

ZUR CHARAKTERISIERUNG DER ALGEBRAISCHEN UND DER RATIONALEN FUNKTIONEN DURCH IHRE FUNKTIONSWERTE.

VON

THEODOR SCHNEIDER

in GÖTTINGEN.

In dieser Note soll keine Charakterisierung der algebraischen bzw. rationalen Funktionen schlechthin versucht werden, sondern nur der algebraischen bzw. rationalen Funktionen in z , die einer Definitionsgleichung mit algebraischen Zahlkoeffizienten genügen, woraus sich in bekannter Weise eine Beziehung mit ganzen rationalen Zahlkoeffizienten ergibt.

Lange ist vergeblich versucht worden, für die Algebraizität bzw. Rationalität einer Funktion charakteristische Bedingungen aus dem Wertevorrat aufzustellen, und es ist auch seit langem bekannt, dass selbst so umfassende Bedingungen wie z. B., dass die Funktion an allen algebraischen Stellen algebraische Funktionswerte annehme, nicht hinreichend sind.

Erst kürzlich gelang K. Dörge¹ die Angabe charakteristischer Bedingungen für algebraische und auch für rationale Funktionen durch den Wertevorrat, zusammen mit Eigenschaften einer Potenzreihenentwicklung.

Hier soll von einer einerseits wesentlich schwächeren Bedingung, die sich nur auf den Wertevorrat bezieht, bezüglich der einzelnen Funktionswerte weniger als bei Dörge verlangt, und von der Potenzreihe gar keinen Gebrauch macht, die allerdings andererseits über den Wertevorrat insofern mehr fordert, als sie über unendlich viele Funktionswerte aussagt, während Dörge mit einer hinreichend grossen Anzahl von Funktionswerten auskommt, gezeigt werden, dass sie für die Algebraizität charakteristisch ist. Eine gewisse Verschärfung dieser Bedingung wird die rationalen Funktionen kennzeichnen.

Aus dem Beweis wird leicht erkennbar sein, dass sich auf analoge Weise beliebig viele verschiedene solcher charakteristischer Bedingungen angeben lassen.

¹ Die Arbeit von K. Dörge soll in den Mathematischen Annalen Bd 122, Heft 2 erscheinen. Die Resultate derselben sind von K. Dörge auf der Tagung der D. M. V. 1949 vorgetragen worden.

Wir beschränken uns hier auf ein bezüglich der Stellen möglichst einfaches Kriterium. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass die zu betrachtende Funktion $g(z)$ an der Stelle $z = 0$ reguläres Verhalten besitzt. Sollte das nämlich nicht der Fall sein, so besitzt $g(z)$ sicher an einer Stelle z_0 reguläres Verhalten, wobei z_0 eine algebraische Zahl sei. Dann betrachte man statt $g(z)$ die Funktion $g(z - z_0)$, die sicher gleichzeitig mit $g(z)$ algebraisch oder rational ist. $g(z)$ darf dabei selbstverständlich mehrdeutig sein. Nun lautet:

Satz I (1. Kriterium für Algebraizität):

$g(z)$ ist dann und nur dann algebraisch in z , wenn

- a) die Funktionswerte von $g(z)$ auf einem Blatt der Riemannschen Fläche von $g(z)$ an den Stellen $z = \frac{1}{\nu}$ für alle natürlichen Zahlen ν derart, dass diese Stellen $\frac{1}{\nu}$ in einer festen Umgebung von $z = 0$ liegen, algebraische Zahlen höchstens s -ten Grades sind, wobei s eine feste natürliche Zahl bedeute, und

$$\text{b) } \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log \log H \left(g \left(\frac{1}{\nu} \right) \right)}{\log \nu} < 1$$

ist, wobei $H \left(g \left(\frac{1}{\nu} \right) \right)$ die Höhe von $g \left(\frac{1}{\nu} \right)$, d. h. das Maximum der Beträge der ganzen rationalen, teilerfremden Koeffizienten in der irreduziblen Gleichung für $g \left(\frac{1}{\nu} \right)$ bedeute.

Durch Verschärfung der Forderung a) entsteht hieraus

Satz II (1. Kriterium für Rationalität):

$g(z)$ ist dann und nur dann rational in z , wenn

- a) die Funktionswerte von $g(z)$ auf einem Blatt der Riemannschen Fläche von $g(z)$ an allen Stellen $z = \frac{1}{\nu}$; $\nu = 1, 2, \dots$, die in einer festen Umgebung von $z = 0$ liegen, einem festen algebraischen Zahlkörper angehören, und

$$\text{b) } \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log \log H \left(g \left(\frac{1}{\nu} \right) \right)}{\log \nu} < 1$$

ist.

Es ist leicht einzusehen, wie sich die genannten Kriterien auf Kriterien für algebraische, bzw. rationale Abhängigkeit einer Funktion von einer anderen Funktion übertragen lassen. Ferner gelingt es unschwer, die aufgeführten Sätze auf Funktionen mehrerer Veränderlicher auszudehnen.

Beweise:

Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingungen ist recht einfach zu erkennen. Ist nämlich $g(z)$ eine algebraische, bzw. rationale Funktion in z mit algebraischen Koeffizienten, die für $z = 0$ endlich ist, so sind die Eigenschaften a) von Satz I bzw. Satz II offenbar erfüllt. Um die Notwendigkeit der Aussage b) der beiden Sätze einzusehen, mache man sich klar, dass $g\left(\frac{1}{\nu}\right)$ eine algebraische Zahl vom Grade $\sigma \leq s$ ist, die als Wurzel einer algebraischen Gleichung mit ganzalgebraischen Koeffizienten dargestellt ist. Diese Koeffizienten sind Polynome in ν von beschränktem Grade mit festen ganzalgebraischen Zahlkoeffizienten, entstanden durch Einsetzen von $z = \frac{1}{\nu}$ in der algebraischen Definitionsgleichung für $g(z)$:

$$(1) \quad A(z, g(z)) = \sum_{\substack{i, k \\ \iota, \kappa=0}} a_{i, \kappa} z^i (g(z))^\kappa,$$

und Multiplikation derselben mit ν^i und dem ganzrationalen Hauptnenner der algebraischen Zahlen $a_{i, \kappa}$ ($i = 0, \dots, i; \kappa = 0, \dots, k$). Analog der so aus (1) hervorgegangenen Gleichung mit ganzalgebraischen Koeffizienten bilde man für $g\left(\frac{1}{\nu}\right)$ durch Ersetzen der algebraischen Koeffizienten durch deren Konjugierte die sämtlichen, bezüglich des Körpers der rationalen Zahlen, konjugierte Gleichungen. Das Produkt derselben, zusammen mit obiger Gleichung für $g\left(\frac{1}{\nu}\right)$, ergibt dann eine algebraische, möglicherweise reduzible Gleichung für $g\left(\frac{1}{\nu}\right)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten, deren Höhe als Funktion von ν höchstens wie eine feste Potenz von ν wächst. Dann wächst aber die Höhe der irreduziblen Gleichung für $g\left(\frac{1}{\nu}\right)$ mit teilerfremden, ganzen rationalen Koeffizienten, wie leicht einzusehen ist (siehe z. B. in¹⁾), ebenfalls wie eine feste Potenz von ν . Es ist also

¹ C. L. SIEGEL, Approximation algebraischer Zahlen, Mathematische Zeitschrift 10 (1921), 173—213, insbesondere Hilfssatz III, S. 176.

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log H\left(g\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)}{\log \nu} < t,$$

und daraus folgt,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log \log H\left(g\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)}{\log \nu} = 0,$$

also erst recht das Erfülltsein von Bedingung b).

Nicht ganz so einfach ist der Nachweis, dass die in den Sätzen I und II aufgeführten Bedingungen auch hinreichend sind.

Zuerst soll der Beweis von Satz I zu Ende geführt werden, d. h. es soll noch gezeigt werden, dass die Bedingungen a) und b) für eine bei $z = 0$ reguläre ein- oder mehrdeutige Funktion auch hinreichend sind.

Ist $g(z)$ eine analytische Funktion, die in der Umgebung von $z = 0$ keine Singularität aufweist, so ist $g(z)$ insbesondere auf dem in Satz I betrachteten Blatt der Riemannschen Fläche von $g(z)$ in $|z| < r$ regulär. Wählt man $\nu_0 = 1 + \left\lceil \frac{2}{r} \right\rceil$, so ist sogar $\frac{1}{\nu} < \frac{r}{2}$ für alle $\nu > \nu_0$, also $g\left(\frac{1}{\nu}\right)$ endlich und nach den Voraussetzungen algebraisch von höchstens s -tem Grade.

Man setze nun ein Polynom

$$\phi(z) = \sum_{\lambda, \mu=0}^{l, m} c_{\lambda\mu} z^\lambda (g(z))^\mu$$

mit unbestimmten Koeffizienten $c_{\lambda\mu}$ an, und bestimme die $c_{\lambda\mu}$ als nicht sämtlich verschwindende, ganze rationale Zahlen so, dass $\phi(z)$ auf dem in Satz I betrachteten Blatt der Riemannschen Fläche von $g(z)$ in der Umgebung des Nullpunktes für alle Werte $z = \frac{1}{\nu}$, ν ganzzahlig und gleich $\nu_0 + 1, \dots, \nu_0 + n$, verschwindet, wobei über l, m, n noch Festsetzungen zu treffen sind.

Jede Forderung $\phi\left(\frac{1}{\nu}\right) = 0$ bedeutet eine lineare homogene Gleichung für die $c_{\lambda\mu}$ mit algebraischen Koeffizienten aus einem Körper höchstens s -ten Grades, und diese zerfällt, da die $c_{\lambda\mu}$ ganzrational sein sollen, mittels der Basisdarstellung der algebraischen Koeffizienten, in höchstens s lineare homogene Gleichungen für die $c_{\lambda\mu}$ mit rationalen Koeffizienten. Es kommt darauf an, Zähler und Nenner dieser rationalen Koeffizienten abzuschätzen.

Sei mit der für diesen Zweck einzuführenden abkürzenden Bezeichnung $g\left(\frac{1}{\nu}\right) = \beta_\nu = \beta$ bei festem ν , so wird die aus $\phi\left(\frac{1}{\nu}\right) = 0$ entstandene homogene lineare Gleichung für die $c_{\lambda\mu}$ nach Multiplikation mit ν^l

$$\sum_{\lambda, \mu=0}^{l, m} \nu^{l-\lambda} \beta^\mu c_{\lambda\mu} = 0.$$

Da β_ν nach Voraussetzung algebraisch vom Grade $\sigma \leq s$ ist, lautet das Minimalpolynom für β_ν mit teilerfremden, ganzen rationalen Koeffizienten

$$\sum_{x=0}^{\sigma} b_x \beta^x = 0$$

mit

$$\text{Max}_{x=0, \dots, \sigma} |b_x| = H\left(g\left(\frac{1}{\nu}\right)\right),$$

und damit erhält man durch Induktion nach μ die Darstellung

$$\beta^\mu = b_\sigma^{-\mu} (d_{0,\mu} + d_{1,\mu} \beta + \dots + d_{\sigma-1,\mu} \beta^{\sigma-1})$$

mit ganzen rationalen

$$d_{0,\mu}, \dots, d_{\sigma-1,\mu}; \mu \geq 0,$$

und es folgt ebenfalls durch Induktion nach μ die Abschätzung

$$|d_{x,\mu}| \leq \left\{ 2 H\left(g\left(\frac{1}{\nu}\right)\right) \right\}^\mu \quad (x = 0, \dots, \sigma - 1).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $1, \beta, \dots, \beta^{\sigma-1}$ im Körper der rationalen Zahlen zerfällt die obige Gleichung für die rationalen Unbestimmten $c_{\lambda\mu}$ in die σ linearen homogenen Gleichungen mit rationalen Koeffizienten

$$\sum_{\lambda, \mu=0}^{l, m} \nu^{l-\lambda} b_\sigma^{-\mu} d_{x,\mu} \beta^x c_{\lambda\mu} = 0 \quad (x = 0, \dots, \sigma - 1)$$

oder

$$\sum_{\lambda, \mu=0}^{l, m} \nu^{l-\lambda} b_\sigma^{m-\mu} d_{x,\mu} c_{\lambda\mu} = 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, deren Beträge

$$|b_\sigma^{m-\mu} d_{x,\mu} \nu^{l-\lambda}| \leq 2^m \left\{ H\left(g\left(\frac{1}{\nu}\right)\right) \right\}^{2m} \nu^l \quad (x = 0, \dots, \sigma - 1)$$

sind. Damit haben wir für beliebiges ν jede der linearen Gleichungen für die $c_{\lambda\mu}$ mit algebraischen Koeffizienten auf höchstens s lineare homogene Gleichungen

mit ganzen rationalen Koeffizienten, für die absolut genommen bei Berücksichtigung von Voraussetzung b)

$$\leq 2^m e^{2m\nu} \nu^l = O(\nu^l e^{3m\nu})$$

gilt, zurückgeführt.

Die Forderung, dass $\phi(z)$ für $z = \frac{1}{\nu_0 + 1}, \dots, z = \frac{1}{\nu_0 + n}$ verschwinde, bedeutet demnach für die $c_{\lambda\mu}$ das Bestehen von höchstens $s \cdot n$ linearen homogenen Gleichungen mit ganzrationalen Koeffizienten, die höchstens von der Grössenordnung $O((\nu_0 + n)^l e^{3m(\nu_0 + n)})$ sind. Die Anzahl der Unbestimmten beträgt $(l + 1)(m + 1)$, und für diese Anzahl gelte

$$(2) \quad (l + 1)(m + 1) \geq 2sn.$$

Es werde nun

$$(3) \quad m = [\log^{\frac{1}{2}} n]$$

und

$$(4) \quad l = [2sn \log^{-\frac{1}{2}} n]$$

gesetzt.

Dann ist (2) erfüllt, und die ganzrationalen Koeffizienten der Gleichungen für die $c_{\lambda\mu}$ sind nun höchstens von der Ordnung

$$O(e^{2sn \log^{\frac{1}{2}} n + 4n \log^{\frac{1}{2}} n}) = O(e^{(2s+4)n \log^{\frac{1}{2}} n})$$

als Funktion von n . Ein bekannter Satz¹, der sich mittels des Schubfachschlusses leicht zeigen lässt, besagt, dass das lineare homogene Gleichungssystem in nicht sämtlich verschwindenden, ganzen rationalen $c_{\lambda\mu}$, für die

$$(5) \quad |c_{\lambda\mu}| = O(e^{(2s+4)n \log^{\frac{1}{2}} n})$$

gilt, lösbar ist.

Nun soll gezeigt werden: Verschwindet $\phi(z)$ für $z = \frac{1}{\nu_0 + 1}, \dots, z = \frac{1}{\nu_0 + n_1}$ auf einem Blatt der Riemannschen Fläche, so auch für $z = \frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1}$ auf dem gleichen Blatt, wenn nur $n_1 \geq n$ und n hinreichend gross, aber gegen n_1 fest ist.

Der Beweis dieses Hilfssatzes lässt sich auf verschiedene Weise führen. Hier soll das Maximumprinzip herangezogen werden.

¹ Siehe z. B. C. L. SIEGEL, Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, *Abh. Preuss. Akad. Wiss., Berlin, 1930.*

Sei Γ ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $R = \frac{3}{4}r$. Da dieser Kreis die Stellen $z = \frac{1}{\nu_0 + 1}, \dots, z = \frac{1}{\nu_0 + n_1}$ sämtlich im Innern enthält, ist die Funktion

$$\frac{\phi(z)}{\left(z - \frac{1}{\nu_0 + 1}\right) \cdots \left(z - \frac{1}{\nu_0 + n_1}\right)}$$

im Innern der Kurve Γ regulär. Nach dem Maximumprinzip liegt daher das Maximum der Beträge der Werte dieser Funktion auf dem betrachteten Blatt der Riemannschen Fläche für alle Stellen z mit $|z| \leq R$ auf dem Rande des Kreises Γ . Daher gilt die Ungleichung

$$(6) \quad \left| \frac{\phi\left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1}\right)}{\left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} - \frac{1}{\nu_0 + 1}\right) \cdots \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} - \frac{1}{\nu_0 + n_1}\right)} \right| \leq \max_{|z|=R} \left(\left| \frac{\phi(z)}{\left(z - \frac{1}{\nu_0 + 1}\right) \cdots \left(z - \frac{1}{\nu_0 + n_1}\right)} \right| \right).$$

Hieraus werde $\left| \phi\left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1}\right) \right|$ abgeschätzt.

Da r fest ist, ergibt sich die rechte Seite von (6) unter Berücksichtigung von (5) und $n \leq n_1$ als Funktion von n_1 von der Ordnung

$$O\left(e^{(2s+4)n_1 \log \frac{1}{4}} \cdot 2^l \cdot \gamma_1^m \cdot \left(\frac{r}{4}\right)^{-n_1}\right)$$

mit einer von n_1 unabhängigen Konstanten γ_1 . Daraus folgt bei Beachtung von (3) und (4), dass die rechte Seite von (6) die Grössenordnung

$$O\left(e^{(2s+5)n_1 \log \frac{1}{4}}\right)$$

besitzt. Schliesslich ist

$$\left| \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} - \frac{1}{\nu_0 + 1}\right) \cdots \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} - \frac{1}{\nu_0 + n_1}\right) \right| \leq \frac{1}{(\nu_0 + 1) \cdots (\nu_0 + n_1)} = \frac{\nu_0!}{(\nu_0 + n_1)!},$$

also, da ν_0 fest ist, $\leq \gamma_2^{n_1} n_1^{-n_1}$, wobei wieder γ_2 eine von n_1 unabhängige Konstante bedeute. Damit erhalten wir

$$\left| \phi \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right) \right| = O(e^{(2s+6)n_1 \log \frac{1}{2}n_1 - n_1 \log n_1}).$$

Diese Zahl $\phi \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right)$ ist nach Voraussetzung und der Bestimmung von $\phi(z)$ algebraisch von einem Grade $\sigma \leq s$, und ihr Produkt mit einer nicht verschwindenden, ganzen rationalen Zahl Q , deren Grösse ebenfalls aus der Bildung von $\phi(z)$ sofort zu entnehmen ist, ist ganzzahlig. Für Q findet man wegen $n_1 \geq n$

$$|Q| = O(e^{(2s+2)n_1 \log \frac{1}{2}n_1}).$$

Für die höchstens s Konjugierten $\phi^{(\tau)} \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right)$ von $\phi \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right)$ erhält man durch Einsetzen in die Funktion $\phi(z)$ unmittelbar die folgende Abschätzung

$$\left| \phi^{(\tau)} \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right) \right| = O(e^{(2s+6)n_1 \log \frac{1}{2}n_1}) \quad (\tau = 2, \dots, \sigma; \sigma \leq s).$$

Damit ist für die Norm von $Q \phi \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right)$ als Funktion von n_1 die asymptotische Schranke

$$\left| N \left(Q \phi \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right) \right) \right| = O(e^{(2s^2+2s)n_1 \log \frac{1}{2}n_1 + s(2s+6)n \log \frac{1}{2}n_1 - n_1 \log n_1})$$

gefunden, also

$$(7) \quad \left| N \left(Q \phi \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right) \right) \right| < 1$$

für alle n_1 , die grösser als ein hinreichend grosses n_0 sind.

Es sei nun $n > n_0$, dann gilt (7) für alle $n_1 \geq n$. Dann folgt aber aus (7)

$$\phi \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right) = 0$$

durch vollständige Induktion für alle $n_1 = 0, 1, \dots$.

Die Stelle $z = 0$ ist damit Häufungspunkt von Nullstellen der in der Umgebung von $z = 0$ auf einem festen Blatt ihrer Riemannschen Fläche regulären analytischen Funktion $\phi(z)$. Dann muss aber

$$\phi(z) \equiv 0$$

sein, und damit ist der Beweis, dass die Bedingungen a) und b) hinreichend sind, erbracht.

Nun fehlt noch der Nachweis, dass auch bei Satz II dessen Bedingungen a) und b) hinreichend sind. In diesen Bedingungen sind offenbar die Bedingungen a) und b) von Satz I enthalten. Also wissen wir nach Satz I bereits, dass auch bei Satz II zwischen der zu untersuchenden Funktion $g(z)$ und z eine algebraische Abhängigkeit besteht. Wir sind fertig, wenn wir noch gezeigt haben, dass $g(z)$ eine eindeutige Funktion von z ist. Dieser Nachweis wird in gewisser Analogie zum soeben Bewiesenen wie folgt geführt.

Da $g(z)$ eine algebraische Funktion von z ist, gilt, wie wir bewiesen haben, an Stelle von Bedingung b) sogar die bedeutend schärfere Bedingung

$$(8) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log H\left(g\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)}{\log \nu} < t.$$

Mit $g(z)$ ist auch $g\left(\frac{z}{m + \mu z}\right)$ bei $z = 0$ für alle Werte μ regulär und endlichvieldeutig.

Man bilde nun die Funktion

$$(9) \quad \phi(z) = \sum_{\lambda, \mu=0}^{l, m} c_{\lambda\mu} z^\lambda g\left(\frac{z}{m + \mu z}\right)$$

mit unbestimmten Koeffizienten $c_{\lambda\mu}$, die dann bei $z = 0$ ebenfalls regulär ist. Ich verwende im Folgenden die gleichen Buchstaben für die Bezeichnung von Begriffen, die denjenigen des Beweises von Satz I analog sind, ohne dass hier zwischen diesen Buchstaben die gleichen Relationen wie bisher zu gelten brauchen. Es gibt nun mit von m unabhängigem r eine Umgebung $|z| < r$, in der die sämtlichen Funktionen $g\left(\frac{z}{m + \mu z}\right)$ mit $\mu = 0, 1, \dots, m$ regulär sind. In dieser Umgebung ist dann auch $\phi(z)$ regulär.

Die Koeffizienten $c_{\lambda\mu}$ sollen nun derart gewählt werden, dass sie nicht sämtlich verschwinden, und $\phi(z)$ auf dem festen Blatt seiner Riemannschen Fläche für $z = \frac{1}{\nu}$, ν ganzzahlig und gleich $\nu_0 + 1, \dots, \nu_0 + n$ mit $\nu_0 = 1 + \left[\frac{2}{r}\right]$, verschwindet. Setzt man $z = \frac{1}{\nu}$ in $\phi(z) = 0$ ein, und denkt man sich für $g\left(\frac{1}{\nu}\right)$ den Funktionswert auf dem festen Blatt seiner Riemannschen Fläche eingesetzt, so erhält man eine lineare homogene Gleichung für die $c_{\lambda\mu}$ mit Koeffizienten, die Produkte einer Potenz von $\frac{1}{\nu}$ mit

$$g\left(\frac{\frac{1}{\nu}}{m + \frac{\mu}{\nu}}\right) = g\left(\frac{1}{m\nu + \mu}\right)$$

sind. Diese letzteren Ausdrücke sind nach Voraussetzung algebraische Zahlen in einem festen Zahlkörper vom s -ten Grade. Jede solche lineare Gleichung zerfällt durch die Basisdarstellung der algebraischen Koeffizienten, die alle in diesem festen Zahlkörper liegen, in höchstens s lineare homogene Gleichungen mit rationalen Koeffizienten, da wir uns wieder für ganze rationale Lösungen $c_{\lambda\mu}$ interessieren wollen. Für die Zähler und den Hauptnenner dieser rationalen Koeffizienten erhalten wir wegen (8) die Abschätzung, dass ihre absoluten Beträge gleich $O(\nu^l (\nu + 1)m)^{(m+1)}$ sind. Die ganzrationalen Koeffizienten des so aus den Forderungen, dass $\phi(z) = 0$ für $z = \frac{1}{\nu_0 + 1}, \dots, z = \frac{1}{\nu_0 + n}$ verschwinde, entspringenden homogenen Gleichungssystems von höchstens $s \cdot n$ Gleichungen sind absolut genommen höchstens von der Grössenordnung

$$O((\nu_0 + n)^{2l} (\nu_0 + n + 1)m)^{2t(m+1)}.$$

Es sei $(l + 1)(m + 1)$ die Anzahl der Unbestimmten, $\geq 2sn$, und in Abweichung zum Beweis von Satz I werde nun

$$l = [2sn^{\frac{1}{2}}], \quad m = [n^{\frac{1}{2}}]$$

gesetzt. Damit wird die Grössenordnung der ganzrationalen Koeffizienten in den linearen Gleichungen als Funktion von n gleich

$$O(e^{(4s+3t+1)n^{\frac{1}{2}} \log n}),$$

und es ergeben sich mittels des Schubfachschlusses die nicht sämtlich verschwindenden, ganzen rationalen Grössen $c_{\lambda\mu}$ mit

$$|c_{\lambda\mu}| = O(e^{(4s+3t+1)n^{\frac{1}{2}} \log n}).$$

Nun wird wie bei Satz I weiterverfahren, d. h. man zeigt wieder: Verschwindet $\phi(z)$ für $z = \frac{1}{\nu_0 + 1}, \dots, z = \frac{1}{\nu_0 + n_1}$ auf einem festen Blatt der Riemannschen Fläche von $g(z)$, so auch für $z = \frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1}$ auf dem gleichen Blatt, wenn $n_1 \geq n$ und n hinreichend gross ist. Daraus folgt nach dem Maximum-

prinzip auch hier die Formel (6), und mittels derselben erhält man die gesuchte Abschätzung $\left| \phi \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right) \right|$. Mit der gleichen Bestimmung von Γ wie früher folgt

$$\text{Max}_{|z| \leq R} \left| \frac{\phi(z)}{\left(z - \frac{1}{\nu_0 + 1} \right) \cdots \left(z - \frac{1}{\nu_0 + n} \right)} \right| = O \left(e^{(4s+3t+1)n_1^{\frac{1}{2}} \log n_1} \cdot \gamma^2 \cdot \left(\frac{\gamma}{4} \right)^{-n_1} \right) = O(\gamma_3^{n_1}),$$

wobei γ_3 , wie auch die folgenden $\gamma_4, \gamma_5, \dots$ unabhängig von n_1 sind. Nach Formel (6) ergibt sich dann

$$\left| \phi \left(\frac{1}{\nu_0 + n + 1} \right) \right| = O \left(\left(\frac{\gamma_4}{n_1} \right)^{n_1} \right).$$

Für den ganzrationalen Nenner Q von $\phi \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right)$ gilt

$$|Q| = O(e^{(2s + \frac{3}{2}t + 1)n_1^{\frac{1}{2}} \log n_1})$$

und für die Konjugierten von $\phi \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right)$

$$\left| \phi^{(\tau)} \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right) \right| = O(e^{(4s+3t+2)n_1^{\frac{1}{2}} \log n_1}) \quad (\tau = 2, \dots, \sigma; \sigma \leq s).$$

Damit hat man die Abschätzung gewonnen:

$$\left| N \left(Q \phi \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right) \right) \right| = O(e^{(2s^2 + \frac{3}{2}ts + s)n_1^{\frac{1}{2}} \log n_1 + (s-1)(4s+3t+2)n_1^{\frac{1}{2}} \log n_1 + \gamma_5 n_1 - n_1 \log n_1})$$

oder

$$\left| N \left(Q \phi \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right) \right) \right| < 1$$

für alle n_1 mit $n_1 > n_0$, also bei $n > n_0$ für alle $n_1 \geq n$. Wieder ist also

$$\phi \left(\frac{1}{\nu_0 + n_1 + 1} \right) = 0.$$

für alle $n_1 \geq 0$, und daraus folgt auch dieses Mal das identische Verschwinden von $\phi(z)$ in z .

Führt man in (9) für $z = \frac{1}{w}$ ein, und benennt man $g(z)$ mit $\psi \left(\frac{1}{z} \right)$, so ist

$$g \left(\frac{z}{m + \mu z} \right) = g \left(\frac{1}{wm + \mu} \right) = \psi(mw + \mu)$$

und aus (9) wird nun

$$\sum_{\lambda, \mu}^{l, m} c_{\lambda \mu} w^{-\lambda} \psi(mw + \mu) = 0;$$

das heisst, $\psi(mw)$ genügt einer linearen homogenen Differenzgleichung mit Koeffizienten, die eindeutige Funktionen in w sind. Dann muss aber die Lösung $\psi(mw)$ ebenfalls eine eindeutige Funktion von w sein¹. Damit ist auch $g\left(\frac{1}{w}\right)$ eine eindeutige Funktion von w und folglich ebenfalls eine eindeutige Funktion von z , was zu beweisen war.

Aus dem Bewiesenen geht unter anderem hervor, dass für jede algebraische, aber nicht rationale Funktion $g(z)$ die Funktionswerte $g\left(\frac{1}{\nu}\right)$ für alle $\nu = \nu_0 + 1, \nu_0 + 2, \dots$ nicht sämtlich in endlich vielen algebraischen Zahlkörpern liegen können. Es wäre sicher von Interesse, zu wissen, in welchem Umfange analoge Aussagen gelten, wenn die Folge $\left(\frac{1}{\nu}\right)$ durch andere Folgen ersetzt wird. Diese Frage, die mit der Frage nach Kriterien, die sich auf andere Folgen stützen, und deren Existenz eingangs erwähnt worden war, zusammenhängt, soll hier nicht behandelt werden. Ich möchte jedoch darauf hinweisen, dass das soeben angegebene Resultat über die Funktionswerte einer algebraischen Funktion an den Stellen der Folge $\left(\frac{1}{\nu}\right)$ noch wie folgt verschärft werden kann.

Bei den Sätzen I und II ist bemerkenswert, dass die Forderung b) viel schwächer ist als dieselbe tatsächlich erfüllt wird; das soll heissen, es wird nur gefordert

$$\overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log \log H\left(g\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)}{\log \nu} < 1,$$

und es stellt sich heraus, dass dann zusammen mit Forderung a) stets

$$\overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log H\left(g\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)}{\log \nu} < t$$

eintritt.

¹ Siehe z. B. N. E. NÖRLUND, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Springer Verlag, Berlin, 1924, S. 282

Nun lassen sich analog zu den Sätzen I und II mit der gleichen Methode Kriterien für Algebraizität und Rationalität, die wir wieder nur für die spezielle Folge $\left(\frac{1}{\nu}\right)$ formulieren wollen, beweisen, die in Bezug auf die Höhe von $g\left(\frac{1}{\nu}\right)$ keinen Spielraum lassen, dafür aber einen mit ν wachsenden Grad s der algebraischen Zahlen $g\left(\frac{1}{\nu}\right)$ gestatten. Diese Kriterien, die die Aussage über die Funktionswerte einer algebraischen Funktion $g(z)$ an den Stellen $\left(\frac{1}{\nu}\right)$ verschärfen, lauten:

Satz III (2. Kriterium für Algebraizität):

Die Funktion $g(z)$, (die bei $z = 0$ regulär sei), ist dann und nur dann algebraisch, wenn

- a) die Funktionswerte von $g(z)$ für $z = \frac{1}{\nu}$, $\nu = \nu_0 + 1, \nu_0 + 2, \dots$ bei ganzzahligem, geeignetem ν_0 auf einem festen Blatt der Riemannschen Fläche von $g(z)$ sämtlich algebraische Zahlen kleiner als s_ν -ten Grades sind, wobei $s_\nu = o(\nu^{\frac{1}{2}})$ ist, und

b)
$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log H\left(g\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)}{\log \nu} < t$$
 gilt.

Satz IV (2. Kriterium für Rationalität):

$g(z)$, (das bei $z = 0$ regulär sei), ist dann und nur dann rational, wenn

- a) die Werte $g\left(\frac{1}{\nu}\right)$ auf einem Blatt für $\nu = \nu_0 + 1, \dots, \nu_0 + \omega, \dots$ bei ganzzahligem, geeignetem ν_0 und mit $\omega = 1, \dots, n$ algebraische Zahlen eines Körpers \mathfrak{K} vom Grade s_n sind mit $s_n = o(n^{\frac{1}{2}})$, und

b)
$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\log H\left(g\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)}{\log \nu} < t$$
 ist.

Die Beweise dieser Kriterien sind dem hier durchgeführten Beweis von Satz II, der von dem Erfülltsein der schärferen Bedingung b), wie sie in den Sätzen III und IV verlangt wird, Gebrauch macht, leicht nachzubilden. Man hätte Satz II auch ohne Benutzung dieser Verschärfung, nur unter Verwendung

der Bedingung b) des Satzes II, zusammen mit der Bedingung a) ganz analog zum Beweis von Satz I zeigen können. Die Sätze I und III, bzw. II und IV stellen nur die beiden Extremfälle solcher Kriterien unter Zugrundelegung der speziellen Folge $\left(\frac{I}{\nu}\right)$ dar, neben denen sich leicht beliebig viele weitere Kriterien, die sich auf die gleiche Folge $\left(\frac{I}{\nu}\right)$ stützen, formulieren lassen.

