QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES SE RATTACHANT À LA CONSTANTE D'EULER.

PAR

PAUL APPELL

à PARIS.

Dans des recherches sur la constante C d'Euler, j'ai obtenu certaines formules dont les principales sont données dans les Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris (3. décembre 1923 et 7. janvier 1924). Je me propose ici de développer les calculs qui conduisent aux résultats indiqués et de faire connaître quelques autres formules.

I. On sait que la constante d'Euler est donnée par

$$-C=\Gamma'(1)=\int_0^\infty e^{-u}\log u\,du=4\int_0^\infty e^{-x^2}x\log x\,dx$$

où, comme dans tout ce qui suit, les logarithmes sont népériens. On a de même

$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}\log u}{\sqrt{u}}\,du=4\int_0^\infty e^{-x^2}\log x\,dx,$$

$$\Gamma''(1)=\int_0^\infty e^{-u}(\log u)^2\,du=8\int_0^\infty e^{-x^2}x(\log x)^2\,dx,$$

$$\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}(\log u)^2}{\sqrt{u}}\,du=8\int_0^\infty e^{-x^2}(\log x)^2\,dx$$

et, d'une manière générale, pour les dérivées d'ordre n,

$$\Gamma^{(n)}(1)=\int_0^\infty e^{-u}(\log u)^n\,du=2^{n+1}\int_0^\infty e^{-x^2}x\,(\log x)^n\,dx,$$

$$\Gamma^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}(\log u)^n}{\sqrt{u}}\,du=2^{n+1}\int_0^\infty e^{-x^2}(\log x)^n\,dx.$$

Nous allons chercher à exprimer ces intégrales à l'aide de C. Tout d'abord, d'après un théorème général dû à Gauss, la différence $\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}-\Gamma'(1)$ est connue, sous forme finie, quand u est commensurable; on a, en particulier

$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{\pi}\,(C+2\log 2). \tag{1}$$

On obtient facilement cette formule en dérivant par rapport à u l'équation bien connue

$$\Gamma(u)\,\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\pi}\,2^{-2u}\,\Gamma(2u)$$

ce qui donne

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}+\frac{\Gamma'\left(u+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)}=-2\log 2+2\frac{\Gamma'(2u)}{\Gamma(2u)}, \tag{2}$$

puis faisant $u=\frac{1}{2}$.

On a ensuite en dérivant deux fois l'équation

$$\Gamma(u)\,\Gamma(1-u)=\frac{\pi}{\sin\pi u},$$

$$\Gamma''(u)\,\Gamma(1-u)-2\,\Gamma'(u)\,\Gamma'(1-u)+\Gamma(u)\,\Gamma''(1-u)=\frac{\pi^3}{\sin\pi u}+2\frac{\pi^3\cos^2\pi u}{\sin^3\pi u}$$

et, pour $u=\frac{1}{2}$,

$$\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\left[(C+2\log 2)^2+\frac{\pi^2}{2}\right]. \tag{3}$$

Pour avoir $\Gamma''(1)$ dérivons la relation (2)

$$(4)\qquad \frac{\Gamma''(u)}{\Gamma(u)} - \left[\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right]^2 + \frac{\Gamma''\left(u+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)} - \left[\frac{\Gamma'\left(u+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)}\right]^2 = 4\left[\frac{\Gamma''(2u)}{\Gamma(2u)} - \left[\frac{\Gamma'(2u)}{\Gamma(2u)}\right]^2\right]$$

puis faisons $u=\frac{1}{2}$,

$$(5)\qquad \Gamma''(1) = C^2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

II. Pour calculer $\Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma'''(1)$ on peut procéder par voie intégrale, en formant le produit

$$-C\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) = 32\int\int e^{-(x^2+y^2)}\, x\log x\,(\log y)^2\, dx\, dy,$$

l'intégrale double étant étendue à l'angle droit xOy des axes de coordonnées. En coordonnées polaires, la même intégrale est

$$-C\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) = 32\int\int e^{-r^2} r^2 \cos\theta\,(\log r\cos\theta)\,(\log r\sin\theta)^2\, dr\, d\theta$$

où r (rayon vecteur) varie de 0 à ∞ et θ (angle polaire) de 0 à $\frac{\pi}{2}$. En développant

$$-C\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) = 32\int_0^\infty e^{-r^2} r^2 (\log r)^3\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta$$

$$+32\int_0^\infty e^{-r^2} r^2 (\log r)^2\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,[\log\cos\theta + 2\log\sin\theta]\, d\theta$$

$$+32\int_0^\infty e^{-r^2} r^2 \log r\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,[2\log\cos\theta\log\sin\theta + (\log\sin\theta)^2]\, d\theta$$

$$+32\int_0^\infty e^{-r^2} r^2\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\log\cos\theta\,(\log\sin\theta)^2\, d\theta.$$

L'intégration par parties donne

$$2^{n+2}\int_0^\infty e^{-r^2} r^2 (\log r)^n\, dr = 2^{n+1}\int_0^\infty e^{-r^2} (\log r)^n\, dr$$

$$+ n\, 2^{n+1}\int_0^\infty e^{-r^2} (\log r)^{n-1}\, dr$$

$$= \Gamma^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\, n\, \Gamma^{(n-1)}\left(\frac{1}{2}\right), \qquad (n = 3, 2, 1)$$

puis

$$4\int_0^\infty e^{-r^2} r^2\, dr = 2\int_0^\infty e^{-r^2}\, dr = \sqrt{\pi}.$$

On a ainsi en posant

$$I_n = 32\int_0^\infty e^{-r^2} r^2 (\log r)^n\, dr$$

les valeurs

$$I_3 = \Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right) + 6\, \Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$I_2 = 2\, \Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) + 8\, \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$I_1 = 4\, \Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) + 8\sqrt{\pi}$$

$$I_0 = 8\sqrt{\pi}.$$

Calculons, d'autre part, les intégrales relatives à θ. La première

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = 1,$$

la seconde J_2 devient, en posant $\sin\theta = s$

$$J_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,[\log\cos\theta + 2\log\sin\theta]\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 \log(1-s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \log(1+s)\,ds + 2\int_0^1 \log s\,ds = -3+\log 2;$$

la troisième J_3 est

$$J_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,[2\log\cos\theta\log\sin\theta + (\log\sin\theta)^2]\,d\theta$$

$$=\int_0^1 \log(1-s)\log s\,ds + \int_0^1 \log(1+s)\log s\,ds + \int_0^1 (\log s)^2\,ds$$

ou, d'après les formules connues,

$$\int_0^1 \frac{\log(1-s)}{s}\,ds = -\frac{\pi^2}{6}, \quad \int_0^1 \frac{\log(1+s)}{s}\,ds = \frac{\pi^2}{12},$$

$$J_3 = -\frac{\pi^2}{4} - 2\log 2 + 6.$$

Enfin la quatrième J_4 s'écrit

$$J_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\log\cos\theta\,(\log\sin\theta)^2 = A+B,$$

avec

$$A=\frac{1}{2}\int_0^1 \log(1-s)\,(\log s)^2\,ds$$

$$B=\frac{1}{2}\int_0^1 \log(1+s)\,(\log s)^2\,ds.$$

On a

$$\log(\text{I}-s)=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{s^n}{n},\quad \int_0^1 s^n(\log s)^2\,ds=\frac{2}{(n+\text{I})^3},$$

donc

$$A=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\text{I}}{n(n+\text{I})^3}=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{\text{I}}{n}-\frac{\text{I}}{n+\text{I}}\right)-\frac{\text{I}}{(n+\text{I})^2}-\frac{\text{I}}{(n+\text{I})^3}.$$

En employant les notations suivants

$$S_k=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\text{I}}{n^k},\quad S'_k=\sum_{n=1}^{n=\infty}(-\text{I})^{n-1}\frac{\text{I}}{n^k},\quad S''_k=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\text{I}}{(2n-\text{I})^k},$$

on a donc enfin

$$A=-(3-S_2-S_3).$$

On obtient de même

$$B=\sum_{n=1}^{n=\infty}(-\text{I})^{n-1}\left[\frac{\text{I}}{n}-\frac{\text{I}}{n+\text{I}}-\frac{\text{I}}{(n+\text{I})^2}-\frac{\text{I}}{(n+\text{I})^3}\right]$$

$$B=-3+2S'_1+S'_2+S'_3.$$

La quatrième intégrale relative à θ est donc

$$J_4=A+B=2S'_1+S'_2+S'_3+S_2+S_3-6;$$

mais on a

$$S'_1=\log 2,\quad S_2=\frac{\pi^2}{6},\quad S_k-S'_k=\frac{\text{I}}{2^{k-1}}S_k,\quad 2S''_k=S_k+S'_k,$$

$$S'_2=\frac{\text{I}}{2}S_2=\frac{\pi^2}{\text{I}2},\quad S'_3=\frac{3}{4}S_3,$$

donc

$$J_4=2\log 2+\frac{\pi^2}{4}+\frac{7S_3}{4}-6.$$

Finalement

$$-C\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)=I_3 J_1+I_2 J_2+I_1 J_3+I_0 J_4$$

$$=\Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right)+6\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)+\left[\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)+4\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\right](2\log 2-6)$$

$$+\left[\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)+2\sqrt{\pi}\right](-\pi^2-8\log 2+24)$$

$$+\sqrt{\pi}(16\log 2+2\pi^2+14 S_3-48)$$

d'où on tire, en posant

$$C+2\log 2=D$$

et rappelant les formules

$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{\pi}\,D,\quad \Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\left(D^2+\frac{\pi^2}{2}\right)$$

$$\frac{\Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}=-D^3-\frac{3\pi^2}{2}D-14 S_3. \tag{6}$$

Pour obtenir $\Gamma'''(1)$, il suffit de dériver (4) puis de faire $u=\frac{1}{2}$, ce qui donne

$$\frac{\Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}-\frac{3\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}+2\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right]^3$$

$$=7\left[\Gamma'''(1)-3\Gamma''(1)\Gamma'(1)+2\Gamma'(1)^3\right]$$

d'où, en réduisant

$$\Gamma'''(1)=-C^3-\frac{\pi^2}{2}C-2 S_3. \tag{7}$$

On voit que, en considérant S_k comme un coefficient connu, les quantités $\Gamma^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma^{(n)}(1)$, pour $n=1, 2, 3$ contiennent C au degré n. Cette propriété est générale: on peut l'établir par la voie du calcul intégral, en suivant la méthode précédente; mais il est plus simple d'employer une méthode différentielle qui fournira, en même temps, une vérification des formules trouvées.

III. On a, comme il est connu

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \lim_{\nu=\infty}\left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \cdots - \frac{1}{x+\nu} + \log \nu\right].$$

En dérivant

$$\frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - \left[\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right]^2 = \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(x+n)^2} + \cdots\right] \tag{8}$$

d'où, pour $x=1$, en remarquant que $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$

$$\Gamma''(1) = C^2 + \frac{\pi^2}{6};$$

pour $n = \frac{1}{2}$, on a de même

$$\frac{\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} - D^2 = 4\, S''_2;$$

mais

$$S''_2 = \frac{1}{2}(S_2 + S'_2) = \frac{3}{4} S_2 = \frac{\pi^2}{8}$$

donc, comme on l'a trouvé,

$$\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\left(D^2 + \frac{\pi^2}{2}\right).$$

En dérivant encore une fois (8) on a

$$\frac{\Gamma'''(x)}{\Gamma(x)} - 3\frac{\Gamma''(x)\,\Gamma'(x)}{\Gamma^2(x)} + 2\left[\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right]^3$$

$$= -2\left[\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(x+n)^3} + \cdots\right]$$

d'où pour $x=1$ et pour $x = \frac{1}{2}$

$$\Gamma'''(1) = -3\, C\left(C^2 + \frac{\pi^2}{6}\right) + 2\, C^3 - 2\, S_3$$

ce qui donne l'expression (7) et

$$\frac{\Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}=-3D\left(D^2+\frac{\pi^2}{2}\right)+2D^3-16S''_3$$

ce qui, d'après la relation

$$S''_3=\frac{1}{2}(S_3+S'_3)=\frac{7}{8}S_3$$

donne la formule (6).

Pour démontrer que $\Gamma^{(n)}(1)$ et $\Gamma^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)$ sont des polynomes de degré n en C dont les coefficients dépendent des sommes S_k, écrivons

$$\Gamma'(x)=\Gamma(x)\,\Sigma(x)$$

et dérivons $(n-1)$ fois; nous avons

$$\begin{aligned}(9)\qquad \Gamma^{(n)}(x)=\Sigma(x)\,\Gamma^{(n-1)}(x)&+\frac{n-1}{1}\Sigma'(x)\,\Gamma^{(n-2)}(x)\\ &+\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\Sigma''(x)\,\Gamma^{(n-3)}(x)+\cdots\cdots\\ &+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p)}{1\,.\,2\ldots p}\Sigma^{(p)}(x)\,\Gamma^{(n-p-1)}(x)+\cdots\\ &+\Sigma^{(n-1)}(x)\,\Gamma(x).\end{aligned}$$

En faisant ensuite $x=1$ ou $x=\frac{1}{2}$ on a une équation démontrant le théorème. Par exemple pour $x=1$ on remarquera que $\Sigma(1)=-C$, $\Sigma'(1)=S_2$, $\Sigma''(1)=-1\,.\,2\,S_3,\ldots$

$$\Sigma^{(p)}(1)=(-1)^{p-1}\,1\,.\,2\,\ldots\,(p-1)\,p\,S_{p+1}.$$

On voit que, si le théorème est vrai pour les dérivées d'ordre $1, 2, \ldots (n-1)$, il l'est pour celle d'ordre n.

Un théorème analogue, qui se démontre de même, a lieu pour $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)$.

On trouve notamment $\Gamma^{\mathrm{IV}}(1)=C^4+\pi^2C^2+8S_3C+3S_2^2+6S_4$ où $S_2=\frac{\pi^2}{6}$ et

$$\frac{\Gamma^{\mathrm{IV}}\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}=D^4+3\pi^2D^2+56S_3D+\frac{3\pi^4}{4}+80S_4.$$

Voici, à cet égard, un théorème digne d'attention. La quantité $\Gamma^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)$ s'exprime en D par le même polynôme que $\Gamma^{(n)}(1)$ en C, à condition de remplacer, dans $\Gamma^{(n)}(1)$, les sommes S_k par les quantités $2^k S''_k$, c'est à dire par $(2^k-1)S_k$. En effet, en écrivant $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\Sigma(x)$ et dérivant $(n-1)$ fois, on obtient en faisant successivement $x=1$ et $x=\frac{1}{2}$ deux relations récurrentes identiques entre les polynômes $\Gamma^{(k)}(1)$, et $\frac{\Gamma^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$ avec cette seule différence que dans le deuxième membre, S_k est remplacé par $2^k S''_k$. Par exemple $\Gamma''(1)=C^2+S_2$, $\frac{\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}=D^2+4S''_2$, où $S_2=\frac{\pi^2}{6}$, $S''_2=\frac{3}{4}S_2=\frac{\pi^2}{8}$. De même $\Gamma'''(1)=-C^3-\frac{\pi^2}{2}C-2S_3$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma'''\left(\frac{1}{2}\right)=-D^3-\frac{3\pi^2}{2}D-14S_3.$$

Nous poserons $\Gamma^{(n)}(1)=P_n(C)$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)=Q_n(D)$, P_n et Q_n désignant des polynômes de degré n. On a alors la proposition suivante

$$\frac{dP_n}{dC}=-nP_{n-1},\quad \frac{dQ_n}{dD}=-nQ_{n-1}$$

ce qui fait rentrer les polynômes $(-1)^n P_n(C)$ et $(-1)^n Q_n(D)$ dans la catégorie générale des polynômes que j'ai étudiés autrefois (Annales de l'École Normale Supérieure, 2ième série 6. IX, 119—144, 1880). En effet, on vérifie cette proposition pour $n=1, 2, 3$; on démontre ensuite que, si elle est vraie pour les polynômes $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$, elle l'est pour P_n. D'après (9) on a

$$(9^{\text{bis}})\quad \begin{aligned} P_n=&-CP_{n-1}+(n-1)S_2P_{n-2}+\cdots+(-1)^{p-1}(n-1)(n-2)\ldots(n-p)S_{p+1}P_{n-p-1}\\ &+\cdots+(-1)^{n-3}(n-1)(n-2)\ldots 2\,.\,S_{n-1}P_1+(-1)^{n-2}(n-1)\ldots 1\,.\,S_n. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à C et admettant la proposition pour $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$ on a

$$\begin{aligned} \frac{dP_n}{dC}=&(n-1)CP_{n-2}-P_{n-1}-(n-1)(n-2)S_2P_{n-3}+\cdots\\ &+(-1)^{p-2}(n-1)(n-2)\ldots(n-p-1)S_{p+1}P_{n-p-2}+\cdots\\ &+(-1)^{n-2}(n-1)(n-2)\ldots 2\,.\,1\,.\,S_{n-1}. \end{aligned}$$

Or ceci est égal à $-n P_{n-1}$ comme il est aisé de le vérifier à l'aide de la relation (9^{bis}) où on change n en $(n-1)$.

IV. On peut également obtenir les formules analogues à celle qui donne $-C\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)$ ou encore $\Gamma'(1)\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)$ par la voie de la différentiation. Pour cela on part de

$$\Gamma(u)\,\Gamma(v)=\Gamma(u+v)\,B(u,v)$$

et on dérive p fois par rapport à u et q fois par rapport à v, puis on donne à u et à v les valeurs 1 ou $\frac{1}{2}$, combinées de toutes les façons possibles, ce qui donne trois combinaisons. On arrive ainsi à des expressions contenant les intégrales

$$\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}(\log t)^h\,[\log(1-t)]^k\,dt$$

où

$$h=0, 1, 2, \ldots p,$$

$$k=0, 1, 2, \ldots q,$$

pour $u=1$ ou $\frac{1}{2}$, $v=1$ ou $\frac{1}{2}\cdot$ Je ne m'arrêterai pas aux formules correspondantes, faciles à établir. Je signale seulement les intégrales définies

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\theta\,d\theta=-\frac{\pi}{2}\log 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\theta\log\sin\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}\left[(\log 2)^2-\frac{\pi^2}{24}\right]\cdot$$

Dans les formules correspondantes C disparait.

Le même fait se présente si l'on part de la formule

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}=\int_0^\infty \frac{dx}{x}\left(e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^u}\right)$$

d'où en dérivant

$$\frac{\Gamma''(u)}{\Gamma(u)}-\left[\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right]^2=\int_0^\infty \frac{dx}{x}\cdot\frac{\log(1+x)}{(1+x)^u}$$

et pour $u=1$

$$\frac{\pi^2}{6}=\int_0^\infty \frac{dx}{x}\cdot\frac{\log(1+x)}{1+x}$$

formule où C disparait; de même dérivant de nouveaux et faisant $x=1$, on a, après avoir remplacé $\Gamma'''(1)$ par sa valeur (7),

$$2\,S_3=\int_0^\infty \frac{[\log(1+x)]^2}{x(1+x)}\,dx.$$

V. En faisant dans l'expression

$$-C=\int_0^\infty e^{-u}\log u\,du,$$

$$u=\alpha t,\qquad \alpha>0$$

on a

$$-\frac{C+\log\alpha}{\alpha}=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\log t\,dt,$$

ce qui montre d'abord que

$$\int_0^\infty e^{-kt}\log t\,dt=0$$

pour

$$k=e^{-C}.$$

Dérivant ensuite un certain nombre de fois par rapport à α, on a

$$-\frac{M_{n-1}(C+\log\alpha)}{\alpha^n}+\frac{N_{n-1}}{\alpha^n}=\int_0^\infty t^n e^{-\alpha t}\log t\,dt,$$

où les coefficients M_i, N_i sont des entiers. Dérivant encore une fois par rapport à α, on a

$$M_n=n\,M_{n-1},\ N_n=n\,N_{n-1}+M_{n-1}$$

avec $M_0 = 1$, $N_0 = 0$. Donc

$$M_n = 1 . 2 \ldots n, \quad N_n = 1 . 2 \ldots n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

En faisant $\alpha = 1$, on voit que

$$-M_n C + N_n = \int_0^\infty t^{n+1} e^{-t} \log t \, dt.$$

On voit aussi que

$$\int_0^\infty t^{n+1} e^{-k_n t} \log t \, dt = 0$$

pour

$$k_n = e^{\frac{M_n}{N_n} - C} = e^{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - C}.$$

Si n est très grand, la valeur asymptotique de k_n est n, car

$$\frac{k_n}{n} = e^{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - C - \log n}$$

$$\lim \frac{k_n}{n} = 1,$$

pour n infini.

Il est evident que des formules analogues peuvent être obtenues pour $\int_0^\infty t^{n+1} e^{-\alpha t} (\log t)^h \, dt$. Par exemple

$$\frac{(C + \log \alpha)^2 + \frac{\pi^2}{6}}{\alpha} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} (\log t)^2 \, dt$$

expression qui ne s'annule pour aucune valeur réelle de $\log \alpha$ et qui donne des formules analogues aux précédentes si l'on dérive par rapport à α.

On a de même

$$\frac{-(C + \log \alpha)^3 - \frac{\pi^2}{2}(C + \log \alpha) - 2 S_3}{\alpha}$$

$$= \int_0^\infty e^{-\alpha t} (\log t)^3 \, dt$$

où l'intégrale s'annule pour une valeur réelle de $\log \alpha$. Et ainsi de suite, relations que l'on peut dériver par rapport à α.

On obtient les mêmes relations en partant de

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} \, dx$$

faisant $x = \alpha t$

$$\frac{\Gamma(p)}{\alpha^p} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} t^{p-1} \, dt,$$

dérivant par rapport à p et faisant ensuite $p = 1$ ou $p = \frac{1}{2}$. Si l'on pose $\log \alpha = x$, $\alpha = e^x$, l'intégrale

$$(10) \qquad e^x \int_0^\infty e^{-te^x} (\log t)^n \, dt$$

est un polynôme $R_n(x)$ de degré n en x. On a

$$(11) \qquad \frac{dR_n}{dx} = -n R_{n-1}$$

ce qui fait rentrer $(-1)^n R_n$ dans la catégorie des polynômes déjà cités. D'après la théorie générale développée dans les Annales de l'École normale pour 1880 la fonction génératrice

$$1 + \frac{h}{1} R_1(x) + \frac{h^2}{1 . 2} R_2(x) + \cdots + \frac{h^n}{1 . 2 \ldots n} R_n(x) + \cdots$$

est de la forme

$$e^{-hx} f(h).$$

On doit donc pour déterminer $f(h)$ avoir, d'après l'expression du polynôme $R_n(x)$ par l'intégrale (10)

$$e^{-hx} f(h) = e^x \int_0^\infty e^{-te^x} e^{h \log t} \, dt$$

$$e^{-hx} f(h) = e^x \int_0^\infty e^{-te^x} t^h \, dt$$

ou en faisant

$$te^x = u, \quad e^x\,dt = du$$

$$e^{-hx} f(h) = e^{-hx} \int_0^\infty e^{-u} u^h\,du$$

d'où

$$f(h) = \Gamma(h+1) = h\,\Gamma(h).$$

La fonction génératrice des polynômes $R_n(x)$ est donc $e^{-hx}\Gamma(h+1)$.

La propriété (11) des polynômes $R_n(x)$ résulte aussi de ce fait, qui saute aux yeux, pour $n=1, 2, 3,$ que

$$R_n(x) = P_n(C+x).$$

En effet on a

$$R_n(\log\alpha) = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} (\log t)^n\,dt.$$

Faisons le changement de variable

$$\alpha t = u, \quad \alpha\,dt = du,$$

$$R_n(\log\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} (\log u - \log\alpha)^n\,du$$

$$= P_n(C) - n\log\alpha\, P_{n-1}(C) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} (\log\alpha)^2 P_{n-2}(C) + \cdots$$

$$= P_n(C) + \log\alpha \frac{dP_n}{dC} + (\log\alpha)^2 \frac{d^2 P_n}{dC^2} + \cdots$$

$$= P_n(C + \log\alpha).$$

La proposition est ainsi démontrée.

Les expressions et les propriétés des polynômes $P_n(C)$ et $R_n(x)$ résultent immédiatement de l'expression trouvée pour la fonction génératrice $e^{-hx}\Gamma(h+1)$ des polynômes $R_n(x)$. On a en effet, d'après une formule connue,

$$\Gamma(h+1) = e^{-hC + \frac{1}{2} S_2 h^2 + \frac{1}{3} S_3 h^3 + \cdots}$$

alors

$$e^{-hx}\Gamma(h+1)=e^{-h(C+x)}e^{\frac{1}{2}S_2h^2+\frac{1}{3}S_3h^3+\cdots}$$

$$=\sum\frac{h^n}{1.2\ldots n}R_n(x).$$

On peut remarquer d'autre part que les polynômes $R_n(x)$ ont le moindre nombre possible de racines réelles, zéro si n est pair, une si n est impair. En effet, si n est pair l'expression de $R_n(x)$ par une intégrale définie montre que $R_n(x)$ est *positif*, quel que soit x; si n est impair, la relation $\frac{d\,R_n(x)}{dx}=-n\,R_{n-1}$ montre que $R_n(x)$ a, au plus, une racine réelle.