiv 0 \pmod{\lambda}$; 2°, x ou y, x par exemple $\equiv 0 \pmod{\lambda}$; 3°, x, y, z 1ers à λ.

Je dis que, quand on suppose x, y, z non 1ers entre eux deux à deux on peut ramener l'équation en question à une équation analogue comprise dans l'un des trois cas précédents.

En effet, si x, y, z ont un facteur commun p, on pourra supprimer dans (12) le facteur p^λ commun aux deux membres. Si non, si x et y ont un facteur 1er commun p, ou bien on aura $p \neq r_1$, et p diviserait z, ce qu'on ne suppose pas, ou bien $p = r_1$; si la plus haute puissance de r_1 qui divise à la fois x et y est r_1^{ϖ}, $r_1^{b_1} z^\lambda$ est divisible par $r_1^{\varpi\lambda}$, et, puisque z est 1er à r_1, $\varpi\lambda \leqq b_1$; l'équation (12) se ramène à

$$\left(\frac{x}{r_1^{\varpi}}\right)^\lambda + \left(\frac{y}{r_1^{\varpi}}\right)^\lambda = r^{b_1 - \varpi\lambda} z^\lambda,$$

où $\frac{x}{r_1^{\varpi}}$ et $\frac{y}{r_1^{\varpi}}$ n'ont plus le facteur commun r_1. Supposons maintenant que x et y n'aient pas de facteur commun: si x ou y, x par exemple, a en commun avec z le facteur 1er p, ce facteur devrait diviser y.

Il en résulte que l'on peut toujours supposer dans (12) x, y, z 1ers entre eux deux à deux, sans quoi (12) se ramène à une équation de la même forme

$$x^\lambda + y^\lambda = r_1^{d_1} z^\lambda, \tag{13}$$

avec $d_1 = b_1 - \theta\lambda$, et où x, y, z sont 1ers entre eux deux à deux.

[1] Toutefois nous rappellerons les résultats indiqués par LEBESQUE (Journ. de LIOUVILLE, t. 5, 1840, p. 184) et LIOUVILLE (id., p. 360) pour les équations indéterminées $x^{2n} + y^{2n} = z^2$, $x^{2n} - y^{2n} = 2z^n$.

Si $b_1 < \lambda$, (13) coïncide avec (12), et, pour montrer que (12) est impossible, il suffit de l'établir quand x, y, z sont 1ers entre eux deux à deux. Supposons $b_1 < \lambda$.

1°, $z \equiv 0 \pmod{\lambda}$.

On appliquera le corollaire du lemme précédent: (12) est impossible si $r_1 \not\equiv 1 \pmod{\lambda}$, pourvu que λ ne soit pas exceptionnel.

2°, $x \equiv 0 \pmod{\lambda}$.

(12) donne

$$y^\lambda \equiv r_1^{b_1} z^\lambda \pmod{\lambda^2}. \tag{14}$$

y et z étant premiers à λ, on peut trouver un nombre $\alpha \neq 0$ et $< \lambda$ tel que $y \equiv \alpha z \pmod{\lambda}$. (14) donnera

$$\alpha^\lambda \equiv r_1^{b_1} \pmod{\lambda^2},$$

$$\alpha \equiv r_1^{b_1} \pmod{\lambda},$$

d'où

$$(r_1^{b_1})^\lambda \equiv r_1^{b_1} \pmod{\lambda^2} \tag{15}$$

Pour vérifier si cette congruence a lieu on pourra évidemment remplacer dans le 1er membre $r_1^{b_1}$ par son plus petit résidu $\pmod{\lambda}$, et l'on se servira d'une table des résidus[1] $\pmod{\lambda^2}$. Donc:

Le 2ème cas n'est possible que si la congruence (15) a lieu.

Le même raisonnement s'applique identiquement à l'équation indéterminée

$$ax^\lambda + by^\lambda = cz^\lambda, \tag{16}$$

où x, y, z sont 1ers entre eux deux à deux, $x \equiv 0 \pmod{\lambda}$, $b \equiv 1 \pmod{\lambda^2}$. Elle n'est possible avec ces hypothèses que si

$$c^\lambda \equiv c \pmod{\lambda^2} \tag{15'}$$

a lieu.

Exemples: si $c \equiv 2$ ou $4 \pmod{\lambda^2}$, on devra avoir $2^\lambda - 2 \equiv 0$ ou $4^\lambda - 4 \equiv 0 \pmod{\lambda^2}$, ce qui est impossible quand $\lambda \leqq 31$; de même quand

[1] Nous en avons donné une pour $\lambda \leqq 31$ et $\lambda = 197$ (Assoc. franç. pour l'avanc. des Sc., Congrès de St Etienne, 1897, Mémoires, p. 166 et suiv).

$\lambda = 11$ et $c \equiv 5$ ou $\equiv 47 \pmod{\overline{11}^2}$; de même quand $\lambda = 13$ et $c \equiv 17 \pmod{\overline{13}^2}$; de même enfin quand $c \equiv -1 \pmod{\lambda}$ avec $c \neq k\lambda^2 - 1$, λ étant quelconque.

3°, x, y, z 1^{ers} à λ.

Nous avons établi[1] le théorème suivant:

Théorème. Pour que l'équation indéterminée

$$ax^{\lambda^t} + by^{\lambda^t} = cz^{\lambda^t} \tag{17}$$

(λ 1^{er}, x, y, z 1^{ers} entre eux 2 à 2 et à λ, a, b, c 1^{ers} entre eux 2 à 2 et à λ) admette un système de solutions, il est nécessaire que la congruence

$$a + b\eta_0^{\lambda^t} \equiv c(\alpha + \beta\eta_0)^{\lambda^t} \pmod{\lambda^{t+1}}, \tag{18}$$

où α, β sont les nombres $< \lambda$ qui satisfont aux congruences

$$a \equiv c\alpha, \qquad b \equiv c\beta \pmod{\lambda},$$

admette une solution $\eta_0 > 0$, $< \lambda$ et telle que $\alpha + \beta\eta_0 \not\equiv 0 \pmod{\lambda}$.

Pour appliquer ceci à (12), on prendra $t = 1$, $a \equiv b \equiv 1 \pmod{\lambda^2}$, $\alpha \equiv \beta \pmod{\lambda}$; (18) donne

$$1 + \eta_0^\lambda \equiv c\alpha^\lambda(1 + \eta_0)^\lambda \pmod{\lambda^2},$$

et par suite

$$c^\lambda(1 + \eta_0^\lambda) \equiv c(1 + \eta_0)^\lambda \pmod{\lambda^2}, \tag{19}$$

qui doit avoir une solution η, avec $0 < \eta_0 < \lambda$ et $\eta_0 \not\equiv -1 \pmod{\lambda}$, quand $c \equiv r_1^{b_1} \pmod{\lambda^2}$, si (17) est alors possible.

On sait que si $c \equiv c_0 + c_1\lambda \pmod{\lambda^2}$ ($c_0 < \lambda$, $c_1 < \lambda$) il y a toujours, pour chaque valeur de c_0 au moins deux valeurs de c_1 telles que (19) n'ait pas de solution. Si $c = r_1^{b_1}$ est tel que c_0 et c_1 soient parmi ces valeurs, (19), $ax^\lambda + by^\lambda = cz^\lambda$, et a fortiori (12) seront impossibles. Prenant en particulier $c_0 = \lambda - 1$ il y a au moins une valeur de c_1 telle que $c_0 + c_1\lambda \neq k\lambda^2 - 1$, et pour laquelle (12) est impossible.[2] On voit de même dans le $3^{ème}$ cas que

---

[1] Assoc. franç., loc. citat., p. 159.

[2] Il y en a même deux au moins, car si l'on se reporte à la p. 162 de la note précitée de l'Assoc. franç., on voit que $c_0 = \lambda - 1$, $c_0 + c_1\lambda = k\lambda^2 - 1$ donnent $\varepsilon = 1$, c'est à dire que la valeur de c_1 correspondante est de celles pour lesquelles

$$c_0^\lambda \equiv \varepsilon(c_0 + c_1\lambda) \pmod{\lambda^2}$$

avec $1 \leqq \varepsilon \leqq \lambda - 2$.

(19) et (12) sont impossibles quand $c \equiv 4 \pmod{\lambda^2}$ avec $\lambda = 5, 7$ ou 17, et quand $\lambda = 11$ avec $c \equiv 5$ ou $47 \pmod{\overline{11}^2}$, ou $\lambda = 13$ avec $c \equiv 17 \pmod{\overline{13}^2}$. On le vérifiera facilement avec une table de résidus $\pmod{\lambda^2}$.

En rapprochant les résultats obtenus nous obtenons les théorèmes suivants:

Théorème II. Soit l'équation indéterminée $ax^\lambda + by^\lambda = cz^\lambda$ (λ 1^er^):

1°. Si $a \equiv b \equiv 1 \pmod{\lambda^2}$, cette équation est impossible en nombres entiers premiers entre eux 2 à 2 et à λ quand $c \equiv -1 + c_1\lambda \pmod{\lambda^2}$ c_1 étant un au moins des nombres $1, 2, \ldots, \lambda - 1$, qui dépend de λ, ou encore quand $c \equiv 4 \pmod{\lambda^2}$ avec $\lambda = 5, 7$ ou 17, quand $\lambda = 11$ avec $c \equiv 5$ ou $47 \pmod{\overline{11}^2}$, ou $\lambda = 13$ avec $c \equiv 17 \pmod{\overline{13}^2}$.

2°. Si $b \equiv 1 \pmod{\lambda^2}$, cette équation est impossible en nombres entiers premiers entre eux 2 à 2 et tels que $x \equiv 0 \pmod{\lambda}$ quand $c \equiv -1 \pmod{\lambda}$, avec $c \neq k\lambda^2 - 1$, quel que soit λ, ou encore quand $c \equiv 2$ ou $4 \pmod{\lambda^2}$ avec $\lambda \leqq 31$, ou encore quand $\lambda = 11$ avec $c \equiv 5$ ou $47 \pmod{\overline{11}^2}$, ou $\lambda = 13$ avec $c \equiv 17 \pmod{\overline{13}^2}$.

Appliquant ceci à (12), et tenant compte du corollaire du lemme I et des remarques faites sur l'équation (12) pour le cas où x, y, z ne seraient pas premiers entre eux 2 à 2, nous obtenons les résultats suivants:

Théorème III. L'équation indéterminée

$$x^\lambda + y^\lambda = r_1^{b_1} z^\lambda$$

(λ 1^er^ non exceptionnel, r_1 1^er^, $b_1 < \lambda$) est impossible en nombres entiers:

1°, quand $r_1^{b_1} \equiv -1 + c_1\lambda \pmod{\lambda^2}$,[1] c_1 étant un au moins des nombres $1, 2, \ldots, \lambda - 1$, qui dépend de λ.

2°, quand $\lambda = 5, 7$, ou 17 et $r_1^{b_1} \equiv 4 \pmod{\lambda^2}$.

3°, quand $\lambda = 11$ et $r_1^{b_1} \equiv 5$ ou $47 \pmod{\overline{11}^2}$.

4°, quand $\lambda = 13$ et $r_1^{b_1} \equiv 17 \pmod{\overline{13}^2}$.

On pourrait évidemment trouver une foule d'autres équations $x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$ impossibles par les mêmes procédés. A titre d'exemple cherchons encore tout ce que ceux-ci peuvent donner quand $\lambda = 7$, et c 1^er^ et 1^er^ à 7.

---

[1] On sait en particulier que si $b_1 = 1$, on a une infinité de valeurs de r_1 satisfaisant à l'énoncé pour chaque valeur de λ. D'après une remarque antérieure, il y a même au moins deux valeurs de c_1 pour lesquelles le théorème est vrai.

Supposant x, y, z 1ers entre eux deux à deux et examinant les trois cas distingués précédemment nous trouvons:

1°, dans le 3ème cas $x^7 + y^7 = cz^7$ est impossible quand c n'est $\equiv$ (mod 49) à aucun des nombres $0, \pm 1, \pm 2, \pm 11, \pm 12, \pm 13, \pm 17, \pm 18, \pm 19$, ou ± 20.

2°, dans le 1er cas $x^7 + y^7 = cz^7$ est impossible quand c est $\not\equiv 1 \pmod 7$.

3°, dans le 2ème cas $x^7 + y^7 = cz^7$ est impossible quand c n'est pas résidu de puissance 7ème (mod 49), c'est-à-dire quand $c \not\equiv 1, -19, -18, 18, 19$ ou -1.

On [1] en conclura:

Théorème IV. L'équation indéterminée $x^7 + y^7 = cz^7$ est impossible en nombres entiers quand c est 1er, 1er à 7, et d'une des formes

$$49k \pm 3, \pm 4, \pm 5, +6, -8, \pm 9, \pm 10, -15, \pm 16, -22,$$
$$\pm 23 \text{ ou } \pm 24.$$

III.

Théorème V. L'équation indéterminée

$$x^\lambda + y^\lambda = \lambda z^\lambda$$

(λ 1er non exceptionnel) est impossible en nombres entiers.

On voit comme antérieurement qu'il suffit de considérer le cas où x, y, z sont 1ers entre eux deux à deux. Alors z seul peut être divisible par $1 - \alpha$. Si $(1 - \alpha)^k$ $(k \geqq 0)$ est la plus haute puissance de $1 - \alpha$ qui divise z, l'équation proposée se ramène à

$$x^\lambda + y^\lambda = \varepsilon(\alpha) z_1^\lambda (1 - \alpha)^{k\lambda + \lambda - 1},$$

où x, y, z_1 sont 1ers entre eux deux à deux et à λ. Elle est impossible d'après un lemme précédent.

Palaiseau, 15 juillet 1899.

[1] Une partie de ces résultats est déjà indiquée dans notre note précitée des Mémoires de l'Assoc. franç.