CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES NOMBRES PREMIERS.

PAR

HELGE VON KOCH

À STOCKHOLM.

Ce qui est peut-être le plus attrayant dans la théorie des nombres premiers, c'est le rapport profond qui existe entre ces nombres et les zéros imaginaires de la fonction $\zeta(s)$ de RIEMANN. Ce rapport, malgré tout l'intérêt qu'il a excité depuis l'apparition du mémoire de RIEMANN, n'est encore connu que très incomplètement.

Rappelons, en quelques mots, les résultats concernant la fonction numérique $\psi(x)$ de TCHEBYCHEFF qui correspondent aux progrès faits dans l'étude de la fonction $\zeta(s)$.

D'après RIEMANN, $(s-1)\zeta(s)$ est une fonction entière possédant les zéros réels

$$-2, -4, -6, \ldots$$

et une infinité de zéros imaginaires

$$\varrho = \alpha + i\beta$$

où la partie réelle satisfait à la condition

$$\alpha \leqq 1 .$$

Tant que le signe d'égalité dans cette formule n'était pas exclu on ne pouvait pas aller plus loin que TCHEBYCHEFF. Tout ce qu'on savait c'était donc que $\frac{\psi(x)}{x}$ reste compris entre deux nombres fixes et que, si $\frac{\psi(x)}{x}$ a une limite pour $x=\infty$, cette limite est $=1$.

Après que M. HADAMARD avait démontré, en 1893, le théorème fondamental sur la décomposition de $\zeta(s)$ en facteurs primaires et dès que MM. DE LA VALLÉE POUSSIN et HADAMARD étaient parvenus, en 1896, au résultat

$$\alpha < 1,$$

ces géomètres purent établir le fait capital

$$\lim \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

ou bien

$$\psi(x) = x + x\delta(x), \quad \lim \delta(x) = 0.$$

Et quand M. DE LA VALLÉE POUSSIN réussit, en 1899, à trouver pour α une limite supérieure moindre que 1, savoir (pour tout zéro $\varrho = \alpha + i\beta$)

$$\alpha < 1 - \frac{A}{\log \beta} \qquad (A = \text{constante positive})$$

il parvint, dans le même travail, à une limite supérieure pour la différence $\left|\frac{\psi(x)}{x} - 1\right|$, savoir

$$|\delta(x)| < K\sqrt{\log x}\; e^{-\sqrt{A \log x}} \qquad (K = \text{constante}).$$

C'est là le résultat le plus précis sur $\psi(x)$ obtenu jusqu'à présent, si l'on ne s'appuie que sur les théorèmes rigoureusement établis relatifs à $\zeta(s)$. Or RIEMANN a considéré comme très probable la propriété suivante

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad (\text{pour tous les zéros } \varrho).$$

En admettant seulement

$$\alpha \leqq \frac{1}{2} + c \qquad \left(0 \leqq c < \frac{1}{2}\right)$$

on parviendrait, par une méthode que j'ai donnée il y a quelques années, à l'inégalité

$$|\delta(x)| < Kx^{-\frac{1}{2}+c}(\log x)^2$$

qui, dans l'hypothèse $c = 0$ c'est-à-dire $\alpha = \frac{1}{2}$, se réduit à

$$|\delta(x)| < Kx^{-\frac{1}{2}}(\log x)^2.$$

En somme, à chaque progrès qu'on a fait ou qu'on fera dans la recherche d'une limite supérieure pour α correspond une diminution de la limite supérieure de $|\psi(x)-x|$.

Or, quel progrès qu'on puisse faire dans cette direction, on n'arrivera jamais à une limite supérieure pour $|\psi(x)-x|$ essentiellement moindre que $Kx^{\frac{1}{2}}(\log x)^2$. En effet, M. PHRAGMÉN a démontré que l'on a

$$|\psi(x)-x|>Kx^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \qquad (K=\text{constante},\ \varepsilon>0),$$

ε étant arbitrairement petit, pour une infinité de valeurs de x supérieures à un nombre quelconque donné.

Donc, pour arriver à une évaluation plus exacte de $\psi(x)$ il faut ajouter à x des termes complémentaires. Lesquels?

On se rappelle la formule suivante, démontrée par M. VON MANGOLDT:

$$\psi(x)=x-\log 2\pi-\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)-\sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho}$$

où $\psi(x)$ doit être remplacé par $\dfrac{\psi(x-0)+\psi(x+0)}{2}$ pour un x où il y a discontinuité. C'est la formule pour $\psi(x)$ correspondante à la célèbre formule de RIEMANN, démontrée également par M. VON MANGOLDT, pour la fonction $f(x)= F(x)+\frac{1}{2}F\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{3}F\left(x^{\frac{1}{3}}\right)+\cdots$, où $F(x)=$ nombre des nombres premiers $\leqq x$.

La convergence de la serie

$$\sum\frac{x^\varrho}{\varrho}$$

étendue à tous les zéros imaginaires ϱ de $\zeta(s)$, n'est ni absolue, ni uniforme. Quand x s'approche d'une puissance entière d'un nombre premier, la convergence devient infiniment lente et même pour d'autres valeurs de x la série converge très lentement. Il paraît que le calcul des termes correspondant à un certain nombre de zéros ϱ n'a aucune influence sensible sur la valeur cherchée et l'on pouvait être tenté d'en conclure que la détermination de tous les zéros ϱ inférieurs, en valeur absolue, à un nombre donné R n'ait qu'une influence négligeable pour l'évaluation de $\psi(x)$.

Cependant les résultats auxquels j'arrive dans le présent travail montrent qu'il y a un rapport intime entre les nombres premiers inférieurs à x et les zéros ϱ de module moindre que x. Je trouve, par exemple, que pour calculer

$\psi(x)$ avec une erreur moindre que $Kx^{1-\mu}(\log x)^2$ ($0 < \mu < 1$, K = constante) il suffit de connaître ceux des zéros ϱ où le module de la partie imaginaire est $< x^\mu$.

La démonstration de ces résultats est basée sur une nouvelle expression de $\psi(x)$ où les termes $\frac{x^\varrho}{\varrho}$ figurant dans la formule précédente se trouvent remplacés par

$$\frac{x^\varrho}{\varrho}\Gamma\left(1-\frac{\varrho}{s}\right)$$

Γ désignant la fonction Gamma ordinaire et s désignant un paramètre positif.

Après avoir démontré cette formule, nous l'appliquerons d'abord à l'étude de la différence

$$|\psi(x)-x|$$

et nous retrouverons par là d'une manière rapide les résultats asymtotiques relatifs à $\psi(x)$ déjà connus et parviendrons en même temps à les compléter sur certains points.

Dans le dernier numéro nous aborderons cette question difficile à laquelle nous avons fait allusion, savoir la recherche des termes complémentaires qu'il faut ajouter à x pour représenter $\psi(x)$ avec une approximation voulue.

1. Je commence par rappeler quelques formules démontrées dans un mémoire précédent (Acta Mathematica, t. 24, p. 159).

Désignons par $\Theta(x)$ la somme des logarithmes néperiens de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas x et définissons, avec TCHEBYCHEFF, la fonction $\psi(x)$ par l'égalité

$$\psi(x) = \Theta(x) + \Theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \Theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \cdots$$

Mettons

$$\Psi(x, s) = \Sigma\left(1 - e^{-\left(\frac{x}{p}\right)^s}\right)\log p + \Sigma\left(1 - e^{-\left(\frac{x}{p^2}\right)^s}\right)\log p + \cdots \tag{1}$$

où les sommes s'étendent à tous les nombres premiers

$$p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$$

Ici, et dans tout ce qui suit, x et s désignent des nombres réels positifs et $s > 1$. La série définissant $\Psi(x, s)$ converge absolument et aussi uniformément par rapport à x dans chaque intervalle fini et par rapport à s dans l'intervalle

$$\text{I} + \varepsilon \leqq s \leqq +\infty$$

ε étant positif et arbitrairement petit.

Introduisant la fonction

$$P(x, s, \alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\text{I}}{\nu s + \alpha} \frac{(-\text{I})^{\nu-1}}{\lfloor \nu} x^{\nu s}$$

on obtient pour $\Psi(x, s)$ la représentation suivante:

$$\Psi(x, s) = (\text{I} - \log 2\pi)(\text{I} - e^{-x^s}) + P(x, s, -\text{I}) - \sum_{n=1}^{\infty}\left[P(x, s, 2n) - \frac{\text{I}}{2n}(\text{I} - e^{-x^s})\right] - \sum_{\varrho}\left[P(x, s, -\varrho) + \frac{\text{I}}{\varrho}(\text{I} - e^{-x^s})\right] \tag{2}$$

la dernière somme s'étendant à tous les zéros imaginaires ϱ de la fonction $\zeta(s)$. Les deux séries figurant dans (2) convergent absolument et uniformément par rapport à x dans tout intervalle fini.

Enfin, pour la fonction $P(x, s, \alpha)$ on a les formules suivantes

$$P(x, s, \alpha) = x^{-\alpha}\int_0^x y^{\alpha-1}(\text{I} - e^{-y^s})\,dy \tag{3}$$

$$P(x, s, \alpha) = \frac{\text{I}}{\alpha}(\text{I} - e^{-x^s}) - \frac{x^{-\alpha}}{\alpha}\int_0^x s y^{\alpha+s-1} e^{-y^s} dy \tag{4}$$

$$P(x, s, \alpha) = \frac{\text{I}}{\alpha}(\text{I} - e^{-x^s}) - \frac{s x^s e^{-x^s}}{\alpha(s+\alpha)} - \frac{s^2}{\alpha(s+\alpha)} \cdot x^{-\alpha}\int_0^x y^{\alpha+2s-1} e^{-y^s} dy. \tag{5}$$

2. Nous allons transformer les différents termes de la formule (2).

Pour $P(x, s, -\text{I})$ on trouve facilement,[1] par l'application de la formule (3):

$$P(x, s, -\text{I}) = x - \text{I} + \delta$$

avec

[1] loc. cit. p. 172.

$$|\delta| < K \cdot \frac{x}{s}$$

ce que nous écrivons

$$P(x, s, -1) = x - 1 + \left\{\frac{x}{s}\right\} \tag{6}$$

en convenant de donner généralement au symbole $\{f(x, s)\}$ le sens suivant: $f(x, s)$ étant une fonction positive donnée, $\{f(x, s)\}$ est une fonction qui, pour des valeurs de x, s supérieures respectivement à certaines valeurs fixes x_0, s_0, reste inférieure, en valeur absolue, à $K . f(x, s)$, K étant une constante (indépendante de x et de s).[1]

Pour évaluer un terme de la forme

$$-\left[P(x, s, 2n) - \frac{1}{2n}(1 - e^{-x^s})\right]$$

nous employons la formule (4) qui exprime ce terme par l'intégrale

$$\int_0^x \frac{s}{2n}\left(\frac{y}{x}\right)^{2n} y^{s-1} e^{-y^s} dy.$$

Posons, pour un instant,

$$f(y) = \frac{1}{2n}\left(\frac{y}{x}\right)^{2n};$$

écrivons l'intégrale sous la forme

$$\int_0^x s y^{s-1} e^{-y^s} f(y)\, dy = \int_0^{1-h} + \int_{1-h}^{1+h} + \int_{1+h}^{x}$$

h étant un nombre positif < 1. Dans la première des intégrales à droite on a

$$0 \leqq y \leqq 1 - h, \quad e^{-y^s} < 1,$$

d'où

$$\int_0^{1-h} < \frac{1}{x^{2n}} \int_0^{1-h} s y^{s+2n-1} dy = \frac{s}{s+2n}\left(\frac{1-h}{x}\right)^{2n} (1-h)^s;$$

[1] Dans tout ce qui suit, K conserve cette signification mais pourra différer de l'une formule à l'autre.

dans la troisième:

$$1 + h \leqq y \leqq x, \ y^s e^{-y^s} < (1 + h)^s e^{-(1+h)^s}$$

d'où:

$$\int_{1+h}^{x} < s(1 + h)^s e^{-(1+h)^s} \cdot \frac{1}{(2n)^2};$$

dans la seconde on a

$$1 - h \leqq y \leqq 1 + h, \ f(y) = f(1) + (y - 1) f'(\eta)$$

$$1 - h < \eta < 1 + h, \ |y - 1| < 2h, \ f'(\eta) = \frac{\eta^{2n-1}}{x^{2n}}$$

et comme

$$\int_{1-h}^{1+h} s y^{s-1} e^{-y^s} dy = e^{-(1-h)^s} - e^{-(1+h)^s}$$

il vient

$$\int_{1-h}^{1+h} = \frac{1}{2n} \frac{1}{x^{2n}} + \delta$$

où

$$|\delta| < \frac{1}{2n} \frac{1}{x^{2n}} (1 - e^{-(1-h)^s} + e^{-(1+h)^s})$$
$$+ \frac{2h(1 + h)^{2n-1}}{x^{2n}} (e^{-(1-h)^s} - e^{-(1+h)^s}).$$

Remarquant que

$$1 - e^{-(1-h)^s} < (1 - h)^s < \frac{1}{(1 + h)^s}$$

$$e^{-(1+h)^s} < \frac{1}{(1 + h)^s}$$

$$(1 + h)^s e^{-(1+h)^s} < \frac{6}{(1 + h)^{2s}}$$

et combinant les formules précédentes, il vient

$$-\left[P(x, s, 2n) - \frac{1}{2n}(1 - e^{-x^s})\right] = \frac{1}{2n} \frac{1}{x^{2n}} + \delta_n$$

où

$$|\delta_n| < \frac{6s}{(1+h)^{2s}} \cdot \frac{1}{(2n)^2} + \frac{3}{(1+h)^s} \frac{1}{x^{2n}} + 2h\left(\frac{1+h}{x}\right)^{2n}.$$

Disposons enfin de h en prenant

$$h = \frac{\log s}{s}$$

et remarquons qu'on a alors

$$(1+h)^s = s(1+\varepsilon)$$

ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{s}$; nous obtenons

$$|\delta_n| < A \, . \frac{\log s}{s}\left(\frac{1}{(2n)^2} + \left(\frac{1+h}{x}\right)^{2n}\right)$$

A étant indépendant de x, s, n.

Pour $s > 1$ on a $h < 1$ ce qui montre que la somme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\delta_n|$ converge pour $x \geq 2$ et reste inférieur à $\frac{\log s}{s}$ multiplié par une constante. Nous obtenons donc finalement en remplaçant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \frac{1}{x^{2n}}$$

par sa valeur $-\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[P(x, s, 2n) - \frac{1}{2n}(1 - e^{-x^s})\right] = -\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^n}\right) + \left\{\frac{\log s}{s}\right\}. \tag{7}$$

Pour transformer les termes suivants qui dépendent des zéros ϱ, nous employons la formule (5) et obtenons

$$P(x, s, -\varrho) + \frac{1}{\varrho}(1 - e^{-x^s}) = \frac{s x^s e^{-x^s}}{\varrho(s-\varrho)} + \frac{s x^\varrho}{\varrho(s-\varrho)} \int_0^x s y^{2s-\varrho-1} e^{-y^s} dy$$

$$= \frac{s x^s e^{-x^s}}{\varrho(s-\varrho)} - \frac{s x^\varrho}{\varrho(s-\varrho)} \int_x^\infty s y^{2s-\varrho-1} e^{-y^s} dy + \frac{s x^\varrho}{\varrho(s-\varrho)} \int_0^\infty s y^{2s-\varrho-1} e^{-y^s} dy.$$

Dans la dernière de ces intégrales nous prenons

$$t = y^s$$

comme variable d'intégration ce qui donne

$$\int_0^\infty s y^{2s-\varrho-1} e^{-y^s} dy = \int_0^\infty t^{\frac{s-\varrho}{s}} e^{-t} dt$$
$$= \frac{s-\varrho}{s} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right)$$

Γ ayant sa signification habituelle.

Pour évaluer l'intégrale

$$\int_x^\infty s y^{2s-\varrho-1} e^{-y^s} dy$$

nous rappelons que la partie réelle α de ϱ est comprise entre 0 et 1: on a donc (pour $x > 1$)

$$\left|\int_x^\infty s y^{2s-\varrho-1} e^{-y^s} dy\right| < \int_x^\infty s y^{2s-1} e^{-y^s} dy$$
$$= e^{-x^s}(1 + x^s).$$

Par là et en remarquant que (pour $s \geqq 2$)

$$|s - \varrho| \geqq |\varrho|$$

et que $|x^\varrho| \leqq x$ nous obtenons donc

$$P(x, s, -\varrho) + \frac{1}{\varrho}(1 - e^{-x^s}) = \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right) + \delta(x, s, \varrho)$$

où

$$|\delta(x, s, \varrho)| < s x e^{-x^s} \cdot \frac{K}{|\varrho|^2}$$

K étant indépendant de x, s, ϱ.

Faisons la somme par rapport à ϱ, nous aurons[1]

[1] D'après un théorème fondamental de M. Hadamard (Journal de Mathématiques, 1893) la série $\Sigma_\varrho \frac{1}{|\varrho|^\nu}$ converge déjà pour $\nu > 1$.

$$\sum_\varrho \left[P(x, s, -\varrho) + \frac{1}{\varrho}(1 - e^{-x^s})\right] = \sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right) + \{s x^{s+1} e^{-x^s}\} \tag{8}$$

le dernier terme tendant avec grande rapidité vers zéro quand x ou s augmente.

Dans ce qui suit, il nous suffit de savoir que ce terme satisfait à l'inégalité

$$|\{s x^{s+1} e^{-x^s}\}| < \left\{\frac{1}{s}\right\} < \frac{K}{s}$$

K étant une constante.

Combinant les formules (2), (6), (7), (8) il vient

$$\Psi(x, s) = x - \log 2\pi - \frac{1}{2} \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right) + \left\{\frac{x + \log s}{s}\right\}. \tag{9}$$

Le dernier terme est ici, comme on voit, inférieur à une constante dès que 'on prend $s \geqq x$.

3. D'autre part la fonction $\Psi(x, s)$ peut s'exprimer sous la forme suivante[1]

$$\Psi(x, s) = \int_0^x s \psi\left(\frac{x}{y}\right) y^{s-1} e^{-y^s} dy. \tag{10}$$

Soit h un nombre positif < 1 et écrivons cette intégrale sous la forme

$$\int_0^x = \int_0^{1-h} + \int_{1-h}^{1+h} + \int_{1+h}^x \tag{11}$$

On a toujours, d'après un lemme de M. Mertens[2]

$$\psi(x) < 2x;$$

il vient donc

[1] Voir p. 485 de mon article: Sur un théorème concernant les nombres premiers. Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Bd. 1. Stockholm 1904.

[2] Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78.

$$\int_0^{1-h} < 2x\int_0^{1-h} sy^{s-2}e^{-y^s}dy < 2x\int_0^{1-h} sy^{s-2}dy \tag{12}$$

$$= 2x\cdot\frac{s}{s-1}(1-h)^{s-1}$$

et

$$\int_{1+h}^{x} < 2x\int_{1+h}^{x} sy^{s-2}e^{-y^s}dy < 4x\int_{1+h}^{x} sy^{-s-2}dy$$

$$< 4x\cdot\frac{s}{s+1}\,\frac{1}{(1+h)^{s+1}}. \tag{13}$$

Pour calculer l'intégrale $\int_{1-h}^{1+h}$ nous désignons par $\overline{\psi}(x)$ une fonction ainsi définie: quand x n'est pas égal à la puissance p^λ d'un nombre premier p, on a $\overline{\psi}(x) = \psi(x)$; quand au contraire $x = p^\lambda$, $\overline{\psi}(x)$ désigne une valeur indéterminée entre les limites

$$\psi(x-0) \text{ et } \psi(x+0) = \psi(x)$$

ce qu'on peut écrire

$$\overline{\psi}(x) = \psi(x) - t\log x$$

$$(0 \leqq t \leqq 1)$$

D'après cette définition, il est clair que toute valeur comprise entre les limites

$$\psi\left(\frac{x}{1+h}\right) \text{ et } \psi\left(\frac{x}{1-h}\right)$$

peut s'écrire sous la forme $\overline{\psi}(\xi)$, ξ étant compris entre les limites

$$\frac{x}{1+h} \text{ et } \frac{x}{1-h}.$$

On a donc, d'après le théorème de la moyenne,

$$\int_{1-h}^{1+h} = \overline{\psi}(\xi)\int_{1-h}^{1+h} sy^{s-1}e^{-y^s}dy \tag{14}$$

$$= \overline{\psi}(\xi)\left(e^{-(1-h)^s} - e^{-(1+h)^s}\right)$$

$$= \overline{\psi}(\xi) + \delta$$

où

$$|\delta| < \overline{\psi}(\xi)\left(1 - e^{-(1-h)^s} + e^{-(1+h)^s}\right)$$

$$< \frac{2x}{1-h}\left((1-h)^s + \frac{1}{(1+h)^s}\right)$$

$$< \frac{4x}{1-h} \cdot \frac{1}{(1+h)^s}.$$

Le nombre ξ qui figure dans cette formule jouit d'une propriété importante dans la suite: quand x augmente d'une manière continue ξ augmente aussi d'une manière continue ou reste stationnaire et pour $x = \infty$ on a $\xi = \infty$.

C'est ce qu'on voit en remarquant que, pour toute valeur donnée de y, $\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ va en augmentant avec x $\left(\text{ou reste stationnaire jusqu'à ce que } \frac{x}{y} \text{ passe par une valeur } p^\lambda \text{ où } p = \text{nombre premier et } \lambda = \text{nombre positif entier}\right)$ et que, par suite, l'intégrale

$$\int_{1-h}^{1+h} s\,\psi\left(\frac{x}{y}\right) y^{s-1} e^{-y^s}\, dy$$

laugmente avec x (ou reste stationnaire) et finit par dépasser une limite donnée quelconque; d'après l'égalité (14) il en est donc de même de $\overline{\psi}(\xi)$ ce qui, vu la définition de $\overline{\psi}$, amène la propriété énoncée de ξ.

Disposons enfin de h en prenant

$$h = \frac{\log s}{s}$$

et combinons les formules (10)—(14); nous aurons, après un petit calcul analogue à celui du n° 2,

$$\Psi(x, s) = \overline{\psi}(\xi) + \left\{\frac{x}{s}\right\} \tag{15}$$

$$\frac{x}{1+h} < \xi < \frac{x}{1-h}.$$

La comparaison des formules (9) et (15) donne

$$\psi(\xi) = x - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho}\,\Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right) \tag{16}$$

$$+ t \log x + \left\{ \frac{x + \log s}{s} \right\}$$

$$\frac{x}{1+h} < \xi < \frac{x}{1-h} \qquad \left(h = \frac{\log s}{s} \right)$$

$$0 \leqq t \leqq 1.$$

4. En remarquant que

$$|x - \xi| < \frac{2hx}{1-h^2}, \ \frac{x}{\xi} < 1 + h, \ h = \frac{\log s}{s}$$

on obtient de la formule (16) l'inégalité suivante

$$(17) \qquad \left| \frac{\psi(\xi) - \xi}{\xi} \right| < (1 + h) \sum_\varrho \left| \frac{x^{\varrho - 1}}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right) \right| + \left\{ \frac{\log x}{x} + \frac{\log s}{s} \right\}$$

et on voit donc que l'évaluation de l'ordre de grandeur de la différence

$$\psi(\xi) - \xi$$

se ramène à celle de la série figurant au second membre de cette inégalité.

Posant

$$\varrho = \alpha + i\beta$$

nous savons que α est compris entre 0 et 1 ce qui nous permet d'appliquer à l'expression $\Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right)$ une formule de M. Pincherle concernant la fonction Γ.[1] Nous obtenons (pour $s > 1$)

$$\left| \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right) \right| < K . \left| 1 - \frac{\varrho}{s} \right|^{1 - \frac{\alpha}{s} - \frac{1}{2}} . e^{-\frac{\pi}{2}\left|\frac{\beta}{s}\right|}$$

K étant indépendant de ϱ et de s, et de là, *a fortiori*,

$$(18) \qquad \left| \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right) \right| < K . e^{-k\left|\frac{\beta}{s}\right|}$$

où $k = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et ε un nombre positif arbitrairement petit.

[1] Rendiconti d. R. Acc. d. Lincei. Bd 4, p. 694. 1888. (Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, § 38; Leipzig, Teubner, 1906).

Comme

$$|x^\varrho| = x^\alpha, \left|\frac{1}{\varrho}\right| < \frac{K_1}{|\beta|}$$

où K_1 est une constante, nous obtenons donc, d'après (18):

$$\left|\frac{\psi(\xi)-\xi}{\xi}\right| < K \sum_{\beta>0} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta} e^{-\frac{k\beta}{s}} + \left\{\frac{\log x}{x} + \frac{\log s}{s}\right\} \tag{19}$$

la sommation pouvant ici être bornée à tous les zéros $\varrho = \alpha + i\beta$ où $\beta > 0$ (puisque les ϱ sont conjuguées deux à deux).

5. Voyons d'abord à quelle conséquence conduit cette formule si nous nous appuyons sur l'inégalité fondamentale

$$\alpha < 1 \tag{20}$$

démontrée par M. Hadamard[1] et par M. de la Vallé Poussin.[2]

Donnons à s une valeur fixe quelconque > 1 et faisons tendre x vers l'infini. Comme

$$x^{\alpha-1} < 1$$

et que la série à termes constants

$$\sum_{\beta>0} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{k\beta}{s}}$$

est convergente on obtient la valeur limite de la série

$$\sum_{\beta>0} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta} e^{-\frac{k\beta}{s}}$$

pour $x = \infty$ en y mettant $x = \infty$ dans chacun des termes, ce qui, en vertu de (20), montre que cette limite est égale à zéro. D'après les propriétés de ξ démontrées plus haut, nous obtenons donc

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{\psi(\xi)-\xi}{\xi} = \left\{\frac{\log s}{s}\right\}.$$

Or s pouvant être choisi aussi grand qu'on le veut, il en résulte

---

[1] Bull. de la Soc. Math. de France, 1896.

[2] Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles, 1896.

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{\psi(\xi)-\xi}{\xi} = 0.$$

On sait que ce résultat fondamental qui a coûté de très grands efforts est dû à MM. HADAMARD et DE LA VALLÉE POUSSIN qui l'ont démontré presque simultanément et indépendammant l'un de l'autre. Leurs démonstrations sont basées sur les propriétés de $\zeta(s)$, trouvées auparavant par M. HADAMARD dans son mémoire célèbre de 1893 et sur les propriétés de certaines intégrales entre des limites imaginaires analogues au facteur de discontinuité de DIRICHLET.[1]

La démonstration que nous avons trouvé plus haut est basée aussi sur les théorèmes de M. HADAMARD relatifs à la fonction $\zeta(s)$ mais n'exige, pour le reste, que la connaissance des principes les plus élémentaires du calcul intégral.

6. On doit à M. de la VALLÉE POUSSIN[2] d'avoir trouvé, pour la première fois, une limite inférieure >0 pour la différence $1-\alpha$. D'après le théorème de ce géomètre on a, entre les parties réelles et imaginaires d'une racine $\varrho = \alpha + i\beta$ de $\zeta(s)$ la formule

$$1-\alpha > \frac{p}{\log\beta - \log n} \tag{21}$$

$$(p = 0{,}03466\ldots{}^{3},\ n = 47{,}886\ldots)$$

pour $\beta \geqq 705$ et

$$1-\alpha > 0{,}0128$$

pour $0 < \beta < 705$.

Pour appliquer ce résultat à nos formules, partageons la somme par rapport à β en deux parties de la manière suivante:

$$\sum_{\beta>0} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta} e^{-\frac{k\beta}{s}} = \sum_{705>\beta>0} + \sum_{\beta \geqq 705} \tag{22}$$

et occupons nous d'abord de la deuxième somme qui est étendue à tous les ϱ où $\beta \geqq 705$.

---

[1] M. LANDAU a donné (Mathem. Annalen Bd 56) une démonstration du même théorème qui ne suppose connues que les propriétés les plus élémentaires de la fonction $\zeta(s)$ (en particulier, on ne s'appuie pas sur les théorèmes de M. HADAMARD). Cette démonstration opère aussi avec des intégrales entre des limites imaginaires. Tout récemment, M. LANDAU a simplifié notablement cette démonstration (Sitzungsberichte d. K. Preuss. Ak. d. Wiss. t. 36, p. 746; Berlin 1908).

[2] Mém. couronnés et autres mém. publiés par l'Académie royale de Belgique, t. 59; 1899.

[3] M. LANDAU vient de remplacer ce nombre par une valeur un peu plus grande, savoir $p = 0{,}0376\ldots$ Voir Rendiconti del Circolo math. di Palermo, t. 26, p. 250. (1908).

De la formule (21) résulte, d'après M. de la VALLÉE POUSSIN [1]

$$\frac{x^{\alpha-1}}{\beta} < K e^{-2\sqrt{p \log x}}$$

ce qui nous donne

$$\sum_{\beta \geqq 705} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta} e^{-\frac{k\beta}{s}} < K e^{-2\sqrt{p \log x}} \sum_{\beta \geqq 705} e^{-\frac{k\beta}{s}}.$$

et nous sommes ainsi conduit à chercher une expression de la série

$$\sum_{\beta \geqq 705} e^{-\frac{k\beta}{s}}. \tag{23}$$

D'après un théorème de M. VON MANGOLDT,[2] on peut exprimer le nombre des zéros $\varrho = \alpha + i\beta$ où $0 < \beta \leqq T$ par la formule

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \{\log T\}. \tag{24}$$

Il en résulte que le nombre des zéros où β est compris entre deux entiers successifs m et $m+1$ est inférieur à

$$K \log m$$

K étant une constante positive.[3] On a donc pour la partie correspondante de la somme (23)

$$\sum_{m < \beta \leqq m+1} e^{-\frac{k\beta}{s}} < K \log m \, . \, e^{-\frac{km}{s}}$$

d'où

$$\sum_{\beta \geqq B} e^{-\frac{k\beta}{s}} < K \sum_{m=B}^{\infty} \log m \, . \, e^{-\frac{km}{s}}$$

B étant un entier positif quelconque.

La fonction

$$\log y \, . \, e^{-\frac{ky}{s}}$$

est croissante quand y varie de 1 à la valeur y_0 définie par l'égalité

---

[1] n:o 35 du mém. cité p. 307.

[2] Mathematische Annalen, Bd 60; 1905.

[3] Dans les formules qui suivent, K désigne toujours une constante mais peut différer de l'une formule à l'autre.

$$y_0 \log y_0 = \frac{s}{k}$$

et puis décroissante quand y varie de y_0 jusqu'à l'infini.

Choisissons un nombre k_1 entre 1 et k et désignons par y_1 le nombre satisfaisant à l'égalité

$$y_1 \log y_1 = \frac{s}{k_1}.$$

La fonction $\log y \, . \, e^{-\frac{k_1 y}{s}}$ ayant son maximum pour $y = y_1$ on pourra écrire

$$\sum_{m=B}^{\infty} \log m \, . \, e^{-\frac{km}{s}} = \sum_{m=B}^{\infty} \log m \, . \, e^{-\frac{k_1 m}{s}} \, . \, e^{-\frac{k-k_1}{s} m}$$

$$< \log y_1 \, . \, e^{-\frac{k_1 y_1}{s}} \sum_{m=B}^{\infty} e^{-\frac{k-k_1}{s} m}$$

$$< \log y_1 \, e^{-\frac{k_1 y_1}{s}} \left(e^{-\frac{k-k_1 B}{s}} + \int_B^{\infty} e^{-\frac{k-k_1}{s} y} dy \right)$$

$$= \log y_1 \, e^{-\frac{k_1 y_1}{s}} \left(e^{-\frac{k-k_1 B}{s}} + \frac{s}{k-k_1} e^{-\frac{k-k_1}{s} B} \right)$$

$$= \log y_1 \, . \, e^{-\frac{kB}{s}} \left(1 + \frac{s}{k-k_1} \right)$$

d'où en remarquant que $y_1 < s$ $\left(\text{pour } s > e^{\frac{1}{k_1}}\right)$:

$$\sum_{\beta \geqq B} e^{-\frac{k\beta}{s}} < K_1 s \log s \qquad (K_1 = \text{constante}). \tag{25}$$

Comme d'autre part

$$\sum_{705 > \beta > 0} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta} e^{-\frac{k\beta}{s}} < \frac{K}{x^{0,0128}} \tag{26}$$

nous obtenons enfin, en combinant (22), (25), (26):

$$\sum_{\beta > 0} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta} e^{-\frac{k\beta}{s}} < K \, e^{-2\sqrt{p \log x}} \, . \, s \log s \tag{27}$$

et, d'après (19),

$$\left|\frac{\psi(\xi)-\xi}{\xi}\right| < K e^{-2\sqrt{p\log x}} \cdot s\log s + \left\{\frac{\log x}{x} + \frac{\log s}{s}\right\}$$

d'où

(28) $$\frac{\psi(x)-x}{x} = \left\{e^{-2\sqrt{p\log x}} \cdot s\log s + \frac{\log x}{x} + \frac{\log s}{s}\right\}.$$

Dans cette formule il suffit de prendre

$$s = e^{\sqrt{p\log x}}$$

pour obtenir la formule suivante

(29) $$\frac{\psi(x)-x}{x} = \left\{\sqrt{p\log x} \cdot e^{-\sqrt{p\log x}}\right\}$$

qui n'est autre que celle de M. DE LA VALLÉE POUSSIN.[1]

De là on obtient facilement, en s'appuyant sur la relation connue entre $\psi(x)$ et la fonction $F(x)$ qui exprime le nombre des nombres premiers ne dépassant pas x, une formule correspondante pour la différence entre $F(x)$ et le logarithme intégral $Li(x)$:

$$F(x) - Li(x) = \left\{\frac{x}{\log x}\sqrt{p\log x} \cdot e^{-\sqrt{p\log x}}\right\}.$$

C'est le célèbre théorème de M. DE LA VALLÉE POUSSIN,[2] qui comme on sait, constitue le résultat asymptotique le plus précis obtenu jusqu'à présent concernant $F(x)$, si l'on fait abstraction des résultats basés sur le théorème hypothétique $R\varrho = \frac{1}{2}$.

7. D'après la formule (4) nous pouvons, dans la formule (2), remplacer le terme $P(x, s, -1)$ par l'expression suivante

$$-(1-e^{-x^s}) + \int_0^x s\frac{x}{y}y^{s-1}e^{-y^s}\,dy$$

ce qui nous donne

$$\Psi(x, s) = -\log 2\pi \cdot (1-e^{-x^s}) + \int_0^x s\frac{x}{y}y^{s-1}e^{-y^s}\,dy$$

[1] Mém. cite, n:o 55.
[2] Mém cité, n:o 67.

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[P(x, s, 2n)-\frac{1}{2n}(1-e^{-x^s})\right]$$

$$-\sum_{\varrho}\left[P(x, s, -\varrho)+\frac{1}{\varrho}(1-e^{-x^s})\right].$$

Comparant cette expression de $\Psi(x, s)$ avec celle fournie par la formule (10) il vient

$$s\int_0^x\left(\psi\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}\right)y^{s-1}e^{-y^s}dy=-\log 2\pi\,.\,(1-e^{-x^s})-\sum_{n=1}^{\infty}-\sum_{\varrho}$$

les signes $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ et $\sum_{\varrho}$ désignant, pour abréger, les mêmes sommes que dans la formule précédente.

Nous savons (n° 2) que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ reste inférieure à une constante en valeur absolue; donc, si nous posons, pour abréger

$$\sum_{\varrho}\left|\frac{x^{\varrho}}{\varrho}\Gamma\left(1-\frac{\varrho}{s}\right)\right|=S$$

il vient

$$s\int_0^x\left(\psi\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}\right)y^{s-1}e^{-y^s}dy=\{S\}. \tag{30}$$

Désignons maintenant par $\omega(x)$ une fonction positive de la variable positive x remplissant les conditions suivantes: à partir d'une certaine valeur $x=x_0>1$ la fonction $\omega(x)$ est toujours décroissante et la fonction $x\omega(x)$ toujours croissante et l'on a

$$|\psi(x)-x|<x\omega(x). \tag{31}$$

Il existe effectivement de telles fonctions, par exemple

$$\omega(x)=K\sqrt{p\log x}\,.\,e^{-\sqrt{p\log x}}$$

($K=$ constante convenablement choisie).

Écrivons le premier membre de (30) sous la forme

$$s\int_0^x=s\int_0^{1-h}+s\int_{1-h}^{1+h}+s\int_{1+h}^{\frac{x}{x_0}}+s\int_{\frac{x}{x_0}}^{x},$$

h étant un nombre positif $<\frac{x}{x_0}$ dont nous allons disposer.

On a alors, du moins pour $x > x_0$, $s \geqq 2$

$$s\left|\int_0^{1-h}\right| < \int_0^{1-h} s\frac{x}{y}\,\omega\left(\frac{x}{y}\right) y^{s-1} e^{-y^s} dy$$

$$< x\,\omega\left(\frac{x}{1-h}\right)\int_0^{1-h} s y^{s-2} dy$$

$$= x\,\omega\left(\frac{x}{1-h}\right)\frac{s}{s-1}(1-h)^{s-1}$$

$$< 2x\,\omega(x)\ (1-h)^{s-1}$$

$$s\left|\int_{1+h}^{\frac{x}{x_0}}\right| < x\,\omega(x)\int_{1+h}^{\frac{x}{x_0}} s y^{s-1} e^{-y^s} dy$$

$$< x\,\omega(x)\, e^{-(1+h)^s}$$

$$< \frac{x\,\omega(x)}{(1+h)^s}$$

$$s\left|\int_{\frac{x}{x_0}}^{x}\right| < K\,.\int_{\frac{x}{x_0}}^{x} s y^{s-1} e^{-y^s} dy$$

$$< K e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^s} < K$$

$$(K = \text{constante})$$

et, x_1 désignant une certaine valeur comprise entre les limites

$$\frac{x}{1+h} \text{ et } \frac{x}{1-h}$$

et $\overline{\psi}$ conservant la même signification que plus haut (n° 3):

$$s\int_{1-h}^{1+h} = (\overline{\psi}(x_1) - x_1)\int_{1-h}^{1+h} s y^{s-1} e^{-y^s} dy$$

$$= (\overline{\psi}(x_1) - x_1)(e^{-(1-h)^s} - e^{-(1+h)^s})$$

$$= \overline{\psi}(x_1) - x_1 + \delta$$

où

$$\begin{aligned}
|\delta| &< |\bar{\psi}(x_1) - x_1| (\text{I} - e^{-(1-h)^s} + e^{-(1+h)^s}) \\
&< |\bar{\psi}(x_1) - x_1| \cdot \frac{2}{(\text{I}+h)^s} < \frac{2\,x_1\,\omega(x_1)}{(\text{I}+h)^s} \\
&< 2\frac{x}{\text{I}-h}\,\omega\left(\frac{x}{\text{I}-h}\right) \cdot \frac{2}{(\text{I}+h)^s} \\
&< \frac{2\,x\,\omega(x)}{(\text{I}-h)(\text{I}+h)^s}.
\end{aligned}$$

La combinaison de toutes ces formules conduit à la suivante:

$$\psi(x_1) - x_1 = \left\{ S + \frac{x\,\omega(x)}{(\text{I}+h)^s} \right\} \tag{32}$$

valable, nous le répétons, pour une certaine valeur x_1 entre $\frac{x}{\text{I}+h}$ et $\frac{x}{\text{I}-h}$.

Combinons d'abord cette formule avec le théorème asymtotique (29) de M. DE LA VALLÉE POUSSIN. Cela revient à mettre

$$\omega(x) = K\sqrt{p\log x}\,e^{-\sqrt{p\log x}}$$

et à se rappeler que, d'après nº 6, on a

$$S < Ks\log s\,.\,x\,e^{-2\sqrt{p\log x}}.$$

Nous obtenons ainsi

$$\psi(x_1) - x_1 = \left\{ s\log s\,.\,x e^{-2\sqrt{p\log x}} + x\sqrt{p\log x} \cdot \frac{e^{-\sqrt{p\log x}}}{(\text{I}+h)^s} \right\}.$$

Laissons h fixe et disposons de s de telle manière que

$$(\text{I}+h)^s = e^{\sqrt{p\log x}}$$

c'est-à-dire

$$s\log(\text{I}+h) = \sqrt{p\log x};$$

nous aurons

$$\psi(x_1) - x_1 = \frac{\text{I}}{h}\{x\log(\log x)\,.\,\sqrt{p\log x}\,.\,e^{-2\sqrt{p\log x}}\}$$

d'où

$$|\psi(x_1) - x_1| < \frac{C}{h}\cdot x_1\log(\log x_1)\sqrt{p\log x_1}\,e^{-2\sqrt{p\log x_1}} \tag{33}$$

C étant une constante numérique.

Remplaçant x par $x(\text{I}+h)$ et désignant $\frac{\text{I}+h}{\text{I}-h}$ par $\text{I}+H$, ce résultat peut s'énoncer ainsi:

Désignant par H_0 une constante positive < 1 et par H un nombre arbitrairement petit (dépendant ou non de x) de l'intervalle $0 \ldots H_0$, il y aura dans chaque intervalle

$$x \ldots x(1 + H),$$

du moins à partir d'une valeur suffisamment grande de x, une valeur x_1 au moins pour laquelle on ait

$$(34) \qquad |\psi(x_1) - x_1| < \frac{C}{H} \cdot x_1 \log(\log x_1) . \sqrt{p \log x_1}\, e^{-2\sqrt{p \log x_1}}$$

C étant une constante (indépendante de x, x_1, H).

Donnons, par exemple, des valeurs fixes à x et à H et marquons sur l'axe des x la suite de points

$$x,\ x(1 + H),\ x(1 + H)^2,\ x(1 + H)^3, \ldots$$

Cet axe sera par là partagé en intervalles tels que, pour chacun d'eux la différence $|\psi(x) - x|$ devient une fois au moins, inférieure à la fonction

$$Kx \log(\log x) \sqrt{\log x}\, e^{-2\sqrt{p \log x}}$$

qui, comme on voit, est d'un ordre inférieur à celui indiqué par la formule (29). Pour ces points, au moins, l'approximation obtenue en prenant

$$\psi(x) = x$$

est donc meilleure que l'on pouvait l'affirmer d'après le théorème asymtotique de M. DE LA VALLÉE POUSSIN.

Voyons, en second lieu, à quelle conséquence amène la formule (32) en admettant que tous les zéros de $\zeta(s)$ satisfassent à l'égalité hypothétique de RIEMANN:

$$R\varrho = \frac{1}{2} \cdot$$

J'ai montré (Acta mathem. t. 24) que l'on obtient dans ce cas

$$S < Kx^{\frac{1}{2}} (\log s)^2, \quad |\psi(x) - x| < Kx^{\frac{1}{2}} (\log x)^2 \qquad (K = \text{constante}).$$

Mettons donc

$$\omega(x) = K \frac{(\log x)^2}{x^{\frac{1}{2}}};$$

on s'assure aisément que $\omega(x)$ est décroissante et $x\omega(x)$ croissante à partir d'une certaine valeur x_0 (on peut mettre $x_0 = e^4$).

L'application de la formule (32) donne

$$\psi(x_1) - x_1 = x^{\frac{1}{2}} \left\{ (\log s)^2 + \frac{(\log x)^2}{(1+h)^s} \right\}$$

où

$$x > x_0, \quad s \geqq 2, \quad 0 \leqq h \leqq \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{1+h} < x_1 < \frac{x}{1-h},$$

donc, si l'on donne à h une valeur fixe comprise dans l'intervalle $0 \ldots \frac{1}{2}$ et que l'on choisit s tel que

$$(1+h)^s = (\log x)^2$$

il vient, après un petit calcul,

$$\psi(x_1) - x_1 = \{x_1^{\frac{1}{2}} [\log \log (\log x_1)]^2\}$$

x_1 étant une certaine valeur de l'intervalle

$$\frac{x}{1+h} \cdots \frac{x}{1-h}.$$

et x une valeur quelconque $> x_0$.

8. Au § 4 de notre mémoire cité plus haut (Acta math. t. 24) nous avons calculé une limite supérieure pour la différence $\Psi(x, s) - \psi(x)$. Pour l'objet que nous avons en vue il faut reprendre ce calcul pour diminuer autant que possible la limite en question.

$\Psi(x, s)$ étant definie par l'égalité (1), on peut poser

$$\Psi(x, s) = \psi(x) - \psi_1(x, s) + \psi_2(x, s) \tag{35}$$

où

$$\psi_1(x, s) = \sum_{p^\lambda \leqq x} e^{-\left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^s} \log p$$

est une somme étendue à toutes les puissances de nombres premiers $p^\lambda \leqq x$ et où

$$\psi_2(x, s) = \sum_{p^\lambda > x} \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^s}\right) \log p,$$

la somme s'étendant à toutes les puissances $p^\lambda > x$.

Pour préciser, nous supposons $x = n + \frac{1}{2}$, n étant un nombre positif entier, et $s \geqq 2$.

Pour $p^\lambda \leqq x$ on a alors

$$p^\lambda \leqq x - \frac{1}{2}$$

et

$$e^{-\left(\frac{x}{p^\lambda}\right)} < \left(\frac{p^\lambda}{x}\right)^s$$

d'où

$$\psi_1(x, s) < \frac{1}{x^s} \sum_{p^\lambda < x} p^{\lambda s} \log p$$

$$< \frac{1}{x^s} \sum_{\nu=2}^{n} \nu^s \log \nu$$

$$< \frac{1}{x^s} \int_2^n x^s \log x dx + \left(\frac{n}{x}\right)^s \log n$$

$$= \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{x}\right)^s \left\{\log x + \frac{x \log x}{s}\right\}.$$

Pour $p^\lambda > x$ on a $p^\lambda \geqq x + \frac{1}{2}$ d'où

$$1 - e^{-\left(\frac{x}{p^\lambda}\right)} < \left(\frac{x}{p^\lambda}\right)^s$$

$$\psi_2(x, s) < x^s \sum_{p^\lambda \geqq x + \frac{1}{2}} \frac{\log p}{p^{\lambda s}}$$

$$< x^s \sum_{\nu = n+1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu^s}$$

$$< x^s \int_{n+1}^{\infty} \frac{\log x}{x^s} dx + \left(\frac{x}{n+1}\right)^s \log (n+1)$$

$$= \left(\frac{x}{x + \frac{1}{2}}\right)^s \left\{\log x + \frac{x \log x}{s}\right\}.$$

Remarquant que

$$\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right)^s = \left(1-\frac{1}{2x}\right)^s < e^{-\frac{s}{2x}} < e^{-\frac{s}{2x+1}}$$

$$\left(\frac{x}{x+\frac{1}{2}}\right)^s = \left(1-\frac{1}{2x+1}\right)^s < e^{-\frac{s}{2x+1}}$$

il vient donc, d'après (35),

$$\Psi(x,s) = \psi(x) + e^{-\frac{s}{2x+1}}\left\{\log x + \frac{x\log x}{s}\right\} \tag{36}$$

$$\left(x = n+\frac{1}{2},\ s \geqq 2\right).$$

La combinaison de cette formule avec (9) donne

$$\psi(x) = x - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{x^2}\right) - \sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho}\Gamma\left(1-\frac{\varrho}{s}\right) \tag{37}$$

$$+\left\{\frac{x+\log s}{s}\right\} + e^{-\frac{s}{2x+1}}\left\{\log x + \frac{x\log x}{s}\right\}$$

$$\left(x = n+\frac{1}{2},\ s \geqq 2\right).$$

Écrivons la série figurant dans cette expression sous la forme

$$\sum_\varrho \frac{x^\varrho}{\varrho}\Gamma\left(1-\frac{\varrho}{s}\right) = \sum_{|\beta|<B} \frac{x^\varrho}{\varrho}\Gamma\left(1-\frac{\varrho}{s}\right) + R(B) \tag{38}$$

où la première somme embrasse tous les termes où le module de la partie imaginaire de ϱ ne dépasse pas un nombre entier donné B et où $R(B)$ désigne la somme de tous les autres termes. D'après ce qui a été dit plus haut (n° 6) on trouve facilement

$$|R(B)| < K\,.\,x\,.\sum_{m=B}^{\infty}\frac{\log m}{m}\,.\,e^{-\frac{km}{s}} \qquad (K = \text{constante}) \tag{39}$$

Choisissons maintenant s tel que l'on ait

$$e^{-\frac{kB}{s}} \leqq \frac{1}{B};$$

il suffit pour cela de prendre

$$(40) \qquad s = \frac{kB}{\log B}$$

et on a alors (du moins pour $B \geq 3$)

$$e^{-\frac{km}{s}} < \frac{1}{m} \qquad \text{(pour } m > B\text{)}$$

d'où

$$|R(B)| < K \,.\, x \,.\, \sum_{m=B}^{\infty} \frac{\log m}{m^2}.$$

Comme on a

$$\sum_{m=B}^{\infty} \frac{\log m}{m^2} < \frac{\log B}{B^2} + \int_B^{\infty} \frac{\log y}{y^2}\, dy$$

$$= \frac{\log B}{B^2} + \frac{\log B}{B} + \frac{1}{B}$$

il vient donc

$$|R(B)| < K_1 \,.\, x \,.\, \frac{\log B}{B} \qquad (K_1 = \text{constante})$$

ce qui, eu égard à (40), permet d'écrire (37) sous la forme

$$(41) \qquad \psi(x) = x - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{|\beta|<B} \frac{x^{\varrho}}{\varrho}\, \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right)$$

$$+ \left\{\frac{x\log B + (\log B)^2}{B}\right\} + e^{-\frac{kB}{(2x+1)\log B}} \left\{\log x + \frac{x \log x \log B}{B}\right\}$$

$$\left(x = n + \frac{1}{2}, \quad B > 2\right).$$

Cette formule montre que l'expression

$$(42) \qquad x - \log 2\pi - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{|\beta|<B} \frac{x^{\varrho}}{\varrho}\, \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right)$$

représente asymptotiquement la fonction $\psi(x)$ et donne aussi le moyen de calculer l'approximation correspondante à une valeur donnée de B. Nous nous bornerons ici à considérer quelques cas simples.

Prenons d'abord $B = 2x(\log x)^2$; on aura

$$e^{-\frac{kB}{(2x+1)\log B}} = x^{-k}(1 + \eta)$$

η tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$. Comme k est plus grand que *un* on voit donc que

$$e^{-\frac{kB}{(2x+1)\log B}}\left\{\log x + \frac{x\log x\log B}{B}\right\}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$. Il en est de même de

$$\left\{\frac{x\log B + (\log B)^2}{B}\right\}.$$

Donc, si l'on prend dans l'expression (42) $B = 2x(\log x)^2$,

$$s = \frac{2kx(\log x)^2}{\log x + 2\log\log x + \log 2}$$

la différence entre cette expression et $\psi(x)$ tendra vers zéro avec $\frac{1}{x}$, x étant supposé de la forme $n + \frac{1}{2}$ ($n =$ nombre entier).

Prenant maintenant

$$B = x^\mu \qquad (0 < \mu < 1)$$

on voit facilement que l'expression

$$\left\{\frac{x\log B + (\log B)^2}{B}\right\} + e^{-\frac{kB}{(2x+1)\log B}}\left\{\log x + \frac{x\log x\log B}{B}\right\}$$

reste inférieure à $Kx^{1-\mu}(\log x)^2$ ($K =$ constante) d'où l'on conclut que, pour ce choix de B, l'expression (42) représente la fonction $\psi(x)$ avec une erreur moindre que $Kx^{1-\mu}(\log x)^2$ $\left(\text{pour } x = n + \frac{1}{2}\right)$.

Se rappelant que la fonction

$$\log 2\pi + \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right),$$

pour $x \geqq 2$, reste au dessous d'une certaine constante et que la fonction $\psi(x)$ n'augmente que d'une quantité au plus égale à $\log x$ quand x passe par une valeur de discontinuité de la fonction, on peut donc dire que *l'expression*

$$x - \sum_{|\beta| < x^\mu} \frac{x^\varrho}{\varrho}\Gamma\left(1 - \frac{\mu\varrho\log x}{kx^\mu}\right)$$

représente $\psi(x)$ *avec une erreur moindre que* $Kx^{1-\mu}(\log x)^2$, x n'étant plus assujetti à aucune condition.

Pour $\mu = \frac{1}{2}$ en obtient la conclusion suivante:

On peut mettre approximativement

$$\psi(x) = x - \sum_{|\beta| < \sqrt{x}} \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho \log x}{2k\sqrt{x}}\right),$$

l'erreur commise étant en valeur absolue au plus égale à $K\sqrt{x}\,.\,(\log x)^2$ (K = constante).

Par un raisonnement dont je me suis servi autrefois (Acta math. t. 24) on prouve que la somme

$$\sum \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{s}\right),$$

étendue à ceux des zéros de $\zeta(x)$ dont la partie réelle est $= \frac{1}{2}$, est inférieure à

$$K\sqrt{x}\,.\,(\log s)^2.$$

On en conclut $\left(\text{en prenant } s = \frac{2k\sqrt{x}}{\log x}\right)$ que l'on peut, dans l'énoncé précédent, borner la somme

$$\sum_{|\beta| < \sqrt{x}} \frac{x^\varrho}{\varrho} \Gamma\left(1 - \frac{\varrho \log x}{2k\sqrt{x}}\right) \tag{43}$$

à ceux des zéros $\varrho = \alpha + i\beta$ qui satisfont aux deux inégalités $|\beta| < \sqrt{x}$ et

$$\alpha \gtrless \frac{1}{2}. \tag{44}$$

Si l'on admettait, avec Riemann, l'impossibilité de l'inégalité (44), la somme (43) se réduirait à zéro et le dernier énoncé coïnciderait avec un résultat déjà établi.

Djursholm 31/8 08.