

$$\text{ÜBER } \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2}$$

UND VERWANDTE INTEGRALE

VON

L. SCHLÄFLI

in BERN.

Im ersten Bande von CAUCHY'S vollständigen Werken findet sich ein *Mémoire sur les intégrales définies* aus dem Jahre 1814, worin p. 442 (g) und p. 488 die erwähnten Integrale behandelt werden. CAUCHY setzt sich, wie er selbst sagt, nur die Berechnung der reellen Componenten der in dieser Abhandlung vorkommenden Integrale vor, und seine Ergebnisse sind meistens richtig, aber nicht immer. Dass der Begriff der *valeur principale* eines Integrales, den CAUCHY aufstellt, nicht statthaft sei, braucht nicht erörtert zu werden; was er so nennt, ist eine Summe von Integralen, die einander nichts angehn. Auch die *intégrale singulière* ist ein bedenklicher Begriff; wo er zum ersten Male erläutert wird, p. 394, geschieht es am Integrale

$$\iint \frac{x^2 - z^2}{(x^2 + z^2)^2} dx dz \quad (0 < x < 1, 0 < z < 1).$$

Niemand ist aber gehalten, dieses Doppelintegral zu verstehen, wenn über dessen Begränzung im Bereiche von $(x = 0, z = 0)$ nichts gesagt wird. Setzt man

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} > 1, \quad x < 1, \quad z < 1$$

als Gränzen, wo α, β positiv, aber beliebig klein sind, so ist $-\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \frac{\pi}{4}$

Werth des Integrales; für $\frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} > 1$ ist er $-\frac{a^2 - \beta^2}{a^2 + \beta^2} \frac{\pi}{4} - \frac{a\beta}{a^2 + \beta^2} \log \frac{\beta}{a}$; wenn endlich das Rechteck $0 < x < a$, $0 < z < \beta$ weggenommen wird, so ist er $\zeta - \frac{\pi}{4}$, wenn $\tan \zeta = \frac{\beta}{a}$, $0 < \zeta < \frac{\pi}{2}$. CAUCHY gibt nur zwei Werthe, $\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$ an.

1. Ich will mit den Beweise eines Hülfsatzes beginnen. Wenn

$$\log x = -\alpha + i\theta, \quad (\alpha > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi), \quad \log t = i\varphi, \quad (0 < \varphi < 2\pi),$$

wo φ alle reellen Werthe zwischen diesen Gränzen durchlaufen soll, und wenn a keine ganze Zahl ist, so ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda - a} = -\frac{2i\pi \cdot x^a}{e^{2i\pi a} - 1} - \frac{1}{e^{2i\pi a} - 1} \int x \frac{t^{a-1} - x^{a-1}}{t - x} dt;$$

man überzeugt sich auf graphischem Wege leicht davon, dass die Summe links noch convergiert, wenn auch $\alpha = 0$ ist, wenn nur θ mit keiner der zwei Gränzen 0 , 2π zusammen fällt. Im Integralausdrucke rechts umschliesst zwar der Weg jetzt noch beide Pole 0 und x ; weil aber die zu integrierende Function im Bereiche von x den Charakter einer ganzen Function von $t - x$ hat, so verschwindet das um x allein geführte Integral, und der Weg darf sogar durch x gehn. Setzt man jetzt

$$x = e^{i\theta}, \quad (0 < \theta < 2\pi), \quad a = ib, \quad b \text{ reell}, \quad t = e^{i\varphi},$$

so kommt

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda i\theta}}{\lambda - ib} = \frac{i\pi}{\sin \pi b} e^{b(\pi - \theta)} + \frac{1}{4 \sin \pi b} \int_0^{2\pi} (e^{b(\pi - \varphi) - \frac{1}{2}i(\varphi - \theta)} - e^{b(\pi - \theta) + \frac{1}{2}i(\varphi - \theta)}) \frac{d\varphi}{\sin \frac{\varphi - \theta}{2}}.$$

Ersetzt man hier b durch $-b$, zieht die so entstandene Gleichung von jener ab und dividiert durch $2i$, so kommt

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{b}{\lambda^2 + b^2} e^{i\lambda\theta} = \pi \frac{\cos b(\pi - \theta)}{\sin \pi b} + \frac{1}{4i \sin \pi b} \int_0^{2\pi} (\cos b(\pi - \varphi) \cdot e^{-\frac{1}{2}i(\varphi - \theta)} - \cos b(\pi - \theta) \cdot e^{\frac{1}{2}i(\varphi - \theta)}) \frac{d\varphi}{\sin \frac{\varphi - \theta}{2}}.$$

Vertauscht man nun θ , φ mit $2\pi - \theta$, $2\pi - \varphi$ und combinirt beide Gleichungen durch Addition und Subtraction, so ergeben sich die zwei Gleichungen

$$(a) \quad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{b}{\lambda^2 + b^2} \cos \lambda \theta = -\frac{1}{2b} + \frac{\pi}{2} \frac{\cos b(\pi - \theta)}{\sin \pi b},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{b}{\lambda^2 + b^2} \sin \lambda \theta = \frac{1}{4 \sin \pi b} \int_0^{2\pi} [\cos b(\pi - \theta) - \cos b(\pi - \varphi)] \cotg \frac{\varphi - \theta}{2} d\varphi.$$

Wenn man in der letzten Gleichung innerhalb der Intervalle $0 < \varphi < \theta$, $\theta < \varphi < 2\pi$ statt φ resp. $\theta - \varphi$, $\theta + \varphi$ schreibt, so wird die rechte Seite zu

$$\frac{1}{4 \sin \pi b} \left\{ \int_0^{\theta} [\cos b(\pi - \theta + \varphi) - \cos b(\pi - \theta)] \cotg \frac{\varphi}{2} d\varphi \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi - \theta} [\cos b(\pi - \theta) - \cos b(\pi - \theta - \varphi)] \cotg \frac{\varphi}{2} d\varphi \right\},$$

durch partielle Integration zu

$$\frac{b}{2 \sin \pi b} \left[- \int_0^{\theta} \sin b(\pi - \theta + \varphi) \cdot \log \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \right. \\ \left. - \int_0^{2\pi - \theta} \sin b(\pi - \theta - \varphi) \cdot \log \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \right].$$

Der zweite Term innerhalb der Klammer zerfällt in $-\int_0^{\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi - \theta}^{2\pi}$; in den zwei letzten Theilen schreibe man $2\pi - \varphi$ statt φ . Dann bekommt man

$$(b) \quad \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{b}{\lambda^2 + b^2} \sin \lambda \theta \\ = b \frac{\sin b\theta}{\sin \pi b} \int_0^{\pi} \cos b\varphi \log \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi - b \int_0^{\theta} \cos b(\theta - \varphi) \log \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

2. Ich bezeichne mit N eine sehr grosse positive Zahl, die bestimmt ist zuletzt unendlich zu werden, und nenne N , iN , $-N$, $-iN$ den Ostpunkt, Nordpunkt, Westpunkt, Südpunkt des Zahlenfeldes. Die Drehungsrichtung, in der diese Punkte jetzt aufgezählt worden sind, heisse *rechtläufig* oder *positiv*, die entgegengesetzte *rüchläufig* oder *negativ*.

Es seien a , b positiv, $\frac{a}{b}$ sei keine ganze Zahl, $A = \int_0^N \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2}$, wenn

x im allgemeinen die positive Axe durchläuft, aber jeder Wurzel der Gleichung $\sin bx = 0$ nach der Südseite hin (also durch eine halbe positive Drehung) in unmittelbarer Nähe ausweicht, und wenn auch $\frac{bN}{\pi}$ keine

ganze Zahl ist. Setzt man $k = \frac{a}{b}$, so wird $A = \int_0^N \frac{\sin kx}{\sin x} \frac{b dx}{b^2 + x^2}$ (Südseite),

wo $\frac{N}{\pi}$ keine ganze Zahl sein soll. Wenn $k > 1$, so kann N nicht im geringsten aus der Realitätslinie entfernt werden; und doch will ich versuchen, A als Function von k aufzufassen. Wenn $k = m + i\mu$, $x = y - iz$, wo m , y , z positiv, μ reell, so ist

$$ikx = mz - \mu y + i(my + \mu z).$$

Wenn $mz - \mu y$ positiv ist, so verlangt die Convergenz des Integrales, dass $(m - 1)z - \mu y$ negativ sei. Dann kann μ nur, wenn $0 < m < 1$, sowohl positiv als negativ sein; aber wenn $m > 1$, muss μ positiv sein,

$\frac{\mu}{m} < \frac{z}{y} < \frac{\mu}{m-1}$. Wenn dagegen $mz - \mu y$ negativ ist, so erfordert die

Convergenz, dass $(m + 1)z - \mu y$ positiv sei, μ ist nothwendig positiv,

$\frac{\mu}{m} > \frac{z}{y} > \frac{\mu}{m+1}$. Wenn also $m > 1$, μ angebbar positiv, so ist $\frac{z}{y}$ zwischen

die zwei kleinen positiven Gränzen $\frac{\mu}{m+1}$, $\frac{\mu}{m-1}$ eingeschlossen; z wird

zugleich mit y unendlich; die Variable x bekommt in der Ostgegend einen solchen Spielraum, dass man k durch negative halbe Drehungen über ganze Zahlen weg fortbewegen kann.

3. Ich will zuerst nur voraussetzen, dass k positiv und keine ganze Zahl sei. Dann schreibe ich

$$A = \int_0^\varepsilon \frac{e^{ikx} - 1}{2i \sin x} \frac{b dx}{b^2 + x^2} + \int_0^\varepsilon \frac{1 - e^{-ikx}}{2i \sin x} \frac{b dx}{b^2 + x^2} \\ + \int_\varepsilon^N \frac{e^{ikx}}{2i \sin x} \frac{b dx}{b^2 + x^2} + \int_\varepsilon^N \frac{e^{-ikx}}{-2i \sin x} \frac{b dx}{b^2 + x^2}$$

= *I* + *II* + *III* + *IV*, wo die positive Zahl ε kleiner sowohl denn π als auch denn b gewählt sei. Beim Terme *III* kann man den Weg in kleine positive Kreise um die Pole $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ und einen einfachen auf der Nordseite der Realitätslinie befindlichen Weg von ε nach N auflösen. Die Summe der Integrale längs der kleinen Kreise heisse *B*; dann ist

$$B = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\pi b}{(\lambda\pi)^2 + b^2} e^{i2\pi\lambda-1}.$$

Es sei *III* = *B* + *III'*. In *III'* kann man das Ende des Weges durch eine positive Vierteldrehung nach iN bringen, in *IV* durch eine negative Vierteldrehung nach $-iN$; diese Wege mögen der lateralen Axe genähert werden ohne die Pole ib und $-ib$ zu überschreiten. In *I* und *III'* setze man $x = it$, in *II* und *IV* dagegen $x = -it$. Dann wird

$$A = B + \int_0^{-i\varepsilon} \frac{e^{-kt} - 1}{2 \operatorname{Im} t} \frac{ib dt}{t^2 - b^2} + \int_0^{i\varepsilon} \frac{1 - e^{-kt}}{2 \operatorname{Im} t} \frac{ib dt}{t^2 - b^2} \\ + \int_{-i\varepsilon}^N \frac{e^{-kt}}{2 \operatorname{Im} t} \frac{ib dt}{t^2 - b^2} \text{ (südlich von } b) + \int_{i\varepsilon}^N \frac{e^{-kt}}{2 \operatorname{Im} t} \frac{ib dt}{t^2 - b^2} \text{ (nördlich von } b).$$

Man kann *I* und *II* zu einem Integrale $\int_{i\varepsilon}^{-i\varepsilon} \frac{e^{-kt} - 1}{2 \operatorname{Im} t} \frac{ib dt}{t^2 - b^2}$ vereinigen,

worin der Weg gerade von $i\varepsilon$ nach $-i\varepsilon$ durch o hindurch führt, dann den Weg durch einen negativen Halbkreis (also östlich von o) ersetzen, und hat endlich

$$I + II = \int_{i\varepsilon}^{-i\varepsilon} \frac{e^{-kt}}{2 \operatorname{Im} t} \frac{ib dt}{t^2 - b^2} \text{ (östlich)} + \int_{-i\varepsilon}^{i\varepsilon} \frac{1}{2 \operatorname{Im} t} \frac{ib dt}{t^2 - b^2} \text{ (pos. Halbkreis)}.$$

Der erste Theil vereinigt sich mit *III'* und *IV* zu einem Integrale

$$\int \frac{e^{-kt}}{2 \operatorname{fin} t} \frac{ib dt}{t^2 - b^2} \text{ (mit rechtläufigem, } b \text{ umschliessenden Wege) } = -\frac{\pi}{2} \frac{e^{-kb}}{\operatorname{fin} b}.$$

Ersetzt man im zweiten Theile t durch $-t$, so bleibt der Integralausdruck derselbe; aber der Weg geht nun auf der Westseite von $i\varepsilon$ nach $-i\varepsilon$ und ergänzt den vorigen Weg zu einem ganzen positiven Kreise um o . Dieser zweite Theil ist also gleich

$$\int \frac{1}{4} \frac{ib}{t^2 - b^2} \frac{dt}{\operatorname{fin} t} \text{ (pos. Kreis um } o) = \frac{\pi}{2b}.$$

Jetzt ist

$$A = B + \frac{\pi}{2b} - \frac{\pi}{2} \frac{e^{-kb}}{\operatorname{fin} b},$$

und es bleibt nur noch übrig, B anders darzustellen.

Wenn $k = 2n - 1 + \alpha$ ($n = 0, 1, 2, \dots, 0 < \alpha < 2$), so ist vermöge der Formeln (a), (b):

$$B = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{b}{\pi} \frac{e^{\lambda i \pi \alpha}}{\lambda^2 + \left(\frac{b}{\pi}\right)^2} = -\frac{\pi}{2b} + \frac{\pi}{2} \frac{\cos(b - b\alpha)}{\operatorname{fin} b} \\ + i \frac{b}{\pi} \left[\frac{\operatorname{fin} b \alpha}{\operatorname{fin} b} \int_0^{\pi} \cos \frac{b\varphi}{\pi} \log \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi - \int_0^{\pi \alpha} \cos \left(b\alpha - \frac{b\varphi}{\pi} \right) \log \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \right].$$

Endlich ergibt sich

$$(1) \int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{\sin x} \frac{b dx}{b^2 + x^2} \text{ (südlich von } \pi, \dots) = \frac{\pi}{2 \operatorname{fin} b} [\cos(b - b\alpha) - e^{-kb}] \\ + i \frac{b}{\pi} \left[\frac{\operatorname{fin} b \alpha}{\operatorname{fin} b} \int_0^{\pi} \cos \frac{b\varphi}{\pi} \log \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi - \int_0^{\pi \alpha} \cos \left(b\alpha - \frac{b\varphi}{\pi} \right) \log \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \right].$$

4. Es ist schon gezeigt worden, dass die durch das Integral A dargestellte Function von k ihre Stetigkeit nicht verliert, wenn man k durch eine halbe negative Drehung um $2n + 1$ wieder in die Realitätslinie bringt, während der Integrationsweg zugleich die nöthige Schwenkung nach Süden macht, und man dann k reell gegen $2n + 3$ hin fortwachsen

lässt. Zur Probe werde noch untersucht, in welche Form die rechte Seite der Gleichung (1) übergeführt wird. Nur

$$-\int_0^{\pi\alpha} \cos\left(b\alpha - \frac{b\varphi}{\pi}\right) \log \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi$$

bereitet einige Schwierigkeit, wenn $\alpha - 2$ in einem kleinen rückläufigen Halbkreise aus einem negativen Werthe in den positiven Werth β übergeht. Die Variable φ muss der Bewegung ihres letzten Werthes (d. i. $\pi\alpha$) folgen und werde nach Überschreitung von 2π mit $2\pi + u$ bezeichnet; dann ist $\log \sin \frac{\varphi}{2}$ in $-i\pi + \log \sin \frac{u}{2}$ übergegangen. Da der Radius des Halbkreises so klein gemacht werden kann als man nur will, und da $\int \log \varphi d\varphi$ zugleich mit ihm verschwindet, so geht das Integral in

$$\begin{aligned} & -\int_0^{2\pi} \cos\left(2b + b\beta - \frac{b\varphi}{\pi}\right) \log \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi - \int_0^{\pi\beta} \cos\left(b\beta - \frac{bu}{\pi}\right) \left(-i\pi + \log \sin \frac{u}{2}\right) du \\ & = -\int_0^{\pi} \left[\cos\left(2b + b\beta - \frac{b\varphi}{\pi}\right) + \cos\left(b\beta + \frac{b\varphi}{\pi}\right) \right] \log \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \\ & \quad + i\frac{\pi^2}{b} \operatorname{fin} b\beta - \int_0^{\pi\beta} \cos\left(b\beta - \frac{b\varphi}{\pi}\right) \log \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \end{aligned}$$

über, wo der erste Term durch

$$-2 \cos(b + b\beta) \int_0^{\pi} \cos\left(b - \frac{b\varphi}{\pi}\right) \log \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi$$

ersetzt werden kann. Die rechte Seite der Gleichung (1) ist nun

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2 \operatorname{fin} b} \left[\cos(b + b\beta) - 2 \operatorname{fin} b \operatorname{fin} b\beta - e^{-\pi b} \right] \\ & + i\frac{b}{\pi} \left[\left(\frac{\operatorname{fin}(2b + b\beta)}{\operatorname{fin} b} - 2 \cos(b + b\beta) \right) \int_0^{\pi} \cos \frac{b\varphi}{\pi} \log \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi \right. \\ & \quad \left. - \int_0^{\pi\beta} \cos\left(b\beta - \frac{b\varphi}{\pi}\right) \log \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \right] \end{aligned}$$

und geht bei weiterer Vereinfachung in die frühere Form über.

5. Man kann deshalb die Berechnung von A zuerst auf das Intervall $-\pi < k < \pi$ beschränken und nachher die gefundene Function von k schrittweise über die Unstetigkeitspunkte $k = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ hinüber führen. Wenn man x durch $-x$ ersetzt, so bekommt man

$$A = \int_{-\pi}^0 \frac{\sin kx}{\sin x} \frac{b dx}{b^2 + x^2} \quad (\text{Nordseite}),$$

durch Addition

$$2A = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin kx}{\sin x} \frac{b dx}{b^2 + x^2}$$

(der Weg liegt in der Westhälfte auf der Nordseite, in der Osthälfte auf der Südseite der Realitätslinie). Längs des ganzen Horizonts ist das Integral null. Man kann daher den Weg schliessen, indem man z. B. die Nordhälfte des Horizonts hinzu nimmt. Dann umgibt der Weg nur die Pole $ib, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ und zwar rechläufig; er zerfällt also in lauter kleine Kreise um diese Pole. Also ist

$$2A = \pi \frac{\operatorname{fin} kb}{\operatorname{fin} b} + 2i\pi b \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda\pi(k-1)}{(\lambda\pi)^2 + b^2},$$

divergiert in $k = -\pi, \pi$. Setzt man $k = -\pi + \alpha$ und gebraucht die Formeln (a) und (b), so hat man

$$(1') \quad A = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{fin} kb}{\operatorname{fin} b} + i \frac{b}{\pi} \left[\frac{\operatorname{fin} b\alpha}{\operatorname{fin} b} \int_0^{\pi} \cos \frac{b\varphi}{\pi} \log \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi - \int_0^{\pi\alpha} \cos \left(b\alpha - \frac{b\varphi}{\pi} \right) \log \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \right].$$

Da $\operatorname{fin} kb = \cos kb - e^{-kb} = \cos(b - b\alpha) - e^{-kb}$, so stimmt diese Gleichung mit (1) überein.

6. Die drei übrigen Formeln (g) p. 442 bei CAUCHY erledigen sich wie folgt

$$1^\circ. \int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{\cos x} \frac{b dx}{b^2 + x^2} \quad (\text{Südseite, } k \text{ positiv, keine ungerade Zahl})$$

$$= \int_0^N \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right)}{\sin x} \frac{2b dx}{(2b)^2 + x^2} - \int_0^N \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right)}{\sin x} \frac{2b dx}{(2b)^2 + x^2},$$

wird, wenn $k = 2n + \alpha$ ($n = 0, 1, 2, \dots; -1 < \alpha < 1$),

$$(2) \quad = \frac{\pi}{2 \cos^2 b} [(-1)^n \sin b\alpha + e^{-kb}]$$

$$+ (-1)^n i \frac{2b}{\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi\alpha} \log \cotg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(b\alpha - \frac{2b\varphi}{\pi} \right) d\varphi \right.$$

$$\left. - \frac{\cos b\alpha}{\cos^2 b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cotg \frac{\varphi}{2} \cos \frac{2b\varphi}{\pi} d\varphi \right].$$

2°. Multipliziert man die Formel (2) mit $b d\alpha$ und integriert von $\alpha = 0$ an, so sieht man, dass die Kenntniss des Integrals

$$\int_0^N \frac{\sin 2nx}{x \cos x} \frac{b^2 dx}{b^2 + x^2} \text{ (Realitätslinie), sei } = C,$$

erfordert wird. Weil

$$\frac{\sin 2nx}{\cos x} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} (-1)^{n-\lambda-1} \cdot 2 \sin(2\lambda + 1)x,$$

$$\int_0^N 2 \frac{\sin(2\lambda + 1)x}{x} \frac{b^2 dx}{b^2 + x^2} = \pi(1 - e^{-(2\lambda+1)b}),$$

so ist

$$C = \pi \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{(-1)^n - e^{-2nb}}{\cos^2 b}.$$

Daher ist

$$(3) \quad \int_0^N \frac{\sin kx}{x \cos x} \frac{b^2 dx}{b^2 + x^2} \text{ (Südseite)} = \pi \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi (-1)^n \cos ba - e^{-kb}}{\cos b} \\ + (-1)^n i \frac{2b}{\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi\alpha} \log \cot g \left(\frac{\pi - \varphi}{4} \right) \cos \left(b\alpha - \frac{2b\varphi}{\pi} \right) d\varphi \right. \\ \left. - \frac{\sin ba}{\cos b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cot g \frac{\varphi}{2} \cos \frac{2b\varphi}{\pi} d\varphi \right]$$

für $k = 2n + \alpha$ ($-1 < \alpha < 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$).

3°. Wenn man die Formel (1), worin $k = 2n - 1 + \alpha$, ($0 < \alpha < 2$, $n = 0, 1, 2, \dots$), mit $\frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \alpha}$ behandelt, so kommt

$$(4) \quad \int_0^N \frac{\cos kx}{\sin x} \frac{x dx}{b^2 + x^2} \text{ (Südseite)} \\ = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-kb} - \sin(b - ba)}{\sin b} - i \log \sin \frac{\pi\alpha}{2} \\ + i \frac{b}{\pi} \left[\frac{\cos ba}{\sin b} \int_0^{\pi} \cos \frac{b\varphi}{\pi} \log \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi - \int_0^{\pi\alpha} \sin \left(b\alpha - \frac{b\varphi}{\pi} \right) \log \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \right].$$

Wenn k einer ungeraden Zahl gleich wird, so wird das Integral links sinnlos.

Die Gleichungen (1), ..., (4) entsprechen den mit (g) bezeichneten p. 442 bei CAUCHY.

Bern, 13 Aug. 1885.