

UEBER DEN BEGRIFF DER LÄNGE EINER CURVE.

Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn Ludwig Scheeffer über Rectification der Curven⁽¹⁾

VON

P. DU BOIS-REYMOND

in TÜBINGEN.

In dem Aufsatz des Herrn L. SCHEEFFER über Rectification ist im Eingang gesagt, meine Begriffsfestsetzung der Länge einer Curve⁽²⁾ sei jedenfalls zu eng, da es Curven mit nachweisbarer Länge gebe, für die das Integral

$$\int dx \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

nicht existirt, während ich seine Existenz meinem Längenbegriff zu Grunde lege. Ich glaube, dass hier ein Missverständniss vorliegt. Zunächst ist es mir mindestens fraglich, ob bei einer anorthoiden (nicht differenzirbaren) Function man von einer Curve als ihrem geometrischen Äquivalent reden dürfe. Auf alle Fälle setzt der Curvenbegriff, wie er in der Geometrie, der Variationsrechnung, der Mechanik heimisch und erforderlich ist, die Orthoidie voraus, und ich habe in meinen *Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung* unnöthige Einschränkungen sorgfältig vermieden. Der wahre und eigentliche Begriff Länge kommt nur den Stücken gerader Linie zu. Sodann wendet man ihn im übertragenen Sinne an auf solche krumme Linien, welche die Vorstellung der Abwickelbarkeit zulassen, wozu die Existenz der Tangente gehört. Darüber hinaus tritt an die Stelle der Länge eine rein analytische Erweiterung.

⁽¹⁾ Acta Mathematica, T. 5, p. 49—82.

⁽²⁾ Mathematische Annalen, Bd 15, p. 287.

Ich habe nie daran gezweifelt, dass das Sehnenpolygon auch anorthoider Functionen unter Umständen eine Grenze haben könne, und Herrn SCHEEFER'S Untersuchung solcher Umstände war mir daher, wenn auch lehrreich, so doch nicht überraschend. Aber wäre es nicht, selbst für eine rein analytische Erweiterung des Längenbegriffs, vonnöthen, zu zeigen dass eine anorthoide »Curve« nicht auch zwei »Längen« haben könne, dass nicht, was bei orthoiden »Curven« völlig ausgeschlossen ist, durch ein anderes Approximationsverfahren, z. B. durch aus geeignet gekrümmten Kreisbögen zusammengesetzte Polygone eine andere Länge herausgebracht werden könnte, wie durch das Sehnenpolygon? Solche Erwägungen gestatten mir nicht, die Meinung aufzugeben, dass der von mir mit dem Ausdruck Länge verbundene Begriff nicht zu eng, sondern gerade angemessen ist.

Tübingen, 16 Mai 1884.
