SUR UNE APPLICATION DES DÉTERMINANTS INFINIS A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

PAR

HELGE VON KOCH
A STOCKHOLM.

Si les coefficients $P_r(x)$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ de l'équation linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n(x)y = 0$$

sont des fonctions analytiques uniformes de la variable x, qui dans le voisinage d'un certain point, par exemple $x = 0$, peuvent être représentées par des séries de Laurent, on sait, d'après les recherches fondamentales de M. FUCHS, qu'il existe au moins une intégrale qui dans le voisinage du dit point peut s'écrire sous la forme

$$y = x^\rho G(x),$$

ρ étant une quantité indépendante de x et $G(x)$ une série de Laurent. Dans le cas particulier où $G(x)$ ne contient qu'un nombre fini de puissances négatives de x, les coefficients de cette série sont donnés par des formules de récursion.[1] Mais dans le cas général, si l'on cherche à déterminer ces coefficients, on obtient un système infini d'équations linéaires. Un tel système a été étudié pour la première fois par M. HILL[2] qui, dans le but d'intégrer une certaine équation différentielle du second ordre, a été conduit à envisager un déterminant d'ordre infini $\square(c)$. Dans un

---

[1] FUCHS, J. de Crelle T. 66. FROBENIUS, même journal T. 76.

[2] *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon,* Cambridge, Wilson 1877; Acta mathematica T. 8.

Acta mathematica. 15. Imprimé le 14 mai 1890.

mémoire inséré, il y a quelques années, dans le »Bulletin de la Société mathématique de France» (T. 14, p. 77), M. POINCARÉ a démontré rigoureusement les propriétés de ce déterminant signalées par M. HILL. M. POINCARÉ y est parvenu à l'aide de deux théorèmes généraux et fort importants sur la convergence des déterminants infinis. On dit qu'un déterminant Δ_n est convergent, si à chaque nombre positif δ correspond un nombre entier n' tel que, quel que soit l'entier positif p, l'inégalité $|\Delta_n - \Delta_{n+p}| < \delta$ ait lieu aussitôt que $n > n'$. En adoptant cette définition, on peut énoncer les théorèmes de M. POINCARÉ de la manière suivante:

»Soit Δ_n un déterminant dont tous les éléments de la ligne principale sont égaux à 1. Pour que Δ_n converge, il suffit que la série formée avec tous les éléments qui n'appartiennent pas à la diagonale principale converge absolument».

»Si cette série converge absolument, le déterminant restera convergent, si l'on remplace les éléments d'une ligne quelconque par une suite de quantités qui sont toutes plus petites en valeur absolue qu'un nombre positif donné.»

Sur le conseil de M. MITTAG-LEFFLER, j'ai essayé d'étendre l'usage des invariants infinis à la théorie générale des équations différentielles linéaires et homogènes. Je me propose d'indiquer succinctement, dans les quelques pages qui suivent, les résultats auxquels je suis arrivé.

Etant donnée une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n, on peut toujours, à l'aide d'une transformation bien connue, l'écrire sous la forme suivante:

$$(1) \qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x)y = 0.$$

Dans cette équation, supposons que les coefficients $P_r(x)$ $(r = 2, 3, \ldots, n)$ soient des fonctions analytiques uniformes de x qui, dans le voisinage du point $x = 0$, puissent s'écrire sous la forme

$$P_r(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} a_{r\lambda} x^\lambda \qquad (r=2,3,\ldots,n)$$

l'égalité ayant lieu pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition

$$R < |x| < R'.$$

On peut toujours supposer que

$$R < 1 < R',$$

car, si cela n'était pas le cas, on pourrait transformer l'équation différentielle donnée par la substitution

$$x = z \cdot \sqrt{RR'}$$

en une autre équation différentielle, pour laquelle cette condition serait remplie.

On sait qu'il existe une série de la forme

$$(2) \qquad y = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_\lambda x^{\rho+\lambda}$$

qui converge pour chaque point à l'intérieur de l'anneau circulaire (RR') et qui satisfait à l'équation (1). Pour déterminer les quantités g_λ et ρ, introduisons la série (2) dans $P(y)$; posons

$$\begin{aligned}
\varphi(\rho) &= \rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+1) \\
&\quad + \rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+3)\alpha_{2,-2} + \ldots + \alpha_{n,-n}, \\
A_{m\lambda} &= (\rho+\lambda)(\rho+\lambda-1)\ldots(\rho+\lambda-n+3)\alpha_{2,m-\lambda-2} \\
&\quad + (\rho+\lambda)\ldots(\rho+\lambda-n+4)\alpha_{3,m-\lambda-3} + \ldots + \alpha_{n,m-\lambda-n}, \\
G_m(\rho) &= \varphi(\rho+m)g_m + \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' A_{m\lambda} g_\lambda; \qquad (\lambda \neq m)
\end{aligned}$$

on aura

$$(3) \qquad P(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_m(\rho) x^{\rho+m-n}.$$

Il faut donc que les quantités g_λ et ρ satisfassent aux équations en nombre infini:

$$G_m(\rho) = 0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

ou, si l'on pose

$$\psi_{m\lambda}(\rho) = \frac{A_{m\lambda}}{\varphi(\rho+m)} \quad (m \neq \lambda); \quad \psi_{mm} = 1,$$

aux équations

$$\varphi(\rho + m)\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \psi_{m\lambda}(\rho) g_\lambda = 0.$$

Formons maintenant le déterminant infini

$$(4) \qquad \Omega(\rho) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots & \psi_{-m,0} & \cdots & \psi_{-m,m} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \psi_{0,-m} & \cdots & 1 & \cdots & \psi_{0,m} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \psi_{m,-m} & \cdots & \psi_{m0} & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Je dis que ce déterminant est convergent; en effet, envisageons la série à double entrée

$$S = \Sigma_m \Sigma'_\lambda |\psi_{m\lambda}(\rho)|. \qquad (\lambda \neq m)$$

Ecrivons $m - \nu$ au lieu de λ et posons

$$(\rho + m - \nu)(\rho + m - \nu - 1)\ldots(\rho + m - \nu - n + k + 1)$$
$$= (\rho + m)^{n-k} + h_1^{(k)}(\nu)(\rho + m)^{n-k-1} + \ldots + h_{n-k}^{(k)}(\nu)$$

où $h_r^{(k)}(\nu)$ est une fonction entière rationnelle en ν de degré r.

On aura alors

$$A_{m,m-\nu} = H_2(\nu)(\rho + m)^{n-2} + H_3(\nu)(\rho + m)^{n-3} + \ldots + H_n(\nu)$$

où

$$H_2(\nu) = \alpha_{2,\nu-2}; \qquad H_3(\nu) = h_1^{(2)}(\nu)\alpha_{2,\nu-2} + \alpha_{3,\nu-3}; \;\ldots$$
$$H_r(\nu) = h_{r-2}^{(2)}(\nu)\alpha_{2,\nu-2} + h_{r-3}^{(3)}(\nu)\alpha_{3,\nu-3} + \ldots + \alpha_{r,\nu-r},$$

d'où l'on conclut:

$$(5) \qquad \begin{aligned} |\psi_{m,m-\nu}(\rho)| \leq \left|\frac{(\rho + m)^{n-2}}{\varphi(\rho + m)}\right| |H_2(\nu)| \\ + \left|\frac{(\rho + m)^{n-3}}{\varphi(\rho + m)}\right| |H_3(\nu)| + \ldots + \left|\frac{1}{\varphi(\rho + m)}\right| |H_n(\nu)|. \end{aligned}$$

Le point $x = 1$ étant situé à l'intérieur de (RR'), les séries

$$S_r = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |H_r(\nu)| \qquad (r=2,3,\ldots,n)$$

sont évidemment convergentes ce qui nous permet d'écrire

$$(6) \qquad \begin{aligned} S \leqq S_2 \sum\nolimits_m \left| \frac{(\rho + m)^{n-2}}{\varphi(\rho + m)} \right| + S_3 \sum\nolimits_m \left| \frac{(\rho + m)^{n-3}}{\varphi(\rho + m)} \right| + \ldots \\ \ldots + S_n \sum\nolimits_m \left| \frac{1}{\varphi(\rho + m)} \right|. \end{aligned}$$

Mais de là on conclut que la série S converge, pourvu que ρ ne soit racine d'aucune des équations

$$(7) \qquad \varphi(\rho + m) = 0. \qquad (m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

En vertu du theorème de M. Poincaré, on peut donc affirmer que le déterminant $\Omega(\rho)$ est *convergent.*

Considérons maintenant la quantité $\rho = u + iv$ comme un point variable du plan; soit B une aire finie ou infinie située tout entière entre deux droites verticales et telle qu'aucune des racines des équations (7) ne se trouve en dedans ou sur la limite de B. On démontre aisément que les séries qui se trouvent dans le second membre de l'inégalité (6) sont uniformément convergentes dans B. Il en est donc de même du produit

$$\Pi_m(1 + \Sigma'_\lambda |\psi_{m\lambda}|)$$

ce qui nous permet de le développer en une série uniformément convergente. Soit Σ cette série, le produit

$$\Pi_m(1 + \Sigma'_\lambda \psi_{m\lambda})$$

pourra s'écrire comme une série uniformément et absolument convergente Σ_1, dont aucun terme n'excède en valeur absolue le terme correspondant de Σ. Dans la série Σ_1, remplaçons certains termes par zéro et multiplions les autres, suivant les cas, par $+1$ ou -1. La série Σ_2 ainsi obtenue représentera $\Omega(\rho)$. Et, comme aucun terme de Σ_2 ne peut être plus grand en valeur absolue que le terme correspondant de Σ, cette série Σ_2 est aussi uniformément et absolument convergente en dedans de B. Soit ρ_0 un point quelconque de B, la fonction $\Omega(\rho)$, d'après un theorème bien connu, pourra s'écrire dans le voisinage de ρ_0 sous la forme

$$\Omega(\rho) = \mathfrak{P}(\rho - \rho_0),$$

$\mathfrak{P}(\rho - \rho_0)$ étant une série ordonnée suivant les puissances entières positives de $\rho - \rho_0$. Donc $\Omega(\rho)$ est une fonction analytique de ρ qui se comporte regulièrement dans l'entourage de chaque point du plan à l'exception des points qui satisfont aux équations (7). De plus, il est facile de voir que dans le voisinage de chacun de ces derniers points $\Omega(\rho)$ a le caractère d'une fonction rationelle. Puisqu'on peut supposer que le domaine B s'étend infiniment dans la direction de l'axe imaginaire, on aura, en faisant croître la partie imaginaire de ρ au delà de toute limite, une égalité de la forme suivante:

$$\lim_{v=\pm\infty} \Omega(\rho) = 1.$$

Remarquons maintenant que $\Omega(\rho)$ est une fonction périodique de ρ; en effet, changeons ρ en $\rho + 1$, l'égalité

$$\psi_{m\lambda}(\rho + 1) = \psi_{m+1,\lambda+1}(\rho)$$

nous apprend que la valeur de $\Omega(\rho)$ n'est pas changée. Donc, la fonction $\Omega(\rho)$ a la période 1, et il est évident qu'elle ne peut en avoir d'autre. En vertu des propriétés du déterminant $\Omega(\rho)$ que nous venons de démontrer, il est clair que nous pouvons le représenter sous la forme d'une fonction linéaire des quantités $\operatorname{cotang}(\rho - \rho_\lambda)\pi$ et de leurs derivées,[1] $\rho_1, \rho_2, \ldots$ étant certaines racines de l'équation

$$(8) \qquad \varphi(\rho) = 0.$$

En particulier, supposons que toutes les racines $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ de cette équation soient inégales et qu'elles ne diffèrent pas par des nombres entiers. Dans l'entourage de $\rho = \rho_\lambda$ on aura

$$(9) \qquad \Omega(\rho) = \frac{M_\lambda}{\rho - \rho_\lambda} + \mathfrak{P}_\lambda(\rho - \rho_\lambda),$$

[1] Voir p. ex. Cours de M. Hermite, professé à la Faculté des sciences de Paris, le 2e semestre 1881—82, 3me édition, p. 104.

et, par conséquent, la fonction $\Omega(\rho)$ pourra être mise sous la forme

$$\Omega(\rho) = M + \pi\sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi.$$

Faisons croître la partie imaginaire de ρ une fois vers $+\infty$, l'autre fois vers $-\infty$, on obtiendra les deux égalités qui suivent:

$$1 = M - \pi i\sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda; \qquad 1 = M + \pi i\sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda$$

ou

$$M = 1; \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda = 0.$$

Posons

$$e^{2\pi i\rho} = \omega; \qquad e^{2\pi i\rho_\lambda} = \omega_\lambda;$$

on aura enfin

$$(10) \qquad \Omega(\rho) = 1 + \pi\sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi = 1 + 2\pi i\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{M_\lambda \omega_\lambda}{\omega - \omega_\lambda}.$$

En vertu de la convergence du produit $\Pi_m(1 + \Sigma_\lambda |\psi_{m\lambda}|)$, nous pouvons développer $\Pi_m(1 + \Sigma_\lambda \psi_{m\lambda})$ suivant les éléments d'un facteur quelconque:

$$\Pi_m(1 + \Sigma_\lambda \psi_{m\lambda}) = \Sigma_\lambda \psi_{m\lambda} \Phi_{m\lambda}$$

ce qui nous permet de développer le déterminant $\Omega(\rho)$ suivant les eléments d'une ligne quelconque. Soit $\Psi_{m\lambda}(\rho)$ le coefficient de $\psi_{m\lambda}(\rho)$ dans le développement de $\Omega(\rho)$ suivant les éléments de la ligne numérotée m, de sorte que

$$(11) \qquad \Omega(\rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \psi_{m\lambda}(\rho)\, \Psi_{m\lambda}(\rho).$$

En changeant ρ en $\rho + 1$ $\Omega(\rho)$ ne change pas, mais la fonction $\psi_{m\lambda}(\rho)$ devient $\psi_{m+1,\lambda+1}(\rho)$ et en même temps $\Psi_{m\lambda}(\rho)$ devient $\Psi_{m+1,\lambda+1}(\rho)$, ce qui peut s'exprimer par la relation

$$(12) \qquad \Psi_{m\lambda}(\rho + p) = \Psi_{m+p,\lambda+p}(\rho),$$

où p désigne un nombre entier quelconque.

Remarquons maintenant que le déterminant $\Omega(\rho)$ restera convergent, si l'on remplace les éléments d'une ligne par les éléments correspondants d'une autre ligne; le noveau déterminant ainsi obtenu est nécessairement nul, puisque deux lignes sont identiques; on est donc conduit aux égalités

$$(13) \qquad \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \psi_{m\lambda}(\rho)\Psi_{\varkappa\lambda}(\rho) = 0$$

les nombres entiers $\varkappa$ et m n'étant assujettis qu'à la seule condition $m \neq \varkappa$.

Par un raisonnement parfaitement analogue, on obtient les identités

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_{m\lambda}(\rho)\Psi_{m\varkappa}(\rho) = 0. \qquad (\lambda \neq \varkappa)$$

En vertu de (11), (13) et (3), il est clair qu'en posant

$$(14) \qquad y(x, \rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Psi_{p\lambda}(\rho)x^{\rho+\lambda},$$

la série $y(x, \rho)$, pourvu qu'elle converge, représentera une intégrale de l'équation différentielle

$$(15) \qquad P(y) = \varphi(\rho + p)\Omega(\rho)x^{\rho+p-n}.$$

Pour démontrer la convergence de $y(x, \rho)$, remarquons en premier lieu qu'on obtient cette série en remplaçant les éléments de la ligne numérotée p du déterminant $\Omega(\rho)$, savoir,

$$\ldots, \psi_{p,-m}(\rho), \psi_{p,-m+1}(\rho), \ldots, \psi_{p0}(\rho), \ldots, \psi_{p,m-1}(\rho), \psi_{p,m}(\rho), \ldots$$

par les quantités

$$\ldots, x^{\rho-m}, x^{\rho-m+1}, \ldots, x^{\rho}, \ldots, x^{\rho+m-1}, x^{\rho+m}, \ldots.$$

Dans le nouveau déterminant ainsi défini, multiplions la colonne numérotée m par x^{-m} et la ligne numérotée m par x^m et donnons au nombre m successivement les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ La valeur du déterminant n'est évidemment pas altérée, mais les éléments de la ligne numérotée p sont maintenant tous égaux à $x^{\rho+p}$ et ceux d'une ligne numérotée m sont

$$\ldots, \psi_{m,-m}(\rho)x^{2m}, \psi_{m,-m+1}(\rho)x^{2m-1}, \ldots, \psi_{m0}(\rho)x^m, \ldots, \psi_{m,m-1}(\rho)x, 1, \ldots.$$

Pour établir la convergence, il suffit d'observer qu'en vertu de (5) on a l'inégalité

$$|\psi_{m,m-\nu}(\rho)x^\nu| \leqq \left|\frac{(\rho+m)^{n-2}}{\varphi(\rho+m)}\right| |H_2(\nu)x^\nu|$$

$$+\left|\frac{(\rho+m)^{n-3}}{\varphi(\rho+m)}\right| |H_3(\nu)x^\nu| + \ldots + \left|\frac{1}{\varphi(\rho+m)}\right| |H_n(\nu)x^\nu|$$

et que les séries

$$\sum_{\nu=+\infty}^{+\infty} |H_r(\nu)x^\nu| \qquad {\scriptstyle (r=2,3,\ldots,n)}$$

convergent en dedans de l'anneau circulaire (RR'). On en conclut que la série

$$\Sigma_m \Sigma_\lambda |\psi_{m\lambda}(\rho)x^{m-\lambda}| \qquad {\scriptstyle (m \neq \lambda)}$$

converge dans (RR') ce qui nous montre enfin qu'il en est de même du déterminant considéré, c'est-à-dire de la série $y(x, \rho)$; par conséquent, $y(x, \rho)$ est une intégrale de l'équation (15). Pour que cette série satisfasse à l'équation (1), il faut et il suffit que la quantité ρ soit choisie de sorte que

$$(16) \qquad \varphi(\rho + p)\Omega(\rho) = 0.$$

Supposons maintenant qu'aucune des quantités M_λ définies par (9) ne soit égale à zéro. Dans ce cas, l'équation (16) aura les mêmes racines que l'égalité

$$(17) \qquad \Omega(\rho) = 0.$$

Soit ρ' une racine de cette dernière équation, il est évident que $y(x, \rho')$ est une intégrale de l'équation différentielle donnée. Soit ρ' une racine *simple* de l'équation (17), je dis qu'il est impossible que toutes les fonctions $\Psi_{m\lambda}(\rho)$ s'évanouissent pour $\rho = \rho'$. En effet, si l'on pose

$$\Pi = \Pi_m[1 + \Sigma'_\lambda \psi_{m\lambda}(\rho)]$$

les quantités $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \psi_{m\lambda}}$ ne peuvent pas dépasser en valeur absolue une certaine limite, et la série $\sum_m \sum_\lambda \psi'_{m\lambda}(\rho)$ étant absolument et uniformément convergente pour tous les points de B, il s'ensuit que l'égalité

$$\frac{d\Pi}{d\rho} = \sum_m \sum_\lambda \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_{m\lambda}} \psi'_{m\lambda}$$

a lieu et que la série du second membre converge absolument et uniformément. Développons maintenant le produit Π en une série Σ_1, puis, remplaçons certains termes de Σ_1 par zéro et multiplions les autres par $+1$ ou -1, de sorte que Σ_1 devienne $\Omega(\rho)$, nous obtiendrons:

$$\frac{d\Omega(\rho)}{d\rho} = \sum_m \sum_\lambda \frac{\partial \Omega(\rho)}{\partial \psi_{m\lambda}(\rho)} \psi'_{m\lambda}(\rho),$$

l'égalité ayant lieu pour tous les points réguliers de la fonction analytique $\Omega(\rho)$. Mais de là on conclut qu'il est impossible que toutes les fonctions

$$\frac{\partial \Omega(\rho)}{\partial \psi_{m\lambda}(\rho)} = \Psi_{m\lambda}(\rho)$$

s'évanouissent pour $\rho = \rho'$.

Il est donc possible de choisir l'indice p des fonctions $\Psi_{p\lambda}(\rho)$ $(\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ de manière que la série $y(x, \rho)$ définie par (14) ne se réduise pas identiquement à zéro pour $\rho = \rho'$. On peut alors dire en employant la terminologie de M. Fuchs, que *l'intégrale $y(x, \rho')$ appartient à la racine $\rho = \rho'$.*

Enfin, supposons que la fonction périodique $\Omega(\rho)$ ait n zéros incongruents:

$$\rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^n.$$

D'après ce qui vient d'être établi, il est toujours possible de choisir l'indice p_r des fonctions

$$\Psi_{p_r\lambda}(\rho) \qquad (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

de façon que la série

$$y_r(x, \rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Psi_{p_r\lambda}(\rho) x^{\rho+\lambda}$$

ne se réduise pas identiquement à zéro pour $\rho = \rho^r$. Posons

$$Y(x, \rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Psi_{0,\lambda}(\rho) x^{\rho+\lambda}$$

on obtiendra, en vertu de (12), l'égalité suivante:

$$y_r(x, \rho) = Y(x, \rho + p_r) \qquad {\scriptstyle (r=1,2,\ldots,n)}$$

d'où l'on conclut que *les fonctions*

$$Y(x, \rho^1 + p_1), \ Y(x, \rho^2 + p_2), \ \ldots, \ Y(x, \rho^3 + p_n)$$

forment un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle donnée.

Dans ce qui précède, j'ai fait trois suppositions:

1° que les racines de l'équation (8) soient inégales et qu'elles ne diffèrent pas par des nombres entiers;

2° qu'aucun des résidus $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ne soit égal à zéro;

3° que $\Omega(\rho)$ ait n zéros incongruents.

Je me propose de revenir une autre fois au cas où l'une ou l'autre de ces conditions n'est pas remplie.