ÜBER DIE KONFORME ABBILDUNG ENDLICH- UND UNENDLICH-VIELFACH ZUSAMMENHÄNGENDER SYMMETRISCHER BEREICHE.

VON

PAUL KOEBE

in JENA.

(JOHANNES THOMAE zu seinem achtzigsten Geburtstage am 11 Dezember 1920 zugeeignet).

In der Abhandlung VI der Serie «Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung»[1] habe ich u. a. die Aufgabe der konformen Abbildung eines symmetrischen mehrfach zusammenhängenden Schlitzbereichs auf einen symmetrischen Kreisbereich mittels eines Iterationsverfahrens behandelt. Die dort gegebene Lösung ist jedoch, was den Konvergenzbeweis anbetrifft, auf den Fall endlichen Zusammenhanges beschränkt. In vorliegendem Artikel (§ 3) wird das erwähnte Iterationsverfahren in einer Form begründet, die diesem Verfahren auch für den Fall unendlich hohen Zusammenhanges Geltung verleiht. Aber auch die umgekehrte Abbildungsaufgabe, bei der der endlich- oder unendlich- vielfach zusammenhängende Kreisbereich als gegeben betrachtet wird und die Abbildung auf einen Schlitzbereich verlangt wird, wird §§ 1 u. 2 ausführlich behandelt, indem gezeigt wird, dass eine unmittelbar aufstellbare unendliche Reihe SCHOTTKY'schen Typus diese Abbildung leistet.[2] Es ist bemerkenswert, dass beide bezeichnete Abbildungsaufgaben, von denen die eine die Umkehrung der andern ist, hier durch eine einfach

[1] Die Abhandlung VI führt den Untertitel »Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche. Uniformisierung hyperelliptischer Kurven (Iterationsmethoden).» Erschienen in Math. Zeitschrift, Bd VII, 1920.

[2] Die Abbildung eines *endlich*-vielfach zusammenhängenden symmetrischen Kreisbereichs auf einen symmetrischen Schlitzbereich wurde zuerst in einem Aufsatze »ein Beitrag zu Poincaré's Theorie der Fuchs'schen Funktionen» (Gött. Nachr., 1886, p. 359) von H. WEBER behandelt. Weber beweist zunächst die Existenz der Abbildungsfunktion z unter Benützung der SCHWARZ'schen potentialtheoretischen Existenzbeweise und zeigt dann, dass die Grössen $\sqrt{\frac{z-a_{2\nu-1}}{z-a_{2\nu}}}$ durch unendliche Produkte darstellbar sind, wenn $a_{2\nu-1}$ und $a_{2\nu}$ die Endpunkte irgend eines der Begrenzungsschlitze dieses Schlitzbereiches sind.

geordnet fortschreitende unendliche Folge elementarer Rechenvorschriften gelöst erscheinen. In diesem Sinne einordnet sich die vorliegende Arbeit den von mir in der oben erwähnten Serie grundsätzlich verfolgten Bestrebungen einer rein funktionentheoretischen Umbildung der Theorie der konformen Abbildung. Dieser Tendenz wird auch der letzte Abschnitt (§ 5) gerecht, worin die Abbildung eines ganz beliebig begrenzten symmetrischen Bereichs B auf einen Schlitzbereich mittelst einer einfach unendlichen Folge reeller »Fundamentaltransformationen« ausgeführt wird (Schmiegungsverfahren), womit dann auch zufolge § 3 eine Abbildung auf einen Kreisbereich gewonnen ist. — Der Inhalt gliedert sich, wie folgt:

§ 1.

Abbildung des m-fach zusammenhängenden Kreisbereichs auf einen Schlitzbereich. (Methode der Reihenbildung.)

1. Wir bezeichnen mit K einen von m getrennten Kreisen begrenzten symmetrischen m-fach zusammenhängenden Bereich in der Ebene der komplexen Veränderlichen ζ. Die Symmetrie des Bereiches bestehe in Bezug auf die Achse des Reellen. Sämtliche m Begrenzungskreise sollen die Achse des Reellen unter rechten Winkeln schneiden. Der unendlich ferne Punkt der ζ-Ebene werde als innerer Punkt des Bereiches angenommen.

Wir stellen uns als erste Aufgabe die, *den Bereich K eineindeutig konform auf einen symmetrischen Schlitzbereich S abzubilden*, der von m getrennten auf der Achse des Reellen einer z-Ebene liegenden Schlitzen begrenzt wird. Bei dieser Abbildung sollen je zwei symmetrischen Punkten der ζ-Ebene symmetrische Punkte der z-Ebene entsprechen; insbesondere also sollen den m in K enthaltenen auf der Achse des Reellen liegenden Strecken ebensolche Strecken entsprechen. Die Abbildungsfunktion $\varphi(\zeta)$ soll ferner längs den Begrenzungskreisen des Bereiches K regulär sein, wie auch in dem ganzen endlichen Innern des Bereiches K. Im Unendlichen soll die Abbildungsfunktion sich gemäss der Formel

$$z = \varphi(\zeta) = \zeta + ((0))$$

verhalten. Es wird also verlangt, dass der unendlich ferne Punkt bei der Abbildung wieder in den unendlich fernen Punkt und zwar in der angegebenen Weise übergeht.

Die Abbildungsfunktion $\varphi(\zeta)$ ist durch die angegebenen Eigenschaften vollständig bestimmt. (*Unitätssatz.*) Wäre nämlich $\psi(\zeta)$ eine zweite Funktion der verlangten Art, so würde

$$w = \varphi(\zeta) - \psi(\zeta) = w(\zeta)$$

eine in K mit Einschluss der Begrenzung reguläre Funktion sein, deren imaginärer Teil an der ganzen Begrenzung den Wert Null hat. Daraus ergibt sich, dass der imaginäre Teil identisch verschwindet. Dann muss sich aber $w(\zeta)$ selbst auf eine Konstante reduzieren zufolge dem Satz, das der reelle bzw. imaginäre Teil einer von einer Konstanten verschiedenen regulären Funktion in beliebiger Nähe einer regulären Stelle algebraisch grössere wie kleinere Werte annimmt.

Da die gesuchte Funktion $\varphi(\zeta)$ auf den Begrenzungskreisen reelle Werte annimmt, können wir sie in bekannter Weise gemäss dem Riemann-Schwarz'schen Spiegelungsprinzip über diese Begrenzungskreise hinaus analytisch fortsetzen. Indem wir eine Spiegelung an einem solchen Begrenzungskreise mit einer Spiegelung an der Achse des Reellen kombinieren, ergibt sich eine reelle lineare Substitution, nämlich diejenige elliptische Substitution der Periode 2, deren Fixpunkte die beiden Schnittpunkte des betreffenden Kreises mit der Achse des Reellen sind. Diese elliptische Substitution ordnet die beiden Hälften des Kreises oberhalb und unterhalb der Achse des Reellen einander in der Weise zu, dass je zwei spiegelbildlich symmetrisch liegende Punkte einander entsprechen. Wir gewinnen so den m Begrenzungskreisen entsprechend m reelle lineare Substitutionen, denen gegenüber die Funktion $\varphi(\zeta)$ ungeändert bleibt. Der Bereich K kann demgemäss als ein Fundamentalbereich derjenigen linearen Substitutionsgruppe Γ aufgefasst werden, die durch unbegrenzt kombinierte Wiederholungen der genannten m erzeugenden Substitutionen entsteht.

Hiermit ist eine Auffassung der Funktion $\varphi(\zeta)$ gewonnen, die auf naturgemässe Weise zu einer die Funktion unmittelbar liefernden unendlichen Partialbruchreihe führt. Wir wollen zu diesem Zwecke die von der identischen Transformation verschiedenen Substitutionen der Gruppe Γ mit

$$\zeta_n = L_n(\zeta)$$

bezeichnen, wobei wir uns den Index n entsprechend den unendlich vielen Substitutionen der Gruppe Γ alle positiven ganzzahligen Werte durchlaufend denken. Dem Punkte $\zeta = \infty$ entspreche der Punkt

$$\omega_n = L_n(\infty).$$

Wegen des automorphen Verhaltens der Funktion $\varphi(\zeta)$ gegenüber den Substitutionen der Gruppe Γ wird das Unendlichwerden der Funktion $\varphi(\zeta_n)$ bei Annäherung der Grösse ζ_n an die Stelle ω_n dadurch gefunden werden können, dass man die Grösse ζ, die das Unendlichwerden der Funktion $\varphi(\zeta)$ im Unendlichen charakterisiert, in Abhängigkeit von ζ_n betrachtet:

$$\zeta = \zeta(\zeta_n) = L_n^{-1}(\zeta_n),$$

wo mit L_n^{-1} die zu L_n inverse Substitution bezeichnet wird. Für uns handelt es sich darum, den Hauptteil dieser Funktion von ζ_n zu bilden. Dieser wird aber für eine gebrochene lineare Substitution immer dadurch gefunden, dass man den Wert der betreffenden linearen Funktion für den Argumentwert ∞ von der Funktion selbst abzieht. Das gibt in unserem Falle

$$L_n^{-1}(\zeta_n) - L_n^{-1}(\infty)$$

als Hauptteil. Für die Partialbruchbildung der Funktion $\varphi(\zeta)$ ist in vorstehenden Ausdrucke ζ_n durch ζ zu ersetzen. Bedenken wir ferner, dass die Gesamtheit der Substitutionen L_n^{-1} der Gruppe Γ mit der Gesamtheit der Substitutionen L_n selber identisch ist, so erhalten wir folgende Partialbruchreihe

$$\zeta + \sum_n (L_n(\zeta) - L_n(\infty))$$

d. i.

$$\zeta + \sum_n (\zeta_n - \omega_n)$$

2. Die so gewonnene Reihe ist nunmehr einer besonderen Untersuchung daraufhin zu unterwerfen, ob sie *konvergiert* und ob die durch sie dargestellte Funktion tatsächlich die gewünschte *Abbildung leistet.*

Was zunächst die Frage der Konvergenz anbetrifft, so kommt deren Prüfung auf die Prüfung der Konvergenz der Reihe

$$\sum_n |\zeta_n - \omega_n|$$

hinaus.

Denken wir uns ζ zunächst im gegebenen Fundamentalbereich K variierend, so variiert ζ_n in einem Bildbereiche desselben, nämlich einem Kreisbereiche K_n, der auch den Punkt ω_n in seinem Innern enthält. Die einzelne Grösse $|\zeta_n - \omega_n|$ ist also kleiner als der Durchmesser des umschliessenden Kreises K_n' von K_n. Nun ist aber die Summe der Umfänge und damit auch die Summe der Durchmesser aller solcher Kreise konvergent,[1] womit die gleichmässige Konvergenz unserer Reihe zunächst bei Beschränkung der Variabilität von ζ auf den Bereich K feststeht. Lässt man ζ die Grenze von K überschreiten und nimmt zu K eine endliche Anzahl aneinander anschliessender Bereiche K_n hinzu, so wird auch in dem so erweiterten Variabilitätsbereich gleichmässige Konvergenz der Reihen bestehen nach Abtrennung derjenigen endlich vielen Glieder der Reihe, die in den jenen Bereichen entsprechenden Punkten ω_n unendlich werden. Denn auch bei dieser erweiterten Variabilität wird die Summe $\sum\limits_n |\zeta_n - \omega_n|$ nach Abtrennung endlich vieler Glieder gleichmässig mit Hilfe der Summe der Durchmesser aller Kreise K_n' abgeschätzt werden können, weil der Uebergang von ζ_n zu ω_n jetzt immer nur die Ueberschreitung einer bestimmten beschränkten Anzahl von Kreisen K_n' erfordert, sodass $|\zeta_n - \omega_n|$ jedenfalls kleiner ist als die Summe der Durchmesser jener überschrittenen Kreislinien. Aus dem topologischen Gesetze der Nebeneinanderlagerung der Bereiche K_n ergibt sich sofort, dass bei dieser Abschätzung der einzelne Kreis K_n' nur eine beschränkte Anzahl von Malen zu Verwendung kommt, wobei die gemeinte Beschränkung der Anzahl eine für alle Werte des Index n gleichmässig gültige ist.

Die aufgestellte Reihe stellt nach Vorstehendem eine in der ganzen Ebene mit Ausnahme der bei Anwendung des gruppentheoretischen Reproduktionsprozesses auf den Fundamentalbereich K freigelassenen unendlich vielen diskreten Punkte der Achse des Reellen meromorphe Funktion dar, die nur in den Punkten ∞ und ω_n unendlich wird und zwar mit den eingeführten Hauptteilen.

Die dargestellte Funktion nimmt offenbar auf der Achse des Reellen nur reelle Werte an, mithin an je zwei spiegelbildlich symmetrischen Punkten zur Achse des Reellen konjugiert komplexe Werte. Wendet man auf ζ eine erzeugende Substitution an, ersetzt also etwa ζ durch ζ_1, so bedeutet dies eine Ersetzung der Grösse ζ_n durch $\zeta_{n'}$ in der Weise, dass $(\zeta_1, \zeta_{n'})$ dieselbe Grössengesamtheit wie (ζ, ζ_n) bedeuten, nämlich ein und dasselbe vollständige System bezüglich der Gruppe Γ äquivalenter Werte. Die einzelnen Terme unserer Reihe werden demgemäss durch neue Terme ersetzt, die abgesehen von additiven Konstanten völlig

[1] Vgl. § 6 der Abhandlung IV der Serie »Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung» in Acta math. Bd. 41, insbes. pag. 327, (1918).

übereinstimmen. Nach der Ersetzung findet nun aber ebenfalls Konvergenz der Reihe statt. Daraus folgt, dass das Resultat der Ersetzung nur eine Aenderung des Funktionswertes um eine additive Konstante sein kann. Diese additive Konstante muss jedoch gleich Null sein, weil sich bei Wiederholung der erzeugenden Substitution als einer elliptischen Substitution der Periode 2 die identische Substitution ergibt.

In spiegelbildlich symmetrischen Punkten eines Begrenzungskreises von K nimmt unsere Reihenfunktion wegen ihrer Realität auf der Achse des Reellen konjugiert komplexe Werte an, wegen der Aequivalenz solcher Punkte vermöge einer erzeugenden elliptischen Substitution nimmt sie andererseits ebenda gleiche Werte an. Das ist nur vereinbar, wenn die auf K angenommenen Werte reell sind.

3. Die Reihenfunktion hat, wie wir sehen, alle Eigenschaften, die wir oben für die Funktion $\varphi(\zeta)$ als charakteristisch nachgewiesen haben. Auch die Normierungsbedingung der Funktion $\varphi(\zeta)$ ist für unsere Reihenfunktion erfüllt, da alle Glieder der Reihe, abgesehen von dem ersten Gliede für $\zeta = \infty$ den Wert Null annehmen. Wir können somit die Reihenfunktion mit $\varphi(\zeta)$ bezeichnen. Zu beweisen bleibt jedoch noch, dass tatsächlich die gewünschte Abbildung durch $\varphi(\zeta)$ geleistet wird. Dieser Beweis gründet sich auf die erwähnten bereits festgestellten Eigenschaften der Funktion $\varphi(\zeta)$.

Man kann die Funktion $\varphi(\zeta)$ an jeder Stelle des Bereichs K nach der Methode der Reihenumkehrung umkehren. Diese Umkehrung kann man vollständig für das ganze Gebiet K mittels einer endlichen Anzahl von Umkehrungsreihen bewirken. Man erkennt hieraus, dass man den Bereich K in endlich viele Parzellen so zerlegen kann, dass diese Parzellen einzeln auf schlichte Gebiete (Bildparzellen) abgebildet werden; dabei kan man u. a. die etwa vorhandenen Nullstellen der Ableitung $\varphi'(\zeta)$ als Parzellenecken einführen. Es zeigt sich nun, wenn man die gefundenen Bildparzellen ihrerseits ordnungsgemäss aneinanderschliesst, dass dann ein Riemann'sches Flächenstück entsteht, das als eineindeutiges Bild von K anzusprechen ist. Dieses Flächenstück wird durch ganz über der Achse des Reellen verlaufende Linien begrenzt, die ausserdem ganz im Endlichen liegen. Daraus ist ohne weiteres klar, dass das betrachtete Flächenstück die Ebene endlichvielblättrig und zwar überall gleich-vielblättrig bedecken muss. Dass die Bedeckung eine einblättrige ist, folgt dann daraus, dass der unendlich ferne Punkt jedenfalls nur einfach bedeckt wird. Nunmehr ist klar, dass die Begrenzung unseres Flächenstückes nur von m von einander getrennt verlaufenden Schlitzen auf der Achse des Reellen gebildet sein kann. Damit ist aber die Abbildungsaufgabe, die wir uns in diesem Paragraphen gestellt haben, vollständig erledigt.

§ 2.

Abbildung des unendlich-vielfach zusammenhängenden Kreisbereiches auf einen Schlitzbereich.

(Methode der Reihenbildung.)

4. Nunmehr werde mit K ein symmetrischer Kreisbereich unendlich hohen Zusammenhanges der ζ-Ebene bezeichnet. Einen solchen denken wir uns durch unendlich viele getrennte die Achse des Reellen senkrecht schneidende Kreise begrenzt, die alle in einem endlichen Bezirke enthalten sind und ausserdem der Bedingung genügen, eine diskrete Gesamtheit zu bilden, womit gemeint ist, dass zwischen je zwei der Begrenzungskreise ein Intervall der Achse des Reellen liegt, das dem Innern des Bereiches K angehört. Die jetzt zu bestimmende Abbildungsfunktion $\varphi(\zeta)$, die den gegebenen symmetrischen Kreisbereich K auf einen Schlitzbereich S abbildet, soll ausserdem im Unendlichen wieder die frühere Normierungsbedingung

$$z = \varphi(\zeta) = \zeta + ((0))$$

erfüllen. Die Regularität der Abbildungsfunktion wird weiter auch auf den Begrenzungskreisen verlangt[1], wobei aber in denjenigen Durchstossungspunkten mit der Achse des Reellen eine Ausnahme zu machen ist, die Häufungspunkte von Begrenzungskreisen sind. Diese Ausnahmepunkte wollen wir als *singuläre Grenzpunkte* bezeichnen. Ganz allgemein mögen als singuläre Grenzpunkte diejenigen Punkte der ζ-Ebene bezeichnet werden, die sich als Häufungspunkte von Begrenzungskreisen des Bereichs K darstellen. Hiernach braucht ein singulärer Grenzpunkt nicht notwenig auf einem Begrenzungskreise zu liegen, er kann vielmehr für sich eine vollständige Begrenzung des Bereiches K darstellen (*accessorische Grenzpunkte*).

Dass für die gestellte allgemeine Abbildungsaufgabe der *Unitätssatz* gilt, ergibt sich durch eine leichte Modifikation der früheren Betrachtung für endlich-vielfach zusammenhängende Bereiche. Leiste etwa $\varphi(\zeta)$ die Abbildung auf einen Schlitzbereich S der z-Ebene, $\psi(\zeta)$ eine Abbildung auf einen Bereich S' einer z'-Ebene, so könnten wir z' als Funktion von z betrachten. Die Differenz

$$z' - z = W(z)$$

wäre eine für $z = \infty$ verschwindende analytische Funktion, deren imaginärer Teil

[1] Siehe hierzu § 4 der vorliegenden Abhandlung.

in einem die Begrenzungsschlitze von S sämtlich enthaltenden schmalen rechtecksförmigen Streifen unter jede Grenze herabsinken müsste, wenn jener Streifen schmaler und schmaler gewählt würde. Daraus aber würde folgen, dass der imaginäre Teil von $W(z)$ im ganzen Aussengebiete des erwähnten Streifens beliebig klein abgeschätzt werden könnte, mithin identisch verschwinden müsste.

5. Es ist nun der Nachweis der tatsächlichen *Existenz* einer Abbildungsfunktion $\varphi(\zeta)$ zu führen. Dazu nehmen wir erneut auf unsere frühere Reihe Bezug und wollen dartun, dass sie *auch im vorliegenden Falle die gewünschte Abbildung leistet.*

Wir fassen dazu den Bereich K in derselben Weise wie früher als einen Fundamentalbereich mit nunmehr unendlich vielen elliptischen Substitutionen der Periode 2 als Erzeugenden auf, und setzen die Reihe an

$$\varphi(\zeta) = \zeta + \sum_n (\zeta_n - \omega_n).$$

Was zunächst die Frage der *absoluten Konvergenz* der Reihe anbetrifft, so können wir jetzt nicht das Argument der Konvergenz der Summe der Umfänge aller Grundkreisbilder K_n' heranziehen; das ist aber auch nicht notwendig. Wir bemerken zunächst, dass bei Ausübung des Spiegelungsprozesses auf den Bereich K auch im vorliegenden Falle eine vollständige Bedeckung der ζ-Ebene mit Ausnahme einer unendlichen Menge diskreter Punkte der Achse des Reellen bewirkt wird. Man übersieht dies sofort, wenn man den Spiegelungsprozess stufenweise in der Weise vornimmt, dass man nach jedem Schritte das ganze bis dahin gewonnene Gebiet an einem seiner Begrenzungskreise spiegelt, wobei dann nach dieser Spiegelung alle neu auftretenden Begrenzungskreise Durchmesser haben, die kleiner sind als der Halbmesser des Spiegelungskreises. Bei der Spiegelung geht nämlich der unendlich ferne Punkt in den Mittelpunkt des Spiegelungskreises über. Man kann es daher offenbar so einrichten, dass man nach einer endlichen Anzahl von Spiegelungen den Bereich so erweitert hat, dass sämtliche nunmehr vorhandene Begrenzungskreise Durchmesser von beliebiger Kleinheit haben. Dadurch wird in der Tat klar, dass obere und untere Halbebene bei dem Spiegelungsprozesse nach und nach vollständig bedeckt wird, und dass auch auf der Achse des Reellen kein noch so klein angenommenes endliches Intervall existieren kann, das nicht durch den Gebietserweiterungsprozess ganz oder teilweise erfasst würde. Das durch den Spiegelungsprozess tatsächlich erfasste Gebiet der ζ-Ebene möge mit $Z^{(\infty)}$ bezeichnet werden, soweit es nur von inneren Punkten gebildet wird.

Zum Nachweis der gleichmässigen und absoluten Konvergenz gehen wir von der offenbaren Tatsache der Konvergenz der Summe der Länge aller Bildintervalle eines beliebigen ganz in $Z^{(\infty)}$ enthaltenen reellen Intervalls s aus, wobei jedoch diejenigen Bildintervalle ausgenommen sind, die den unendlich fernen Punkt der ζ-Ebene enthalten. Von hier aus ergibt sich leicht der Satz, dass die Summe der Umfänge aller Bildkreise eines in $Z^{(\infty)}$ enthaltenen Kreises konvergiert[1], wenn vorkommendenfalls diejenigen Bildkreise ausgenommen werden, die durch den unendlich fernen Punkt der ζ-Ebene hindurchgehen und sich also als Geraden darstellen.

Die gleiche Bemerkung gilt von irgend einem in der ζ-Ebene angenommenen Kreisbogen oder Kreisbogenpolygon und deren vermöge der Substitutionsgruppe Γ sich ergebenden Bildkurven. Nun kann man aber die Punktpaare (ζ_n, ω_n) durch derartige unter einander vermöge der Gruppe Γ äquivalente Kreisbogenpolygone k_n mit einander verbinden, und die Länge eines solchen Kreisbogenpolygons ist immer grösser als die Länge $|\zeta_n - \omega_n|$; womit die gleichmässige und absolute Konvergenz unserer Reihe $\varphi(\zeta)$ dargetan ist.

Die Funktion $\varphi(\zeta)$ bleibt aus demselben Grunde wie früher gegenüber den Substitutionen der Gruppe Γ ungeändert. Sie nimmt auf der Achse des Reellen und auf den Begrenzungskreisen des Bereichs K nur reelle Werte an und ist auf der ganzen Begrenzung von K mit Ausnahme der singulären Grenzpunkte offenbar regulär.

6. Zu zeigen bleibt jedoch noch, dass die Funktion $\varphi(\zeta)$ die verlangte Abbildung auf einen symmetrischen Schlitzbereich S leistet.

Dazu gehen wir von der Auffassung der Gruppe Γ als Grenzfall einer Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden aus. Denken wir uns die unendlich vielen Erzeugenden der Gruppe Γ irgendwie numeriert, so können wir auf Grund dieser Numerierung die Gruppe Γ als Grenze einer Gruppe Γ_ν auffassen, wenn wir mit Γ_ν diejenige Gruppe bezeichnen, die aus den ν ersten Erzeugenden von Γ entspringt. Die unter Beschränkung auf die Gruppe Γ_ν gebildete Reihe

$$\varphi_\nu(\zeta) = \zeta + \sum_{n_\nu} (\zeta_{n_\nu} - \omega_{n_\nu}),$$

in der n_ν nur diejenigen Werte des allgemeinen Index n durchläuft, die Substitutionen der Gruppe Γ_ν entsprechen, ist auch gleichmässig und absolut konvergent. Sie ist ja nur eine Teilreihe der Reihe $\varphi(\zeta)$. Beim Uebergang von ν zu $\nu + 1$ werden der Reihe $\varphi_\nu(\zeta)$ jedesmal unendlich viele Terme der Reihe $\varphi(\zeta)$ hinzugefügt. Man hat daher

$$\varphi(\zeta) = \lim_{\nu \to \infty} \varphi_\nu(\zeta).$$

---

[1] Siehe die Fussnote pag. 267.

Die Reihe $\varphi_\nu(\zeta)$ liefert nach § 1 eine schlichte Abbildung des durch die ν ersten Erzeugenden gekennzeichneten Kreisbereiches $K^{(\nu)}$ auf einen Schlitzbereich S_ν. Daraus folgt, das $\varphi_\nu(\zeta)$ den Bereich K, der ja ein Teilbereich von $K^{(\nu)}$ ist, ebenfalls eineindeutig auf einen schlichten Bereich S'_ν abbildet; und daraus ergibt sich weiter, das $\varphi(\zeta)$ als Grenzfunktion der Funktionenfolge $\varphi_\nu(\zeta)$ ebenfalls eine eineindeutige Abbildung des Bereichs K auf einen schlichten Bereich S leistet. Dass bei dieser Abbildung den Grenzkreisen nach Ausschluss der singulären Grenzpunkte in regulärer Weise Strecken der Achse des Reellen entsprechen müssen, geht bereits aus dem Früheren hervor. Indessen ist hiermit noch nicht dargetan, dass der Bereich S ein Schlitzbereich ist, d. i. ein Bereich, dessen *vollständige* Begrenzung auf der Achse des Reellen enthalten ist.

Um diese Frage zur Entscheidung zu bringen, nehmen wir an, der schlichte Bereich S besitze Begrenzungsteile, die in der oberen z-Halbebene liegen mögen. Es sei z'' ein solcher Grenzpunkt von S. Wir wählen nun in der Nähe von z'' einen Punkt z' im Innern von S und beschreiben um z' als Mittelpunkt einen Kreis k, der den Punkt z'' in seinem Innern enthält. Wir können die Anordnung so treffen, dass die Kreisfläche k ganz der oberen Halbebene angehört. Um z' als Mittelpunkt beschreiben wir nunmehr noch einen zweiten kleineren Kreis k' so, dass die ganze Kreisfläche k' mit Einschluss der Kreislinie k' im Innern von S enthalten ist. Der Fläche k' entspricht vermöge der durch $\varphi(\zeta)$ geleisteten Abbildung ein Bereich $\varkappa'$. Die Umkehrungsfunktion werde mit $\zeta = f(z)$ bezeichnet, entsprechend die Umkehrungsfunktion der Funktion $\varphi_\nu(\zeta)$ mit $f_\nu(z)$. Man bemerkt nun, dass die Umkehrungsfunktionen $f_\nu(z)$ nicht nur in k', sondern sogar in k erklärt sind, und zwar leistet $f_\nu(z)$ eine schlichte Abbildung der Kreisfläche k auf ein Gebiet, das ganz in dem ν-fach zusammenhängenden Kreisbereiche $K^{(\nu)}$ enthalten ist, der den Fundamentalbereich der Gruppe Γ_ν bildet. Wegen der Schlichtheit der durch die Funktionen $f_\nu(z)$ geleisteten Abbildungen und der Normierung dieser Abbildungsfunktionen im Unendlichen ergibt sich, dass die Funktionen $f_\nu(z)$ in k beschränkt sind. Da sie ausserdem in k mit wachsendem ν offenbar gegen $f(z)$ konvergieren als Umkehrungsfunktionen der konvergenten Funktionenfolge der φ (ζ), so ergibt sich nach einem bekannten Konvergenzsatze[1], dass die Folge der $f_\nu(z)$ auch in der ganzen Kreisfläche k gleichmässig konvergiert. Die Grenzfunktion $f(z)$ aber ergibt dann eine Abbildung der Kreisfläche k auf ein schlichtes Gebiet $\varkappa$, das ganz der oberen ζ-Halbebene angehört. Die Umkehrungsfunktion $\varphi(\zeta)$ der Funktion $f(z)$ bildet nun aber $\varkappa$ auf ein durchaus

[1] S. § 6 der Abhandlung 5 der Serie »Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung« in Math. Zeitschrift Bd 2, insbes. pag. 226.

inneres, keinen Begrenzungspunkt von S enthaltendes Teilgebiet von S ab, welches somit von der Fläche k verschieden wäre.

Damit ist ein Widerspruch hergeleitet und somit dargetan, dass die vollständige Begrenzung von S auf der Achse des Reellen enthalten ist.

§ 3.

Das umgekehrte Abbildungsproblem, insbesondere für Bereiche von unendlich hohem Zusammenhang.

(Iterationsverfahren.)

7. Wir gehen nunmehr von einem beliebigen endlich- oder unendlichvielfach zusammenhängenden symmetrischen Schlitzbereich S der z-Ebene aus. Sämtliche Begrenzungschlitze von S sollen auf der Achse des Reellen liegen, der unendlich ferne Punkt dem Innern von S angehören. Jeder einzelne Schlitz hat eine endliche von Null verschiedene Länge. Zwischen je zwei verschiedenen Begrenzungsschlitzen gibt es ein Intervall der Achse des Reellen, das dem Innern von S angehört. Diejenigen Begrenzungspunkte von S, die sich als Häufungspunkte von Begrenzungsschlitzen des Bereichs S darstellen, bezeichnen wir als singuläre Grenzpunkte. Diese können sich als Endpunkte von Schlitzen oder als selbständige Grenzpunkte (accessorische Grenzpunkte) darstellen. Wir fordern die Bestimmung einer Abbildungsfunktion

$$\zeta = f(z),$$

durch deren Vermittlung der *Bereich S in symmetrischer Weise auf einen* (*als unbekannt anzusehenden*) *symmetrischen Kreisbereich K* in der Weise eineindeutig konform abgebildet wird, dass dabei der unendlich ferne Punkt sich selbst entspricht, wobei $\zeta - z$ im Unendlichen verschwinden soll (*Normierungsbedingung*). Die Abbildungsfunktion soll sich auf den Begrenzungsschlitzen von S mit Ausnahme der singulären Grenzpunkte regulär verhalten, eine Bedingung, die für gewöhnliche Schlitzendpunkte, die nämlich nicht singuläre Grenzpunkte sind, dahin zu interpretieren ist, dass die Regularität der Abbildungsfunktion im gewöhnlichen Sinne nach Einführung einer lokalen Wurzeltransformation der z-Ebene bestehen soll.

Dass die hier gestellte Abbildungsaufgabe nicht mehr als eine Lösung zulassen kann (*Unitätssatz*), ergibt sich sofort, wenn man zwei Abbildungen annimmt und die so gesetzte Abbildungsbeziehung der beiden Kreisbereiche auf einander untersucht. Diese Abbildungsbeziehung erweitert sich nach dem

Spiegelungsprinzip sofort zu einer Abbildungsbeziehung der ζ-Ebene auf eine ζ'-Ebene, wobei in der ζ-Ebene und ζ'-Ebene je eine unendliche Gesamtheit diskreter Grenzpunkte auftritt, in denen diese Abbildungsbeziehung auch noch stetig wäre. Man kann jetzt den Unitätsbeweis auf die Feststellung gründen, dass die hiermit gesetzte eineindeutige Abbildungsbeziehung zwischen der oberen ζ-Halbebene und der oberen ζ'-Halbebene nur durch eine reelle lineare Transformation bewirkt werden kann, die sich wegen der Normierung im Unendlichen auf die Identität reduzieren muss. Wir können aber statt dessen den Beweis auf die Betrachtung der Differenz $\zeta' - \zeta$ als Funktion der Grösse ζ gründen. Diese Differenzfunktion verschwindet im Unendlichen. Ihr imaginärer Teil wird ausserdem längs eines die Grenzpunktmannigfaltigkeit in der ζ-Ebene einschliessenden schmalen rechtecksförmigen Streifens gleichmässig unendlich klein, wenn dieser Streifen schmäler und schmäler gewählt wird. Daraus folgt das identische Verschwinden des imaginären und folglich auch des reellen Teils derselben.

8. Nunmehr gehen wir zum *Existenzbeweis* über.

Wir denken uns zu dem Zwecke die unendlich vielen Begrenzungsschlitze des Bereichs S, deren keiner sich auf einen Punkt reduziert, irgendwie numeriert. Wir wenden sodann eine Folge von Elementartransformationen auf S an, deren einzelne die Verwandlung der von einem endlichen Schlitze begrenzten Ebene auf das Aeussere einer mit dem Schlitze konzentrischen Kreislinie bewirkt, wobei auch der Normierungsbedingung im Unendlichen genügt wird. Die Funktion

$$Z + \frac{1}{Z} = z \text{ mit der Umkehrung } z = \frac{1}{2}\left(Z + \sqrt{Z^2 - 4}\right)$$

bildet bekanntlich das Aeussere des Z-Einheitskreises auf die längs des endlichen, die Punkte -2 und $+2$ verbindenden Schlitzes aufgeschnitten zu denkende z-Ebene ab, wobei der unendlich ferne Punkt sich selbst entspricht und $Z - z$ im Unendlichen verschwindet. Geht man von einem beliebigen endlichen Schlitz s auf der Achse des Rellen der z-Ebene aus, so liefert die erwähnte Transformation, umgekehrt genommen und sinngemäss modifiziert, eine Abbildung der durch s begrenzten Ebene auf das Aeussere eines Kreises, dessen Mittelpunkt mit dem Schlitzmittelpunkt zusammenfällt und dessen Durchmesser gleich der halben Länge des Schlitzes ist. Bei dieser Abbildung werden die nicht auf s enthaltenen Punkte der Achse des Reellen näher an den erwähnten Mittelpunkt herangerückt (*Fundamentaltransformation*).

Wir wenden nun die Fundamentaltransformation zunächst auf den ersten Begrenzungsschlitz von S an. Dabei geht S in einem Bereich S'_1 über, der abgesehen von unendlich vielen Schlitzen auch von einem Kreise begrenzt wird. Indem wir S'_1 an dem gefundenen Begrenzungskreise spiegeln, erweitern wir den Bereich S'_1 zu einem nur noch von Schlitzen begrenzten Bereich S_1. Die so neu hinzugekommenen Schlitze sind wieder zu numerieren und ausserdem mit einem Nebenindex 1 zu versehen, der andeuten soll, dass diese Schlitze erst nach der ersten Fundamentaltransformation aufgetreten sind. Jetzt wird die Fundamentaltransformation auf irgend einen Begrenzungsschlitz von S_1 angewandt, wobei S_1 in S'_2 übergeht, welcher Bereich seinerseits durch Spiegelung am gewonnenen Begrenzungskreise zu einem Schlitzbereich S_2 erweitert wird, wobei neu zu numerierende Begrenzungsschlitze auftreten, denen der Nebenindex 2 beizufügen ist.

Das geschilderte Verfahren kann i. inf. fortgesetzt werden. Dabei ist jetzt zwecks Erreichung unseres Hauptzieles nur einer Bedingung zu genügen, nämlich der folgenden: es soll im Laufe des Verfahrens jeder einmal eingeführte Schlitz auch einmal als Transformationslinie für die Fundamentaltransformation verwandt und dadurch zum Fortfall gebracht werden. Dieser Bedingung kann z. B. durch die allgemeine Vorschrift genügt werden, dass immer ein Schlitz als Transformationslinie verwandt werden soll, für den die Summe aus Nummer und Index möglichst klein ist.

Die sämtlichen Begrenzungsschlitze des Bereiches S_n bestimmen ein endliches Intervall σ_n auf der Achse des Reellen, das vom äussersten linken Begrenzungspunkte bis zum äussersten rechten Begrenzungspunkte von S_n reicht. Aus den Vorbemerkungen über die Fundamentaltransformation entnimmt man, dass die Länge des Intervalls σ_n mit zunehmendem Index n immer kleiner wird, wobei jedes folgende Intervall im vorhergehenden enthalten ist. Gleichwohl bleiben die Längen der σ_n, die wir auch mit dem Zeichen σ_n bezeichnen, oberhalb einer angebbaren von Null verschiedenen endlichen Schranke. Das ergibt sich so:

Der Bereich S wird durch die Fundamentaltransformationen sukzessive in Bereiche $S^{(1)} \equiv S'_1, S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots$ übergeführt. Das zu S gehörende Intervall σ enthält reelle Teilintervalle, die zum Innern des Bereichs S gehören. Diesen Intervallen entsprechen bestimmte Intervalle in den Bereichen $S^{(n)}$. Die zusammengesetzte Abbildungsfunktion, die den Bereich S in den Bereich $S^{(n)}$ überführt, werde mit

$$f_n(z) = \zeta_n$$

bezeichnet. Diese Abbildungsfunktion erfüllt im Unendlichen die Normierungsbedingung. Auf sie findet daher unser Verzerrungssatz für unendliche Bereiche Anwendung.[1] Diesem zufolge müssen die einzelnen reellen Teilintervalle je eine

[1] S. § 8 der pag. 272 zitierten Abhandlung.

von der Wahl des Index n unabhängig bestimmbare Mindestlänge haben. Die Längen σ_n sind aber grösser als jede der erwähnten Mindestlängen, sogar grösser als die Summe aller dieser Mindestlängen.

9. Wir hatten oben mit S_n den nach Anwendung von n Fundamentaltransformationen gewonnenen erweiterten Schlitzbereich bezeichnet. Andererseits hatten wir mit $S^{(n)}$ den nach n-maliger Anwendung des Fundamentaltransformation aus S als Bild dieses Bereiches entstandenen neuen Bereich bezeichnet. Wir wollen dementsprechend mit $S_n^{(m)}$ denjenigen Bereich bezeichnen, der aus S_n als eineindeutiges Bild dieses Bereiches nach Anwendung von m weiteren Fundamentaltransformationen entsteht. Die Begrenzung dieses Bereichs weist m oder weniger als m Linien auf, die sich nicht als Schlitze, sondern als einfach geschlossene Linien darstellen. Wir bezeichnen mit $d_n^{(m)}$ die Maximaldistanz, die zwischen den Punkten jener Linien und der Achse des Reellen besteht. Dann wollen wir nunmehr zeigen, dass die Grösse $d_n^{(m)}$ bei frei bleibendem m unendlich klein wird, wenn n über alle Grenzen wächst, d. h. es gibt eine von m unabhängige obere Schranke d_n der Grössen $d_n^{(m)}$, die bei unbegrenzt wachsendem Index n ihrerseits unendlich klein wird.

Um diesen Nachweis zu führen, benötigen wir einige Hilfsbetrachtungen.

10. Es sei B irgend ein den Nullpunkt in seinem Innern enthaltender schlichter einfach zusammenhängender Bereich innerhalb des Einheitskreises einer z-Ebene, dessen Abbildungsmöglichkeit auf das Innere des Einheitskreises einer w-Ebene als bekannt angesehen wird. Nach dem Schwarz'schen Lemma, angewandt auf die Funktion $\frac{z(w)}{w}$, schliessen wir, dass bei dieser Abbildung das Vergrösserungs-Verhältnis $\left|\frac{dw}{dz}\right|_{z=0} > 1$ ist. Durch Verkleinerung der Bildkreisfläche unter Beibehaltung des Nullpunktes kann man zu einer wohl bestimmten Abbildungsfunktion übergehen, bei der das Vergrösserungsverhältnis an der Nullstelle den Wert 1 hat. Der Radius $R_B^{(0)}$ der so definierten Kreisfläche ist dann kleiner als 1 und völlig bestimmt. Wir nennen ihn den *invarianten Radius* des Bereichs B, wobei der Index 0 die besondere Bedeutung des Nullpunktes bei der Abbildung hervorhebt. Das Schwarz'sche Lemma lehrt sofort, dass der invariante Radius sich verkleinert, wenn man von B zu einem Teilbereiche von B übergeht. Es ist ferner aus der Definition sofort zu erkennen, dass der invariante Radius eine unveränderliche Grösse ist gegenüber allen eineindeutigen konformen Transformationen des Bereichs B, bei denen der Punkt 0 fest bleibt und das Vergrösserungsverhältnis der Transformation in 0 den Wert 1 hat.

Die Begriffbestimmung des invarianten Radius wie auch die Bemerkung über Vergrösserung bzw. Verkleinerung desselben erstreckt sich offenbar nicht nur auf Bereiche B innerhalb des Einheitskreises sondern überhaupt auf schlichte einfach zusammenhängende Bereiche B, die den Nullpunkt im Innern enthalten.

Wir kehren jetzt wieder zu der Vorstellung eines Bereiches B zurück, der ganz innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene enthalten ist. Es sei ϱ die Länge des Abstandes des dem Nullpunkte am nächsten liegenden Begrenzungspunktes von B vom Nullpunkte. Der Radius $R_B^{(0)}$ liegt dann, wie schon bemerkt, unterhalb 1, aber auch oberhalb ϱ, wie man sofort erkennt. Darüber hinaus beweisen wir jetzt den Satz.

Satz: Es besteht für alle Bereiche B mit dem Minimalabstande ϱ die Relation:

$$(*) \qquad \varrho \leqq R_B^{(0)} \leqq \frac{\sqrt{\varrho}}{\frac{1}{2}(1+\varrho)} < 1.$$

Zum Beweise wenden wir auf den Bereich B die erste Schmiegungsoperation unseres Schmiegungsverfahrens an, d. h. wir unterwerfen B derjenigen eineindeutigen Abbildung, die den zweiblättrigen Bereiche $|z| \leqq 1$ mit dem Windungspunkte erster Ordnung in einem im Abstande ϱ von Nullpunkte gelegenen Randpunkte von B auf die schlichte Einheitskreisfläche unter Festhaltung des Nullpunktes abbildet. Diese Abbildung setzt sich in einfacher Weise elementar zusammen. Das dabei an der Nullstelle stattfindende Vergrösserungsverhältnis ist

$$(1-\varrho^2)\frac{1}{2\sqrt{\varrho}}\,\frac{1}{1-\sqrt{\varrho}^{\,2}} = \frac{1+\varrho}{2\sqrt{\varrho}}.$$

Hieraus ergibt sich durch Verkleinerung des Bildbereiches im Verhältnis $\frac{2\sqrt{\varrho}}{1+\varrho}$ eine Abbildung des Bereiches B auf einen Bereich B', der ganz im Kreise K' mit dem Radius $\frac{2\sqrt{\varrho}}{1+\varrho}$ enthalten ist. Für diese Abbildung besteht an der Nullstelle das Vergrösserungsverhältnis 1. Weil B' in der erwähnten Kreisfläche K' enthalten ist, findet sich nunmehr, dass der invariante Radius $R_B^{(0)}$, der gleich $R_{B'}^{(0)}$ ist, kleiner als der Radius des Kreises K' ist, womit der behauptete Satz bewiesen ist.

Wir merken noch diejenige Fassung dieses Satzes an, die sich ergibt, wenn man anstelle des Einheitskreises eine beliebige Kreisfläche mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius r treten lässt, innerhalb deren der Bereich B enthalten sein soll, während ϱ die alte Bedeutung behalten möge. Man findet dann

$$(**) \qquad \varrho \leqq R_B^{(0)} < \frac{\sqrt{\varrho\, r}}{\frac{1}{2}(\varrho + r)}\, r.$$

Hierin liegt insbesondere, wenn mit ϱ' die Maximaldistanz der Begrenzung des Bereichs B vom Nullpunkte bezeichnet wird,

$$(***) \qquad \varrho \leqq R_B^{(0)} \leqq \frac{\sqrt{\varrho\,\varrho'}}{\frac{1}{2}(\varrho+\varrho')}\,\varrho'.$$

Nunmehr gehen wir zur Betrachtung von *Aussenbereichen* in der z-Ebene über, d. h. von Bereichen A, die vom ganzen Aeusseren einer im Endlichen liegenden Linie gebildet werden und für die die Möglichkeit der Ausführung ihrer Fundamentalabbildung bekannt ist. Damit ist auch die Möglichkeit der Abbildung eines solchen Bereiches auf das Aeussere eines gewissen endlichen Kreises gegeben, bei der im Unendlichen die Normierungsbedingung, dass $w-z$ im Unendlichen verschwinden soll, erfüllt wird. Diese Abbildung ist offenbar völlig bestimmt. Es wird auf diese Weise jedem solchen Aussenbereiche A ein *invarianter Mittelpunkt*, nämlich der Mittelpunkt des gewonnenen Kreises und ein *invarianter Radius* R_A *(halbe Oeffnungsweite)*, nämlich der Radius des gewonnenen Kreises zugeordnet.

Wir haben für das Folgende unsere Aufmerksamkeit vor allem auf die Oeffnungsweite zu richten. Diese kann auch erklärt werden als Radius desjenigen Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, auf dessen Aeusseres der gegebene Bereich A in der Weise abgebildet werden kann, dass dabei das Unendliche sich selbst entspricht und das Vergrösserungsverhältnis im Unendlichen den Grenzwert 1 besitzt. Die Oeffnungsweite des Aussenbereiches A ist offenbar gegenüber kongruenten Verschiebungen des Bereiches A invariant; bei ähnlichen Abbildungen von A wird die Oeffnungsweite nach Maassgabe des Vergrösserungsverhältnisses jener ähnlichen Abbildung geändert. Man bemerkt ferner sogleich, dass die Oeffnungsweite eines Aussenbereichs A vergrössert wird, wenn man von diesem Bereiche zu einem Teilbereiche desselben übergeht, d. h. zu einem Bereiche, dessen Begrenzungslinie die Begrenzungslinie von A umschliesst. Schliesslich bemerken wir noch, dass die Oeffnungsweite auch als halbe Länge desjenigen Schlitzes erklärt werden kann, den man erhält, wenn man eine Abbildung des Bereiches A auf einen von einem einfachen Schlitze begrenzten Bereich unter Beobachtung der Normierungsbedingung im Unendlichen vornimmt.

Nach diesen Vorbemerkungen mögen nunmehr insbesondere solche Bereiche A betrachtet werden, deren Begrenzungslinien den Einheitskreis der z-Ebene umschliessen. Es möge mit ϱ_A die Länge des Maximalabstandes der Bereichsbegrenzung vom Nullpunkte bezeichnet werden. Dann ergibt sich aus der Formel (*) mittels einer Inversion am Einkeitskreise

$$1 < \frac{\frac{1}{2}(1+\varrho_A)}{\sqrt{\varrho_A}} < R_A < \varrho_A .$$

Aus dieser Formel entnehmen wir den weiterhin wichtigen Satz

Satz: Es sei A ein veränderlich vorgestellter Aussenbereich ausserhalb des Einheitskreises, dessen Begrenzungslinie l den Einheitskreis umschliesst. Der Oeffnungsradius R_A nähere sich unbegrenzt dem Werte 1. Dann muss sich auch die Distanzgrösse ϱ_A dem Werte 1 unbegrenzt nähern, wobei die Annäherung eine gleichmässige ist insofern, als der Annäherungsgrad wesentlich nur durch den Kleinheitsgrad der Grösse $(R_A - 1)$ bestimmt wird, nämlich von der besonderen Begrenzungsform des Bereichs A durchaus unabhängig ist.

Dieser Satz überträgt sich sofort auf einen veränderlichen Bereich A', dessen Begrenzung das Intervall $(-2, \ldots, +2)$ umschliesst, in dem Sinne, dass hier der Annäherung der Invariante $R_{A'}$ an den Wert 1 die gleichmässige Annäherung der Begrenzung von A' an das genannte Intervall entspricht.

11. Die in voriger Nummer entwickelten Resultate wenden wir jetzt auf unsere Bereiche $S_n^{(m)}$ an oder, richtiger gesagt, auf diejenigen einfach zusammenhängenden Aussenbereiche $[S_n^{(m)}]$, die sich aus den Bereichen $S_n^{(m)}$ ergeben, wenn man alle dem Innern dieser Bereiche angehörenden reellen Intervalle zur Begrenzung hinzunimmt; die invariante Oeffnungsweite des einzelnen Bereichs $[S_n^{(m)}]$ ist gleich derjenigen des Bereichs $[S_n]$, d. h. gleich $\frac{\sigma_n}{2}$. Nun bilden die Grössen σ_n eine abnehmende Grössenfolge, die aber, wie wir sahen, oberhalb einer endlichen von Null verschiedenen Schranke bleibt. Der Bereich $[S_n^{(m)}]$ ist ein Teilbereich des Bereichs $[S_{n+m}]$ mit der Oeffnungsweite $\frac{\sigma_{n+m}}{2}$. Da nun der Unterschied $\sigma_{n+m} - \sigma_n$ mit wachsendem n bei freibleibendem m unendlich klein wird, ergibt sich jetzt, dass die Begrenzung des Bereichs $[S_n^{(m)}]$ von dem Intervall σ_{n+m} einen Maximalabstand hat, der mit unbegrenzt wachsendem n bei freibleibendem m unendlich klein wird.

Damit ist die oben (in 9) aufgestellte Behauptung bewiesen.

Es ist somit klar, dass die Grösse

$$\mathfrak{I}(\zeta_{n+m} - \zeta_n) \equiv \frac{1}{i}\,\mathfrak{R}(\zeta_{n+m} - \zeta_n)$$

längs σ_n, mithin im ganzen von der σ_n begrenzten Aussenbereiche σ_n mit unbegrenzt wachsendem n bei freibleibendem m gleichmässig unendlich klein wird.

Fixieren wir jetzt einen Bereich S_ν, so sind die Grössen ζ_n für $n > \nu$ in diesem Bereiche sämtlich erklärt. Die Differenz $\mathfrak{J}(\zeta_{n+m} - \zeta_n)$ ist, sofern man sie als Funktion von ζ_n betrachtet, nicht nur in $S_\nu^{(n-\nu)}$, sondern in dem weiteren Bereiche S_n erklärt. Aus dem Vorstehenden folgt daher das gleichmässige Unendlichkleinwerden der betrachteten Differenzgrösse in S_ν, mithin die gleichmässige Konvergenz der Funktionen $\mathfrak{J}(\zeta_n(\zeta_\nu))$ im ganzen Bereiche S_ν mit Einschluss des Randes. Daraus schliessen wir weiter, dass die Funktion $\zeta_n(\zeta_\nu)$ selber in jedem inneren Teilbereiche von S_ν gleichmässig konvergiert. Die Grenzfunktion

$$\zeta(\zeta_\nu) = \lim_{n \to \infty} \zeta_n(\zeta_\nu)$$

leistet eine Abbildung des Bereiches S_ν auf einen Schlitzbereich Z_ν. Die Begrenzung des Bereichs Z_ν hat von der Achse des Reellen einen Maximalabstand δ_ν von dem jetzt noch zu zeigen ist, dass

$$(*) \quad \lim_{\nu \to \infty} \delta_\nu = 0$$

ist. Dies folgt aber daraus, dass die Grösse ζ_n ein Bild des Bereichs S_ν auf einen Bereich $S_\nu^{(n-\nu)}$ entwirft, dessen Begrenzung von der Achse des Reellen einen Abstand hat, der allein abhängig von ν bei freibleibendem $(n-\nu)$ abgeschätzt werden kann. Diese uns bekannten Abschätzungen liefern die Schranke d_ν, die in der Tat mit wachsendem Index ν unendlich klein wird. Da die Funktion $\mathfrak{J}(\zeta_n(\zeta_\nu))$ im ganzen Bereich S_ν mit Einschluss der Begrenzung gleichmässig gegen die Grenzfunktion $\mathfrak{J}(\zeta(\zeta_\nu))$ konvergiert, so bedeutet dies, dass jene Schranke auch für die Grenzfunktion selbst, die nun längs der erwähnten Begrenzung stetig sein muss, besteht. Schöpft man also den Bereich S_ν mit Näherungsbereichen aus, so wird $\mathfrak{J}(\zeta(\zeta_\nu))$ längs der Begrenzung der Näherungsbereiche Werte annehmen, die gleichmässig unter jede die erwähnte Schranke übersteigend angenommene Grösse herabsinken.

Hiermit ist die aufgestellte Formel (*) vollkommen bewiesen.

Das Ergebnis ist eine Abbildung des Bereiches S auf einen symmetrischen Bereich Z_0, dessen obere und untere Hälfte unbegrenzte allseitige Spiegelungsfähigkeit besitzt so, dass in der oberen und unteren Halbebene bei Ausübung dieses analytischen Spiegelungsprozesses eine vollständige singularitätenfreie Bedeckung der betreffenden Halbebene eintritt. Hieraus schliessen wir nun, dass die den Begrenzungsschlitzen des Bereichs S bei Z_0 entsprechenden Linien der oberen und unteren Halbebene die Eigenschaft besitzen, eine Zerlegung der betreffenden Halbebene in zwei in Bezug auf diese Linien im analytischen Sinne spiegelbildlich symmetrische Hälften zu zerlegen. Dann müssen diese Linien Halbkreise sein, die auf der Achse des Reellen senkrecht stehen. D. h. der Bereich Z_0 ist ein symmetrischer Kreisbereich K.

§ 4.
Bemerkungen betreffend die Ränderzuordnung der auf einander abgebildeten Bereiche.

12. Wir haben die in Vorstehendem behandelten Abbildungsaufgaben bisher dadurch in gewisser Weise begrifflich beschränkt, dass wir von vornherein nur solche Abbildungen verlangten, die auch eine analytische Ränderzuordnung vermitteln, wobei allerdings bei Bereichen unendlich hohen Zusammenhanges die singulären Grenzpunkte eine gewisse Ausnahmestellung einnahmen. Man kann nun die Fragestellung dadurch erweitern, dass man die Abbildungsbeziehung unter Aufrechterhaltung ihrer Symmetrie inbezug auf die Achse des Reellen nur für die inneren Bereichpunkte fordert. Wir wollen jetzt noch zeigen, dass jede Abbildungsfunktion, die dem so erweiterten Problem entspricht, auch das speziellere Problem löst, indem nämlich die analytische Ränderzuordnung immer von selbst eintritt. Auch die soeben noch beibehaltene Forderung der Symmetrie der Abbildung kann fallen gelassen werden, da auch diese sich als eine Folge der übrigen Bedingungen, d. s. insbesondere die Symmetrie der Bereiche K und S und die der Symmetrie angepasste Normierungsbedingung im Unendlichen, herausstellt.

Es werde zunächst die im weiteren Sinne zu verstehende Abbildung zweier symmetrischen Schlitzbereiche S_1 und S_2 auf einander betrachtet. Die Abbildungsfunktion $z_2(z_1)$ genüge im Unendlichen der Normierungsbedingung $z_2 = z_1 + ((0))$. Dann wird der Imaginärteil der Grösse $z_2 - z_1$ eine Funktion von z_1, die im Unendlichen und bei Annäherung an den Rand von S_1 verschwindet, daher im ganzen Bereiche S_1 verschwindet; womit denn auch $z_2 - z_1$ selbst identisch verschwinden muss. Die Abbildungsfunktion $z_2(z_1)$ vermittelt daher die identische Abbildung. Damit ist aber auch der analytische Charakter der Abbildung am Rande evident, desgleichen die Symmetrie der Abbildung.

Hat man nun eine Abbildungsbeziehung im weiteren Sinne zwischen einem symmetrischen Schlitzbereiche und einem symmetrischen Kreisbereiche oder zwischen zwei symmetrischen Kreisbereichen, so kann man zwecks Untersuchung der Abbildungsbeziehung am Rande die Kreisbereiche zunächst in symmetrischer Weise auf symmetrische Schlitzbereiche abbilden, nämlich durch unsere oben betrachtete Reihenfunktion, die zugleich eine analytische Ränderzuordnung vermittelt. Hierdurch wird man wieder auf die Betrachtung der Abbildungsbeziehung von Schlitzbereichen geführt und erkennt durch Rückübertragung das Bestehen analytischer Ränderzuordnung für die ursprünglich betrachtete Abbildungsbeziehung sowie die Symmetrie dieser Abbildung.

Vorstehende Bemerkungen gelten in gleicher Weise für Bereiche endlichen wie unendlich hohen Zusammenhangs.

§ 5.

Abbildung des allgemeinsten beliebig begrenzten symmetrischen Bereichs. (Schmiegungsverfahren.)

13. Es sei nunmehr B ein völlig beliebiger endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängender schlichter symmetrischer Bereich der z-Ebene, der den unendlich fernen Punkt in seinem Innern enthalte. Der Bereich werde als nur von inneren Punkten gebildet vorgestellt. Er kann als Grenze endlich-vielfach zusammenhängender Näherungsbereiche $B^{(\nu)}$ erklärt werden, die ihn nach und nach ausschöpfen. Wir stellen uns die Aufgabe, eine Abbildungsfunktion $F(z)$ zu bestimmen, die den Bereich konform auf einen symmetrischen *Schlitzbereich* S_* abbildet, wobei der unendlich ferne Punkt in der Weise sich selbst entsprechen soll, dass die Funktion $F(z)$ im Unendlichen die Verhaltungsformel

$$F(z) = z + ((0))$$

erfüllt. Bei dieser Aufgabestellung wird es nötig, den Begriff des symmetrischen Schlitzbereiches S_* von vornherein so weit als möglich aufzufassen. Wir verstehen jetzt darunter jeden endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängenden Bereich, dessen vollständige Begrenzung auf der Achse des Reellen enthalten ist. Das einzelne Begrenzungskontinuum eines solchen Bereichs stellt sich entweder als endliche Strecke (*gewöhnlicher Schlitz*) oder als einzelner Punkt (*punktförmiger Schlitz*) dar.

Der *Unitätsbeweis* für die zu lösende Abbildungsaufgabe ist nach früherem Muster sofort zu führen, indem man die Differenz zweier angenommenen Abbildungsfunktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ untersucht und von deren imaginärem Teil zeigt, dass er identisch verschwinden muss.

Zum *Existenzbeweis* verlangen wir die effektive Bildung einer Funktion $F(z)$ mittels einer unendlichen Folge *reeller Fundamentaltransformationen*.

Wir bestimmen diejenigen spiegelbildlich symmetrisch zur Achse des Reellen liegenden Begrenzungspunkte des Bereichs B_1 die von der Achse des Reellen den grössten Abstand haben, und benutzen sie als Verzweigungspunkte der Fundamental-transformation. Der Ausdruck dieser Fundamentaltransformation lautet, wenn $\pm 2i$ die Verzweigungspunkte sind,

$$Z - \frac{1}{Z} = z, \text{ d. i. } z = \frac{1}{2}(Z + \sqrt{Z^2 + 4}) \cdot$$

Durch Anwendung der zuvor erklärten Fundamentaltransformation gehe z in z_1, der Bereich B in einen Bereich B_1 über. Mit dem Bereiche B_1 wird nunmehr in derselben Weise verfahren, wie mit dem Bereiche B. Der Bereich B_1 geht dann in einen Bereich B_2 der z_2-Ebene über und so fort. Es wird behauptet, dass sich auf solche Weise bei unbegrenzter Wiederholung des Verfahrens (*Schmiegungsverfahren*)[1] in der Grenze die gesuchte Abbildungsfunktion in der Gestalt

$$F(z) = \lim_{n=\infty} z_n(z)$$

ergibt.

Der Beweis stützt sich zunächst auf die Bemerkung, dass die Grössen z_n auf Grund ihrer Normierung im Unendlichen infolge eines wiederholt zur Anwendung gelangten *Schränkungssatzes* in jedem endlichen Teilbereiche des Bereichs B *beschränkt* bleiben. Daraus ergibt sich, dass die Begrenzung aller Bereiche B_n in einem endlichen von n unabhängig bestimmbaren Bezirke bleiben. Man kann daher insbesondere eine von n unabhängige positiv reelle Grösse $\varDelta$ bestimmen, unterhalb der die absoluten Beträge der reellen Koordinaten der Begrenzungspunkte aller Bereiche B_n bleiben.

Bei der Ausübung jeder Fundamental-transformation werden zweitens die Bereichpunkte jedesmal der *Achse des Reellen angenähert*, wie der Ausdruck $Z - \frac{1}{Z}$ mit Bezug auf die Achse des Reellen sofort erkennen lässt. Für den Grad der Annäherung, welche die Begrenzungspunkte des Bereichs B_n erfahren, lässt sich elementar eine Abschätzung ausrechnen, die nur von der Entfernung der Verzweigungspunkte der Fundamentaltransformation von der Achse des Reellen und von der Grösse $\varDelta$ abhängt. Hieraus ergibt sich aber, dass die Maximalabweichung der Begrenzung des Bereichs B_n von der Achse des Reellen bei unbegrenzt zunehmendem n unter jede Grenze herabsinkt und daraus weiter die gleichmässige Konvergenz zunächst des imaginären Teils der Funktion $z_n(z)$ im ganzen Bereich B gegen eine Grenzfunktion, die, wenn $z = x + iy$ gesetzt wird, im Unendlichen wie $y + ((0))$ unendlich wird und bei Annäherung an die Grenze von B auf dem Wege der Ausschöpfung dieses Bereiches vermöge endlich-vielfach zusammenhängender Näherungsbereiche gleichmässig unendlich klein wird. Hieraus folgt schliesslich die gleichmässige Konvergenz der Funktionen $z_n(z)$ selbst in jedem solchen Näherungsbereiche, wenn man sich diesen mittels endlich vieler Kreisscheiben unter Einbeziehung einer unendlich grossen Aussenkreisscheibe

---

[1] Diese Benennung des Verfahrens rechtfertigt sich erst später, wenn gezeigt wird dass die wesentliche Leistung des Verfahrens eine fortgesetzt zunehmende Anschmiegung der Bereichgrenze an die Achse des Reellen ist.

überdeckt denkt und beachtet, dass in jeder dieser Kreisflächen die unendlich klein werdende Schwankung des imaginären Teils der Differenz

$$z_{n+m}(z) - z_n(z)$$

die unendlich klein werdende Schwankung des reellen Teiles dieser Differenzgrösse für eine konzentrische, etwas kleiner zu wählende Kreisfläche zur Folge hat.[1]

14. Es sei der Bereich B insbesondere ein *Kreisbereich* K_*, den wir dabei jetzt im allgemeinsten Sinne verstehen wollen, nämlich als einen Bereich, dessen sämtliche Begrenzungskontinuen Kreise sind, deren jeder einzelne sich auch auf einen Punkt (punktförmiger Begrenzungskreis) reduzieren darf. Wenden wir auf K_* das Schmiegungsverfahren der vorigen Nummer an, so bemerken wir sogleich, dass hierbei ein Schlitzbereich S_* entsprechend allgemeinster Art gewonnen wird. Es werden nämlich notwendig den gewöhnlichen Begrenzungskreisen gewöhnliche und den punktförmigen Kreisen punktförmige Schlitze entsprechen. Denn andernfalls würde entweder die Abbildungsfunktion oder deren Umkehrungsfunktion eine Funktion sein, die längs eines Kreisbogens bezw. längs eines endlichen Schlitzes sich auf einen konstanten Wert reduziert, die daher überhaupt eine Konstante sein müsste.

Wir bemerken weiter, dass die gewöhnlichen Begrenzungskreise (oberer und unterer Halbbogen) notwendig *regulär abgebildet* werden; denn man kann der Anwendung des Schmiegungsverfahrens zunächst eine elementare Abbildung vorausgehen lassen, durch die ein beliebig gewählter solcher Begrenzungskreis regulär auf einen Schlitz abgebildet wird, und auf den so gewonnenen Bereich erst das Schmiegungsverfahren anwenden, wobei dann offenbar der in der Voroperation gewonnene Schlitz eine reguläre Abbildung erfährt. In den punktförmigen Begrenzungskreisen besteht, da ihnen punktförmige Schlitze entsprechen, eo ipso Stetigkeit. Darüber hinaus besteht sogar Regularität der Abbildungsfunktion, sofern es sich um solche punktförmigen Begrenzungsschlitze handelt, die nicht Häufungspunkte gewöhnlicher Begrenzungskreise sind. Denn man kann einen solchen punktförmigen Begrenzungskreis als inneren Punkt (nicht Endpunkt)

---

[1] S. »Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung I». Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 145 pag. 190, ferner den Artikel des Verfassers »über das Schwarzsche Lemma und einige damit zusammenhängende Ungleichheitsbeziehungen der Potentialtheorie und Funktionentheorie» in Math. Zeitschrift Bd. 6, pag. 61.

Ohne den in Rede stehenden Hilfssatz anzuwenden, kann man das gleichmässige Unendlichkleinwerden der betrachteten Differenzgrösse $z_{n+m} - z_n$ auch nach dem Muster der in Abhandlung V der genannten Serie in § 3 gegebenen Entwicklung beweisen; s. Math. Zeitschrift Bd. 2 pag. 210 ff.

eines kleinen Intervalls der Achse des Reellen auffassen, das keinen gewöhnlichen Begrenzungskreis trifft, und nunmehr einen neuen Bereich dadurch bilden, dass man alle auf diesem Intervall enthaltenen punktförmigen Begrenzungskreise löscht. Das Schmiegungsverfahren, auf diesen neuen Bereich angewandt, nimmt offenbar rechnungsmässig denselben Verlauf wie auf den ursprünglichen Bereich angewandt. Die neue Fassung zeigt jedoch, dass das erwähnte Intervall eine reguläre Abbildung erfährt.

15. Es werde nunmehr die Aufgabe gestellt, einen *Bereich B allgemeinster Art in symmetrischer Weise auf einen Kreisbereich K_** allgemeinster Art abzubilden unter Berücksichtigung nur der inneren Punkte, wobei im Unendlichen wieder unsere stets angewandte Normierungsbedingung erfüllt werden soll.

Hier gilt es zunächst den *Unitätsbeweis* zu liefern. Dies erfordert den Nachweis, dass zwei Kreisbereiche allgemeinster Art nur durch die identische Transformation im genannten Sinne auf einander abgebildet werden können. Um dies zu erkennen genügt es, den Nachweis der Regularität einer so zunächst nur für die inneren Punkte der Bereiche definierten Abbildung auf den gewöhnlichen Begrenzungskreisen festzustellen, weil dann sofort der Unitätsbeweis der Nummer 7 in Kraft treten kann.

Man bemerkt zunächst sofort, dass bei der genannten Abbildung zweier Kreisbereiche K_* auf einander gewöhnlichen Begrenzungskreisen nur gewöhnliche Begrenzungskreise und punktförmigen Begrenzungskreisen nur punktförmige Begrenzungskreise entsprechen können. Darüber hinaus erkennt mann die Regularität der Abbildung, indem man jeden der beiden Kreisbereiche auf einen symmetrischen Schlitzbereich abbildet. Diese Hilfsabbildungen sind, wie wir sahen, auf den gewöhnlichen Begrenzungskreisen regulär. Die gewonnenen beiden Schlitzbereiche aber können in der Tat nur durch die identische Transformation auf einander bezogen werden, wie das wiederholt von uns angewandte Verfahren der Differenzbildung lehrt, wenn man den imaginären Teil der Differenzfunktion untersucht.

Was nun die *Existenz* einer Funktion anbetrifft, die den Bereich B auf einen Kreisbereich K_* leistet, so ist jetzt der Weg zur Bestimmung einer solchen Funktion vorgezeichnet. Man wird zunächst B auf einen Schlitzbereich S_* abbilden, wobei sich teils gewöhnliche, teils punktförmige Schlitze ergeben. Darauf wird man den Bereich S_* mit Hilfe unseres Iterationsverfahrens der Nummern 8—11 behandeln in der Weise, dass nur die gewöhnlichen Begrenzungsschlitze des Bereiches S_* zur Bildung der Transformation herangezogen werden. Der Bereich S_* wird demnach so behandelt, als ob es sich um die Abbildung des Bereiches S handelt, der durch die gewöhnlichen Begrenzungsschlitze des Bereiches S_* als Begrenzungslinien erklärt werden kann. Man bemerkt, dass bei dieser Abbildung die gewöhnlichen Begrenzungsschlitze von S_* in gewöhnliche Begrenzungskreise des gewonnenen Bereiches K_* übergehen, hingegen die punktförmigen Begrenzungsschlitze von S_* in punktförmige Begrenzungskreise von K_*.

16. Es drängt sich noch die Frage auf, *welche Begrenzungskontinuen* des ganz allgemein vorgestellten Bereichs B *in gewöhnliche Begrenzungsschlitze* des Bereichs S_* und infolgedessen in gewöhnliche Begrenzungskreise des Bereichs K_* übergehen. Die Mannigfaltigkeit der verschiedenen Begrenzungskontinuen des Bereichs B wird im umfassendsten Falle nicht abzählbar sein. Hingegen muss die Mannigfaltigkeit der im Sinne der Fragestellung ausgezeichneten Begrenzungskontinuen notwendig abzählbar sein, weil die Menge der gewöhnlichen Begrenzungsschlitze von S_* offenbar abzählbar ist. Die Antwort auf diese Frage wird durch die allgemeine Theorie der Ränderzuordnung für Abbildung beliebiger einfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf die Fläche des Einheitskreises gegeben.[1] Nach dem allgemeinen Ergebnis dieser Theorie folgt bei Anwendung auf die hier vorliegende Abbildung der oberen Hälfte B' des Bereiches B, die einen einfach zusammenhängenden Bereich darstellt, auf die als Halbebene sich darstellende obere Hälfte des Schlitzbereiches S_* unmittelbar folgendes Resultat:

Die ausgezeichneten Begrenzungskontinuen von B sind diejenigen, die *mindestens zwei und dann selbstverständlich unendlich viele aus dem Innern des Bereiches B' her erreichbare Punkte* aufweisen. Man kann leicht Beispiele von Bereichen B mit unendlich vielen nicht punktförmigen Grenzkontinuen bilden, deren sämtliche Grenzkontinuen bei der Abbildung auf einen Schlitzbereich S_* bezw. einen Kreisbereich K_* in punktförmige Begrenzungsschlitze bezw. punktförmige Begrenzungskreise übergehen.

Was die Frage nach dem *regulären analytischen Charakter* der Ränderzuordnung anbetrifft, so gibt auch hierfür die l. c. gegebene Theorie der Ränderzuordnung einfach zusammenhängender Bereiche sofort die Antwort: Jedes freie regulär analytische Begrenzungsstück wird regulär durch die Abbildungsfunktion auf ein ihm entsprechendes Begrenzungsstück von S_* bezw. K_* abgebildet.

---

[1] S. »Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung I«. Journ. f. Math. Bd. 145, §§ 8—11. S. auch Angaben in einem Artikel von mir, der in der *Hilbert-Festschrift* (Berlin, 1922, Verlag Julius Springer) erscheinen soll.

Literatur.

Das Problem der konformen Abbildung beliebiger endlich-vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche hat seine erschöpfende Erledigung gefunden, worüber man besonders folgende Veröffentlichungen von mir nachsehe: Jahresbericht der D. M. V. 1908 (Seite 50 der Mitteilungen u. Nachrichten, Sitzung der Göttinger Math. Gesellschaft vom 25. 2. 08 Gött. Nachr. 1908 (22 Febr. und 11 Juli), 1909 (20 Febr.), 1910 (26 Febr. u. 28 Mai); Jahresber. der D. M. V. 1906, 1907, 1910; Journ. f. Math. Bd. 138 (1910), § 15; Math. Ann. Bd. 69 (1910) pag. 60; Math. Zeitschrift Bd. 7 (1920).

Einen Weg zur Lösung der Abbildungsaufgabe für symmetrische Bereiche unendlich hohen Zusammenhanges habe ich schon in Gött. Nachr. 1908 am Schlusse einer Note vom 11 Juli bezeichnet und später in einer Dissertation von Herrn A. Fischer (Jena, 1915) ausführen lassen. Gewisse unsymmetrische Fälle unendlich hohen Zusammenhanges habe ich durch Herrn K Georgi in einer Dissertation (Jena, 1915) behandeln lassen.