ENTWICKLUNG DER WURZELN
EINER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNG
IN SUMMEN VON RATIONALEN FUNCTIONEN
DER COEFFICIENTEN

VON

C. RUNGE
in BERLIN.

Nach einem von DANIEL BERNOULLI angegebenem Verfahren wird die dem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel einer algebraischen Gleichung auf folgende Weise aus den Coefficienten berechnet.

Sei s_n die Summe der $(-n)^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln, also eine rationale Function der Coefficienten, so nähert sich der Quotient s_{n-1} dividirt durch s_n mit wachsendem n der dem absoluten Betrage nach kleinsten Wurzel, wenn eine solche existirt.

Diese Methode ist im Folgenden verwendet, um auch bei variabeln Coefficienten die Wurzeln darzustellen. Sie ergeben sich als unendliche Summen von rationalen Functionen derselben. Die Gesammtheit der Werthsysteme der Coefficienten, für welche die Convergenz dieser Summen aufhört, besteht aus Theilen eines algebraischen Gebildes von einer um wenigstens eine Einheit niedrigeren Stufe als das Gebiet der Coefficienten, sei es nun, dass man sie als unabhängige Variable betrachtet, oder dass man ihnen irgend welche Beschränkung auferlegt. Seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln, wie sie durch die n Ausdrücke dargestellt sind. Nähert man sich einem Punkte der Convergenzgrenze, so gehen $x_1, x_2, \dots, x_n$ in die Wurzeln, welche diesem Punkte entsprechen, über. Nähert man sich demselben Punkte auf einem anderen Wege, so ist nicht gesagt, dass

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ in derselben Reihenfolge wie vorhin in die Wurzeln dieses Punktes übergehn. Mit andern Worten beim Überschreiten der Grenze können $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Sprünge machen. Will man den stetigen Verlauf der Wurzeln verfolgen, so muss man beim Überschreiten der Grenze auf $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine gewisse Substitution anwenden. Die Convergenzgrenze zerfällt in eine endliche Anzahl von Theilen. Jedem Theile entspricht eine gewisse Substitution. Um den Zusammenhang der Wurzeln für die Endpunkte eines vorgelegten Weges im Gebiete der Coefficienten zu erkennen, braucht man nur die Durchschnittspunkte des Weges mit der Convergenzgrenze aufzusuchen.

Für den Fall, dass die Coefficienten als rationale Functionen eines Parameters aufgefasst werden, besteht unsre Convergenzgrenze aus Stücken algebraischer Curven, welche in der complexen Ebene des Parameters liegen. Diese geben, nachdem festgestellt ist, welche Substitution jedem Theile entspricht, die vollständige Einsicht in den Zusammenhang der Wurzeln für die Endpunkte eines in der Ebene des Parameters vorgelegten Weges. Sie erlauben ohne Weiteres die Riemann'sche Fläche der Gleichung zu construiren.

Man bemerke indessen, dass umgekehrt die Riemann'sche Fläche nicht dieselbe Einsicht in den Zusammenhang der Wurzeln gewährt. Sie dient nur dazu die Vertauschungen der Wurzeln für geschlossene Wege erkennen zu lassen, ohne dass man die Wurzel, welche einem bestimmten Punkte der Riemann'schen Fläche entspricht, numerisch anzugeben im Stande ist.

Aus

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

folgt durch logarithmische Differenziation

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_n}.$$

Wenn jetzt z von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschieden ist, so lassen sich beide Seiten dieser Gleichung nach positiven Potenzen von $(x - z)$ entwickeln und man erhält durch Vergleichung der Coefficienten

$$\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]_{(x-z)^\lambda} = -\sum_\nu (x_\nu - z)^{-\lambda-1}. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

Die linke Seite ist eine rationale ganzzahlige Function von z und den Coefficienten von $f(x)$, also wird auch der Quotient

$$\frac{\sum (x_\nu - z)^{-\lambda}}{\sum (x_\nu - z)^{-\lambda-1}} \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

eine rationale Function von z und den Coefficienten von $f(x)$, welche mit $R_\lambda(z)$ bezeichnet werden möge

$$R_\lambda(z) = \frac{\sum (x_\nu - z)^{-\lambda}}{\sum (x_\nu - z)^{-\lambda-1}} = (x_1 - z)\frac{\sum \left(\frac{x_1 - z}{x_\nu - z}\right)^{\lambda}}{\sum \left(\frac{x_1 - z}{x_\nu - z}\right)^{\lambda+1}} \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

Wenn z der Wurzel x_1 näher liegt als allen übrigen, so nähert sich $R_\lambda(z)$ mit wachsendem λ der Grösse $x_1 - z$. In der That bezeichnet man den grössten der absoluten Beträge von

$$\frac{x_1 - z}{x_2 - z},\ \frac{x_1 - z}{x_3 - z},\ \ldots,\ \frac{x_1 - z}{x_n - z}$$

mit ε, wo also $\varepsilon < 1$ ist, so ist der absolute Betrag von $R_\lambda(z) - (x_1 - z)$ kleiner als

$$(x_1 - z)\frac{2(n-1)\varepsilon^\lambda}{1-(n-1)\varepsilon^{\lambda+1}}$$

vorausgesetzt, dass $(n-1)\varepsilon^{\lambda+1} < 1$, was bei hinreichend grossem λ sicher zutrifft.

Denke ich mir nun unter den Grössen $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ nicht mehr bestimmte Werthe, sondern Variable und betrachte die Umgebung einer Stelle $(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, für welche die absoluten Beträge von

$$\frac{x_1 - z}{x_2 - z},\ \ldots,\ \frac{x_1 - z}{x_n - z}$$

kleiner als 1 sind, so wird, wenn die Umgebung hinreichend klein gewählt ist, die obere Grenze der absoluten Beträge dieser Ausdrücke für alle Stellen im Innern der Umgebung kleiner als 1 sein. Bezeichnen wir dieselbe mit ε, so wird der absolute Betrag von $R_\lambda(z) - (x_1 - z)$ für alle Stellen der Umgebung kleiner sein als

$$(x_1 - z)\frac{2(n-1)\varepsilon^\lambda}{1-(n-1)\varepsilon^{\lambda+1}}.$$

Man kann daher einen Werth von λ finden, so gross, dass $z + R_\lambda(z)$ für alle Stellen der Umgebung die Wurzel x_1 mit vorgeschriebener Genauigkeit darstellt. Oder mit andern Worten: In der Umgebung einer jeden Stelle $(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, für welche x_1 der Grösse z näher liegt als die übrigen Wurzeln, convergirt der Ausdruck

$$z + \lim_{\lambda=\infty} R_\lambda(z)$$

gleichmässig und ist gleich x_1. Jeden solchen Grenzausdruck kann man auch in Form einer Summe schreiben:

$$z + R_1 + (R_2 - R_1) + (R_3 - R_2) + \cdots$$

Das ist nur eine andre Schreibweise, denn eine unendliche Summe bedeutet nichts Anderes als die Grenze, der sich die Summe der ersten λ Glieder mit wachsendem λ nähert.

Da $R_\lambda(z)$ eine symmetrische Function von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist, so liegt jede Stelle $(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ im Innern des Bereiches der gleichmässigen Convergenz, für welche eine der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Grösse z näher liegt als alle übrigen, und nur solche Stellen könnten der Grenze des Bereiches angehören, für welche zwei oder mehrere der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche der Grösse z näher liegen als die übrigen, gleich weit von z entfernt sind. Man kann nun zeigen, dass diese Stellen auf der Grenze des Bereichs liegen *müssen*. Denn sei z. B.

$$|x_1 - z| = |x_2 - z| = \cdots = |x_\alpha - z| < |x_{\alpha+\nu} - z| \qquad {\scriptstyle (\nu=1, 2, \ldots, n-\alpha)}$$

so kann ich durch eine beliebig kleine Änderung δ von x_1 allein bewirken, dass $x_1 + \delta$ der Stelle z näher liegt als alle übrigen Wurzeln.

Dann wird

$$z + \lim_{\lambda=\infty} R_\lambda(z)$$

convergiren und gleich $x_1 + \delta$ sein.

Lasse ich nun die Änderung von x_1 kleiner und kleiner werden, jedoch so, dass $|x_1 + \delta - z|$ beständig kleiner bleibt als $|x_2 - z|, \ldots, |x_n - z|$, so bleibt

$$z + \lim_{\lambda=\infty} R_\lambda(z)$$

convergent und nähert sich mehr und mehr dem Werthe x_1. Dasselbe gilt von $x_2, \ldots, x_\alpha$. Ich könnte mich der Stelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auch in der Weise nähern, dass der Werth von

$$z + \lim_{\lambda=\infty} R_\lambda(z)$$

sich dem Werthe x_2 mehr und mehr näherte, oder einem der Werthe $x_3, \ldots, x_\alpha$. Sind nun die Werthe $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ nicht alle einander gleich, so ist mithin

$$z + \lim_{\lambda=\infty} R_\lambda(z)$$

an der Stelle $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ unstetig. An einer solchen Stelle hört daher die *gleichmässige* Convergenz auf. Ob damit zugleich die Convergenz aufhört, mag dahin gestellt bleiben.

Wenn ferner $x_1 = x_2 = \ldots = x_\alpha$ ist, so liegen in jeder Nähe Stellen $(x_1', \ldots, x_n')$, wofür $x_1', \ldots, x_\alpha'$ der Stelle z gleich nahe liegen, aber nicht sämmtlich einander gleich sind, welche mithin der Convergenzgrenze angehören. Das wäre nicht möglich, wenn $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ im Innern des Bereichs der gleichmässigen Convergenz läge.

Es convergirt jedoch

$$z + \lim_{\lambda=\infty} R_\lambda(z)$$

(wenn auch nicht gleichmässig) und stellt den gemeinsamen Werth von $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$ dar.

Denn es ist

$$R_\lambda(z) = (x_1 - z)\,\frac{\sum\left(\frac{x_1 - z}{x_\nu - z}\right)^\lambda}{\sum\left(\frac{x_1 - z}{x_\nu - z}\right)^{\lambda+1}} \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n)$$

$$= (x_1 - z)\,\frac{\alpha + \sum\left(\frac{x_1 - z}{x_\nu - z}\right)^\lambda}{\alpha + \sum\left(\frac{x_1 - z}{x_\nu - z}\right)^{\lambda+1}}. \qquad (\nu=\alpha+1, \ldots, n)$$

Wenn daher

$$\left|\frac{x_1 - z}{x_\nu - z}\right| < \varepsilon < 1, \qquad (\nu=\alpha+1, \ldots, n)$$

so folgt

$$|z + R_\lambda(z) - x_1| < \frac{2(n-\alpha)\varepsilon^\lambda}{\alpha - (n-\alpha)\varepsilon^{\lambda+1}}$$

(sobald $\alpha > (n-\alpha)\varepsilon^{\lambda+1}$).

Die rechte Seite wird mit wachsendem λ beliebig klein und zwar um so rascher je grösser α ist.

Betrachtet man $z + R_\lambda(z)$ nicht mehr als Function von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sondern als Function der Coefficienten von $f(x)$, die wir mit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bezeichnen wollen, so wird der Bereich der gleichmässigen Convergenz von allen denjenigen Stellen $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ gebildet werden, für welche eine der Wurzeln von $f(x)$ z näher liegt als alle übrigen.

Ich behaupte, dass bei einem festen Werthe von z dieser Bereich in dem $2n$-fach ausgedehnten Gebiete der Grössen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ein zusammenhängender ist, dergestalt, dass man von jeder Stelle desselben auf stetigem Wege zu jeder anderen gelangen kann, ohne den Bereich zu verlassen. Ich nenne die Wurzeln des einen Coefficientensystems

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

geordnet nach ihrer Entfernung von z, so dass

$$|x_1 - z| < |x_2 - z| \leqq |x_3 - z| \leqq \cdots \leqq |x_n - z|$$

und ebenso die des anderen

$$x_1', x_2', \ldots, x_n'.$$

Man betrachte zuvörderst x_1 und x_1', und führe die von z weiter entfernte in die andere über, ohne diese Entfernung unterwegs zu vergrössern. Ebenso verfahre man nun nach der Reihe mit x_2 und x_2', mit x_3 und x_3', u. s. f. Dadurch ist ein stetiger Übergang von $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ zu einer dritten Stelle und daher auch ein solcher zwischen den beiden Stellen hergestellt, bei welchem die Anordnung der Grössen nach ihrer Entfernung von z stets dieselbe bleibt. Da nun jedem stetigen Wege im Gebiete der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ein stetiger Weg im Gebiete der Grössen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ entspricht, so ist auch hier der Übergang bewerkstelligt. Das gilt auch noch für den Bereich aller

Stellen $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, für welche alle Wurzeln verschiedene Entfernung von z besitzen, wie aus dem Obigen unmittelbar hervorgeht. Die hierbei ausgeschlossenen Stellen enthalten unter sich natürlich auch alle diejenigen, wofür keine Wurzel der Stelle z näher liegt als die übrigen.

Wir werden ihre Gesammtheit jetzt näher betrachten.

Man kann an die Stelle der Gleichung $|x_\mu - z| = |x_\nu - z|$ auch die Forderung setzen, dass

$$\frac{(x_\mu - z) + (x_\nu - z)}{(x_\mu - z) - (x_\nu - z)}$$

unendlich oder rein imaginär sei. Denn bei festem Werthe von z und endlichen Werthen von x_μ, x_ν (und auf solche allein kommt es hier an) ist der Ausdruck nur unendlich für $x_\nu = x_\mu$; sein reeller Theil ist aber, wenn

$$x_\mu - z = u_\mu + v_\mu i\,, \qquad x_\nu - z = u_\nu + v_\nu i$$

gesetzt wird, gleich:

$$\frac{(u_\mu^2 + v_\mu^2) - (u_\nu^2 + v_\nu^2)}{(u_\mu - u_\nu)^2 + (v_\mu - v_\nu)^2}.$$

Diejenigen Stellen $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, wofür zwei oder mehr Wurzeln von $f(x)$ gleiche Entfernung von z haben, bestehen also erstens aus denjenigen, wofür zwei oder mehr Wurzeln einander gleich sind, d. h. wofür die Discriminante verschwindet. zweitens aus denjenigen Stellen, wofür eine der Grössen

$$\frac{x_\mu + x_\nu - 2z}{x_\mu - x_\nu}$$

rein imaginär oder, was dasselbe ist, wofür

$$\left(\frac{x_\mu + x_\nu - 2z}{x_\mu - x_\nu}\right)^2$$

negativ ist.

Diese Grössen sind die Wurzeln der Gleichung

$$\prod_{\mu,\,\nu}\left[y - \left(\frac{x_\mu + x_\nu - 2z}{x_\mu - x_\nu}\right)^2\right] = 0. \qquad \left(\begin{matrix}\mu = 1, 2, \ldots, n\\ \nu = \mu+1, \ldots, n\end{matrix}\right)$$

Als symmetrische Function von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kann dieser Ausdruck auf die Form gebracht werden:

$$\frac{G(y, X_1, X_2, \ldots, X_n, z)}{D(X_1, X_2, \ldots, X_n)} = 0,$$

wo G ein ganze Function von $y, X_1, \ldots, X_n, z$ und D die Discriminante bedeutet. Es handelt sich darum, die Bedingung zu finden, welcher $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unterliegen, damit diese Gleichung durch einen reellen negativen Werth von y befriedigt werden könne. Zu dem Ende setze man:

$$y = u + vi, \qquad X_\nu = U_\nu + U_{n+\nu} i, \qquad z = r + si$$

und löse G in seinen reellen und imaginären Theil auf

$$G(y, X_1, X_2, \ldots, X_n, z)$$

$$= R(u, v, U_1, \ldots, U_{2n}, r, s) + S(u, v, U_1, \ldots, U_{2n}, r, s)i,$$

wo R und S ganze ganzzahlige Functionen der Argumente sind.

Soll $G = 0$ eine reelle Wurzel haben, so müssen die beiden Gleichungen erfüllt sein:

$$\overline{R} = R(u, 0, U_1, \ldots, U_{2n}, r, s) = 0, \quad \overline{S} = S(u, 0, U_1, \ldots, U_{2n}, r, s) = 0;$$

$\overline{R}$ und $\overline{S}$ können für beliebige Werthe von $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ keinen gemeinsamen Theiler haben. Denn angenommen es wäre der Fall, so gebe ich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ solche Werthe, dass sämmtliche $\frac{n \cdot n - 1}{2}$ Wurzeln von G negativ und von einander verschieden sind. Man sieht leicht, dass dies erreicht werden kann durch richtige Vertheilung von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf der Peripherie eines um z gezogenen Kreises.

Nunmehr muss auch der Theiler von $\overline{R}$ und $\overline{S}$ lauter verschiedene negative Wurzeln haben. Ändere ich daher $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ auf irgend eine Weise hinreichend wenig, so müssen die sämmtlichen Wurzeln des gemeinsamen Theilers von $\overline{R}$ und $\overline{S}$ negativ bleiben.

Denn bekanntlich kann sich die Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung mit reellen veränderlichen Coefficienten nur dadurch ändern, dass zwei Wurzeln einander gleich werden, was für hinreichend kleine Änderungen von $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ sicher nicht der Fall ist. Mithin hätte alsdann für alle hinreichend kleinen Änderungen von $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ G eine negative Wurzel. Das ist aber nicht möglich, weil ich $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ solche beliebig kleine Änderungen geben kann, dass die sämmtlichen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschiedene Entfernung von z erlangen.

Mithin kann die Resultante von $\overline{R}$ und $\overline{S}$

$$\varphi(U_1, U_2, \ldots, U_{2n}, r, s)$$

nicht für beliebige Werthe von $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ verschwinden, sondern ihr Verschwinden definirt in dem $2n$-fach ausgedehnten Gebiete der Grössen $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ ein Gebilde $(2n-1)^{\text{ter}}$ Stufe, von welchem die Convergenzgrenze ein Theil ist. Es ist nicht gesagt, dass umgekehrt jeder Stelle $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$, wofür $\varphi = 0$ ist, eine reelle Wurzel von $G = 0$ entspricht. Denn es könnten ja $\overline{R}$ und $\overline{S}$ einen gemeinsamen Theiler ohne reelle Wurzeln besitzen. Jedenfalls aber wird die Gesammtheit der Stellen $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$, wofür $G = 0$ eine reelle Wurzel hat, einem monogenen Gebilde angehören, wie wir sogleich zeigen werden. Bezeichnen wir die Gleichung desselben mit $\overline{\varphi} = 0$, so muss also $\overline{\varphi}$ entweder gleich φ oder ein irreductibler Theiler von φ sein.

Setzt man:

$$\frac{(x_1 - z) + (x_2 - z)}{x_1 - x_2} = \rho \quad \text{oder} \quad x_1 - z = \frac{\rho + 1}{\rho - 1}(x_2 - z) \quad \text{und} \quad x_{\alpha+1} = u_\alpha + u_{2\alpha} i$$

(wo ρ eine reelle Grösse bedeutet), so kann man $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ als rationale Functionen von $\rho, u_1, u_2, \ldots, u_{2n-2}$ ausdrücken. Giebt man hierin $\rho, u_1, u_2, \ldots, u_{2n-2}$ alle reellen Werthe, so erhält man alle Stellen $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$, wofür G eine positive Wurzel besitzt. Diese gehören daher einem monogenen Gebilde an. Indem man an Stelle von ρ, ρi einführt, ergiebt sich auf dieselbe Weise, dass alle diejenigen Stellen, wo G eine negative Wurzel besitzt ebenfalls einem monogenen Gebilde angehören. Aber in beiden Fällen liegt dasselbe monogene Gebilde vor, wie man folgendermassen einsieht.

Sei $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein Werthsystem der Coefficienten $X_1, X_2, \ldots, X_n$, wofür die zwei Wurzeln x_1 und x_2 und nur diese einander gleich werden: $x_1 = x_2 = a$. Solange dann die Stelle $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ hinreichend nahe bei $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ liegt, so bleiben x_1 und x_2 beliebig nahe bei a und es ist nach CAUCHY

$$(x_1 - a) + (x_2 - a) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{(t-a)f'(t)}{f(t)}\,dt,$$

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{(t-a)^2 f'(t)}{f(t)}\,dt$$

die beiden Integrale über kleine Kreise mit dem Mittelpunkte a erstreckt. Dabei muss $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ so nahe bei $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ angenommen werden, dass x_1 und x_2 im Innern des Kreises, die übrigen Wurzeln dagegen ausserhalb desselben liegen.

Aus diesen beiden Gleichungen überzeugt man sich, dass die Entwicklung von

$$\left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2 - 2z}\right)^2 \quad \text{oder} \quad \frac{2[(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2] - (x_1 - a + x_2 - a)^2}{(x_1 + x_2 - 2z)^2}$$

nach ganzen positiven Potenzen von $X_1 - A_1, \ldots, X_n - A_n$ möglich ist und mit den linearen Gliedern

$$\frac{-8[a^{n-1}(X_1 - A_1) + a^{n-2}(X_2 - A_2) + \ldots + (X_n - A_n)]}{4(a-z)^2\,\bar{f}''(a)}$$

anfängt, unter $\bar{f}''(a)$ diejenige Grösse verstanden, welche entsteht, wenn ich in $f''(a)$ $X_1 = A_1, X_2 = A_2, \ldots, X_n = A_n$ setze.

a muss dabei von z verschieden angenommen werden. Unter dieser Bedingung aber lässt sich $X_n - A_n$ nach Potenzen von $X_1 - A_1, \ldots, X_{n-1} - A_{n-1}$ und $\left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2 - 2z}\right)^2$ (wofür der Kurze halber σ geschrieben werde) entwickeln.

Geben wir hier σ positive Werthe, so liefern die reellen und imaginären Theile von $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ein Stück desjenigen Gebildes, wofür

$G = 0$ eine positive Wurzel hat, für negative Werthe von σ dagegen erhält man ein Stück desjenigen Gebildes, wofür $G = 0$ eine negative Wurzel hat. Es erhellt daher, dass beide einem einzigen monogenen Gebilde angehören.

Wir wollen nun untersuchen, auf welche Weise man algebraisch die beiden Theile zu trennen im Stande ist.

Es lässt sich zunächst zeigen, dass $\overline{R}$ und $\overline{S}$ auf dem Gebilde $\overline{\varphi} = 0$ nicht überall einen Theiler von höherem als dem ersten Grade haben können. Nimmt man nämlich wieder $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ so an, dass alle Wurzeln von $G = 0$ negativ und von einander verschieden sind, so müsste jeder Theiler von $\overline{R}$ und $\overline{S}$ auch lauter verschiedene negative Wurzeln haben. Hätten nun $\overline{R}$ und $\overline{S}$ für beliebige Werthe von $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ auf $\overline{\varphi} = 0$ einen gemeinsamen Theiler, so müssten die Wurzeln desselben negativ bleiben, wenn $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ sich hinreichend wenig von jenen Werthen entfernen. Das ist aber nicht möglich; denn in der Nähe jeder Stelle $(U_1, \ldots, U_{2n})$, wo alle Wurzeln die gleiche Entfernung von z haben, liegen Stellen, wo nur zwei Wurzeln gleich weit von z abliegen.

Die Bedingung, dass $\overline{R}$ und $\overline{S}$ einen Factor von höherem als dem ersten Grade haben, kann daher nicht für alle Stellen von $\overline{\varphi} = 0$ erfüllt sein. Diese Bedingung lässt sich bekanntlich in die Form einer algebraischen Gleichung zwischen $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ bringen. Und da ferner $\overline{\varphi} = 0$ irreductibel ist, so kann die Gesammtheit derjenigen Stellen auf $\overline{\varphi} = 0$, wo ein Theiler höheren Grades möglich ist, nur ein Gebilde $(2n - 2)^{\text{ter}}$ Stufe ausmachen.

Wenn man von diesem absieht, so haben für alle übrigen Stellen des Gebildes die beiden Functionen $\overline{R}$ und $\overline{S}$ nur einen gemeinsamen Theiler ersten Grades und es wird daher die gemeinsame Wurzel ausgedrückt werden können als rationale Function von $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}, r, s$:

$$\sigma = \Psi(U_1, \ldots, U_{2n}, r, s).$$

Durch die Bedingung $\Psi < 0$ sind nun diejenigen Stellen des monogenen Gebildes $\overline{\varphi} = 0$, wo zwei Wurzeln die gleiche Entfernung von z erhalten, von den übrigen Stellen desselben Gebildes getrennt. Ändert man z, so ändert sich das Gebilde $\overline{\varphi} = 0$. Aber wie man auch z wähle, $\overline{\varphi} = 0$

enthält immer das Gebilde $(2n-2)^{\text{ter}}$ Stufe, auf welchem die Discriminante von $f(x)$ verschwindet. Und zwar sind dies die einzigen Stellen, welche allen Gebilden $\overline{\varphi}=0$ gemeinsam sind. Denn wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von einander verschieden sind, so lässt sich z immer so wählen, dass $G=0$ keine reelle Wurzel hat. Man braucht z nur so anzunehmen, dass weder zwei Wurzeln die gleiche Entfernung von z haben noch zwei Wurzeln mit z auf derselben Graden liegen. Hat $G=0$ keine reelle Wurzel, so enthält das entsprechende Gebilde $\overline{\varphi}=0$ diese Stelle nicht.

Beschränkt man die Coefficienten auf ein monogenes Gebilde m^{ter} Stufe, für welches die Discriminante nicht identisch verschwindet, so wird in diesem Gebiete die Convergenzgrenze unter der Gesammtheit derjenigen Stellen enthalten sein, welche das Gebilde m^{ter} Stufe mit $\varphi=0$, $\Psi<0$ gemein hat. Die Gesammtheit der gemeinsamen Punkte kann nun zwar für besondere Werthe von z ein Gebiet m^{ter} Stufe bilden, aber nicht für alle Werthe von z. Denn in diesem Falle würde nach dem Obigen das Gebilde ganz in das Discriminantengebilde fallen, was wider die Voraussetzung ist. Die Convergenzgrenze ist mithin höchstens von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Stufe.

Wir haben in den voranstehenden Erörterungen immer die Gesammtheit der Stellen in Betracht gezogen, für welche irgend zwei Wurzeln gleich weit von z entfernt liegen, während, wie wir sahen, die Convergenzgrenze des Ausdruckes für die Wurzel nur aus denjenigen Stellen besteht, wofür die beiden nächsten Wurzeln die gleiche Entfernung erhalten. Das hat abgesehn von der grösseren Symmetrie den Vortheil, dass wir zu gleicher Zeit auch die Untersuchung über die Convergenzgrenze anderer Ausdrücke erledigt haben, welche wir jetzt für die übrigen Wurzeln aufstellen werden.

Sei $|x_1-z|<|x_2-z|<\ldots<|x_n-z|$, so ist $|(x_1-z)(x_2-z)|$ kleiner als jedes andere Product je zweier der n Grössen. Es wird daher

$$R_\lambda^{(2)}(z)=\frac{\Sigma(x_\alpha-z)(x_\beta-z)^{-\lambda}}{\Sigma(x_\alpha-z)(x_\beta-z)^{-\lambda-1}}$$

(die Summe erstreckt über alle Combinationen von je 2 Wurzeln) mit wachsendem λ gegen $(x_1-z)(x_2-z)$ convergiren. (Der obere Index

2 in $R_\lambda^{(2)}(z)$ soll der Anzahl der Factoren in $(x_1 - z)(x_2 - z)$ entsprechen. Der Symmetrie wegen möge fortan das was früher $R_\lambda(z)$ hiess mit $R_\lambda^{(1)}(z)$ bezeichnet werden.) Die Convergenzgrenze dieses Ausdruckes wird von alle denjenigen Stellen gebildet, wofür die zweit-nächste und dritt-nächste Wurzel den gleichen Abstand von z erhalten. Daher wird

$$x_2 = z + \lim_{\lambda=\infty} \frac{R_\lambda^{(2)}(z)}{R_\lambda^{(1)}(z)}$$

convergiren, so lange nicht entweder $|x_1 - z| = |x_2 - z|$ oder $|x_2 - z| = |x_3 - z|$ ist.

Auf dieselbe Weise bilden wir Ausdrücke für $x_3, x_4, \ldots, x_n$, indem wir die Summen über alle Combinationen von je drei, je vier u. s. w. Factoren erstrecken. Die Convergenzgrenze des Ausdruckes für x_ν besteht alsdann aus alle den Stellen, wofür entweder $|x_{\nu-1} - z| = |x_\nu - z|$ oder $|x_\nu - z| = |x_{\nu+1} - z|$ ist. Das oben algebraisch dargestellte Gebilde besteht aus den Convergenzgrenzen der sämmtlichen n Ausdrücke.

Wir haben also den Satz, dass von jeder Stelle $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ des gemeinschaftlichen Bereiches gleichmässiger Convergenz der n für die Wurzeln aufgestellten Ausdrücke sich ein stetiger Übergang machen lässt zu jeder andern Stelle des Bereiches, ohne seine Grenze zu berühren. Die Grössen $\sum(x_a - z)^{-\lambda}$, $\sum[(x_a - z)(x_\beta - z)]^{-\lambda}$, etc. aus denen die Ausdrücke $R_\lambda^{(\nu)}(z)$ zusammengesetzt sind, bilden mit abwechselndem Vorzeichen die Coefficienten von $x, x^2, \ldots,$ in der Function

$$\varphi(x) = f(z)^{-\lambda} \prod_a [x - (x_a - z)^\lambda] \qquad (a=1, 2, \ldots, n)$$

Dies gewährt ein Mittel um die genannten Ausdrücke durch die Coefficienten von $f(x)$ darzustellen. Setzt man nämlich in der obigen Gleichung u^λ an Stelle von x, so kann man jeden der Factoren $u^\lambda - (x_a - z)^\lambda$ in Linear-Factoren zerlegen. Denn es ist, wenn ω eine primitive λ^{te} Einheitswurzel bezeichnet

$$u^\lambda - (x_a - z)^\lambda = (-1)^{\lambda+1} \prod_\beta [\omega^\beta u - (x_a - z)]. \qquad (\beta=1, 2, \ldots, \lambda)$$

Mithin

$$\varphi(u^\lambda) = (-1)^{\lambda n+n} f(z)^{-\lambda} \prod_\beta \prod_a [\omega^\beta u - (x_a - z)] = (-1)^{\lambda n+n} f(z)^{-\lambda} \prod_\beta f(\omega^\beta u + z).$$

Man hat also nichts weiter zu thun als in

$$\prod_{\beta} f(\omega^{\beta} u + z)$$

die Coefficienten von u^{λ}, $u^{2\lambda}$, ... zu berechnen, um die Ausdrücke der gesuchten Grössen durch X_1, X_2, ..., X_n zu finden.