

## Deuxième partie.

### Equations de la dynamique et problème des $n$ corps.

#### CHAPITRE I.

##### Etude du cas où il n'y a que deux degrés de liberté.

##### § 15. *Représentations géométriques diverses.*

Reprenons les équations (1) du § 11

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}. \end{aligned}$$

Nous nous bornerons au cas le plus simple qui est celui où il n'y a que deux degrés de liberté; je n'ai pas à m'occuper en effet de celui où il n'y a qu'un degré de liberté, car les équations de la dynamique s'intègrent alors aisément par de simples quadratures.

Nous supposons donc que la fonction  $F$  ne dépend que de quatre variables  $x_1, x_2, y_1, y_2$ . Nous supposons de plus que cette fonction est uniforme par rapport à ces quatre variables et périodique de période  $2\pi$  par rapport à  $y_1$  et à  $y_2$ .

La situation du système est donc définie par les quatre quantités  $x_1, x_2, y_1, y_2$ , mais cette situation ne change pas quand  $y_1$  ou  $y_2$  augmente de  $2\pi$  ou d'un multiple de  $2\pi$ . En d'autres termes, et pour reprendre le langage du chapitre 1<sup>er</sup>,  $x_1$  et  $x_2$  sont des variables linéaires, pendant que  $y_1$  et  $y_2$  sont des variables angulaires.

Nous connaissons une intégrale des équations (2) qui est la suivante :

$$(2) \quad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

$C$  désignant la constante des forces vives. Si cette constante est regardée comme une des données de la question, les quatre quantités  $x$  et  $y$  ne sont plus indépendantes; elles sont liées par la relation (2). Il suffira donc, pour déterminer la situation du système, de se donner arbitrairement trois de ces quatre quantités. Il devient possible, par conséquent, de représenter la situation du système par la position d'un point  $P$  dans l'espace.

Il pourra arriver en outre pour des raisons diverses que les quatre variables  $x$  et  $y$  soient soumises, non seulement à l'égalité (2), mais à une ou plusieurs inégalités :

$$(3) \quad \varphi_1(x_1, x_2, y_1, y_2) > 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, y_1, y_2) > 0.$$

Supposons par exemple pour fixer les idées que les inégalités (3) s'écrivent :

$$a > x_1 > b,$$

et que l'égalité (2) soit telle que lorsque  $x_1$  satisfait à ces inégalités, on puisse tirer de la relation (2) la quatrième variable  $x_2$  en fonction uniforme des trois autres  $x_1, y_1$  et  $y_2$ .

Nous pouvons alors représenter la situation du système par un point dont les coordonnées rectangulaires seront :

$$X = \cos y_1 [1 + \cos y_2 (cx_1 + d)], \quad Y = \sin y_1 [1 + \cos y_2 (cx_1 + d)], \\ Z = \sin y_2 (cx_1 + d),$$

$c$  et  $d$  étant deux nouvelles constantes positives telles que

$$ca + d < 1; \quad cb + d > 0.$$

Il est clair en effet qu'à toute situation du système, c'est à dire à tout système de valeurs de  $x_1, y_1$  et  $y_2$  satisfaisant aux conditions :

$$a > x_1 > b, \quad 2\pi > y_1 > 0, \quad 2\pi > y_2 > 0$$

correspond un point de l'espace et un seul, compris entre les deux tores:

$$(4) \quad \begin{aligned} (1 - \sqrt{X^2 + Y^2})^2 + Z^2 &= (cb + d)^2, \\ (1 - \sqrt{X^2 + Y^2})^2 + Z^2 &= (ca + d)^2. \end{aligned}$$

Et réciproquement, à tout point de l'espace compris entre ces deux tores correspond un système de valeurs de  $x_1, y_1$  et  $y_2$  et un seul, satisfaisant aux inégalités précédentes.

Il peut se faire que les inégalités (3) ne s'écrivent plus  $a > x_1 > b$ ; mais que cependant ces inégalités, jointes à la relation (2) entraînent comme conséquence

$$a > x_1 > b.$$

Si de plus  $x_2$  est encore fonction uniforme des trois autres variables, le même mode de représentation géométrique est encore applicable.

Nous pouvons nous placer dans un cas plus général encore:

Supposons que l'on puisse trouver une variable auxiliaire  $\xi$ , jouissant de la propriété suivante. Si  $x_1, x_2, y_1$  et  $y_2$  satisfont à la fois à l'égalité (2) et aux inégalités (3), on pourra exprimer  $x_1$  et  $x_2$  en fonctions uniformes de  $\xi$ , de  $y_1$  et de  $y_2$ . De plus, en vertu des inégalités (3),  $\xi$  ne peut devenir infinie et reste comprise entre certaines limites de telle façon que l'on a comme conséquence de (2) et de (3)

$$a > \xi > b.$$

Nous pourrions alors définir complètement la situation du système en nous donnant les trois variables  $\xi, y_1$  et  $y_2$ , et la représenter par un point  $P$  dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$\begin{aligned} X &= \cos y_1 [1 + \cos y_2 (c\xi + d)], & Y &= \sin y_1 [1 + \cos y_2 (c\xi + d)], \\ Z &= \sin y_2 (c\xi + d) \end{aligned}$$

avec les conditions:

$$c \geq 0, \quad ca + d < 1, \quad cb + d > 0.$$

On voit alors, comme dans le cas précédent, qu'à toute situation du système correspond un point de l'espace et un seul compris entre les deux

tores (4), et réciproquement, qu'à tout point compris entre ces deux tores ne peut correspondre plus d'une situation du système.

Il peut se faire que pour  $x_1 = a$ , (ou plus généralement pour  $\xi = a$ ) la situation du système reste la même quelle que soit la valeur attribuée à  $y_2$ . Nous en verrons dans la suite des exemples. C'est ainsi qu'en coordonnées polaires, il faut en général pour définir la position d'un point se donner les deux coordonnées  $\rho$  et  $\omega$ , mais que si on suppose  $\rho = 0$ , on retrouve toujours le même point, à savoir le pôle, quel que soit  $\omega$ .

Dans ce cas on choisira les constantes  $c$  et  $d$  de telle façon que

$$ca + d = 0.$$

Le second des deux tores (4) se réduit alors à un cercle:

$$Z = 0, \quad X^2 + Y^2 = 1.$$

En chacun des points de ce cercle  $y_2$  est indéterminé; mais néanmoins, comme pour  $\xi = a$  la situation du système ne dépend pas de  $y_2$ , à chaque point du cercle correspond une situation du système et une seule.

On peut dire alors qu'à toute situation du système correspond un point de l'espace intérieur au premier des deux tores (4) et que réciproquement, à un point intérieur de ce tore ne peut correspondre qu'une seule situation du système.

J'envisagerai encore un autre cas.

Imaginons qu'en vertu des inégalités (3),  $\xi$  puisse prendre toutes les valeurs positives, de telle sorte que:

$$a = 0, \quad b = +\infty.$$

Supposons que pour  $\xi = 0$  la situation du système ne dépende pas de  $y_2$  et que pour  $\xi = \infty$ , cette situation ne dépende pas de  $y_1$ .

Nous pourrons alors représenter la situation par un point dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$X = \cos y_1 e^{\xi \cos y_2}, \quad Y = \sin y_1 e^{\xi \cos y_2}, \quad Z = \xi \sin y_2.$$

Pour  $\xi = 0$  il vient (quel que soit  $y_2$ )

$$X = \cos y_1, \quad Y = \sin y_1, \quad Z = 0.$$

Le point représentatif se trouve sur le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1, \quad Z = 0$$

et sa position ne dépend pas de  $y_2$ ; cela n'a pas d'inconvénient puisque par hypothèse la situation du système pour  $\xi = 0$  ne dépend pas non plus de  $y_2$ .

Pour  $\xi = \infty$ , on trouve pourvu que  $\cos y_2$  soit négatif:

$$X = Y = 0, \quad Z = \sin y_2.$$

Le point représentatif se trouve alors sur l'axe des  $Z$  et sa position ne dépend pas de  $y_1$ , mais pour  $\xi = \infty$ , la situation du système ne dépend pas non plus de  $y_1$ .

Le mode de représentation adopté est donc légitime.

Ce qui précède a besoin d'être appuyé de quelques exemples. Je n'en traiterai ici que trois.

Le premier de ces exemples est le plus important parce que c'est un cas particulier du problème des trois corps. Imaginons deux corps, le premier de grande masse, le second de masse finie, mais très petite et supposons que ces deux corps décrivent autour de leur centre de gravité commun une circonférence d'un mouvement uniforme. Considérons ensuite un troisième corps de masse infiniment petite, de façon que son mouvement soit troublé par l'attraction des deux premiers corps, mais qu'il ne puisse pas troubler l'orbite de ces deux premiers corps. Bornons-nous de plus au cas où ce troisième corps se meut dans le plan des deux circonférences décrites par les deux premières masses.

Tel est le cas d'une petite planète se mouvant sous l'influence du soleil et de Jupiter quand on néglige l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Tel est encore le cas de la lune se mouvant sous l'influence du soleil et de la terre quand on néglige l'excentricité de l'orbite terrestre et l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique.

Nous définirons la position du troisième corps par ses éléments osculateurs à un instant donné et nous écrirons les équations du mouvement en adoptant les notations de M. TISSERAND dans sa Note des Comptes rendus du 31 janvier 1887:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{dR}{dt}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{dR}{dL}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{dR}{dg}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{dR}{dG}. \end{aligned}$$

Je désigne par  $a$ ,  $e$  et  $n$  le grand axe osculateur, l'excentricité et le moyen mouvement de la troisième masse; j'appelle  $l$  l'anomalie moyenne de cette troisième masse et  $g$  la longitude de son périhélie.

Je pose ensuite:

$$L = \sqrt{a}, \quad G = \sqrt{a(1 - e^2)}.$$

Je choisis les unités de telle façon que la constante de GAUSS soit égale à 1, que le moyen mouvement de la seconde masse soit égal à 1 et que la longitude de cette seconde masse soit égale à  $t$ .

Dans ces conditions, l'angle sous lequel la distance des deux dernières masses est vue de la première ne diffère de  $l + g - t$  que par une fonction périodique de  $l$  de période  $2\pi$ .

La fonction  $R$  est la fonction perturbatrice ordinaire augmentée de  $\frac{1}{2a} = \frac{1}{2L^2}$ . Cette fonction ne dépend que de  $L$ , de  $G$ , de  $l$  et de  $l + g - t$ ; car la distance de la seconde masse à la première est constante et la distance de la troisième à la première ne dépend que de  $L$ ,  $G$  et  $l$ . Cette fonction est d'ailleurs périodique de période  $2\pi$  tant par rapport à  $l$  que par rapport à  $l + g - t$ .

On conclut de là que l'on a:

$$\frac{dR}{dt} + \frac{dR}{dg} = 0$$

et que les équations (5) admettent comme intégrale:

$$R + G = \text{const.}$$

Nous allons chercher à ramener les équations (5) à la forme des équations (1). Pour cela nous n'avons qu'à poser:

$$\begin{aligned} x_1 &= G, & x_2 &= L, \\ y_1 &= g - t, & y_2 &= l, \\ F(x_1, x_2, y_1, y_2) &= R + G, \end{aligned}$$

et les équations (5) reprennent la forme:

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

La fonction  $F$  dépend d'un paramètre très petit  $\mu$  qui est la masse du second corps et nous pouvons écrire:

$$F = F_0 + \mu F_1.$$

$F$  est périodique par rapport à  $y_1$  et  $y_2$  qui sont des variables angulaires, tandis que  $x_1$  et  $x_2$  sont des variables linéaires. Si l'on fait  $\mu = 0$ ,  $F$  se réduit à  $F_0$  et:

$$F_0 = \frac{1}{2a} + G = x_1 + \frac{1}{2x_2^2}$$

ne dépend plus que des variables linéaires.

Il résulte de la définition même de  $L$  et de  $G$  en fonctions de  $a$  et  $e$  que l'on doit avoir:

$$L^2 > G^2 \quad \text{ou} \quad x_2^2 > x_1^2,$$

ce qui montre que  $x_1$  peut varier depuis  $-x_2$  jusqu'à  $+x_2$ .

Si l'on suppose  $x_1 = +x_2$ , l'excentricité est nulle; il en résulte que la fonction perturbatrice et la situation du système ne dépendent plus que de la différence de longitude des deux petites masses, c'est à dire de:

$$l + g - t = y_1 + y_2.$$

On en déduit:

$$\frac{dF}{dy_1} = \frac{dF}{dy_2},$$

d'où:

$$(6) \quad \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0,$$

d'où l'on conclurait (puisque la valeur initiale de  $x_1 - x_2$  est supposée nulle) que  $x_1$  doit rester constamment égal à  $x_2$ ; mais ce n'est là pour les équations (1) qu'une solution singulière qui doit être rejetée. En ce qui concerne les solutions »particulières» que nous devons conserver,

l'équation (6) signifie simplement que quand  $x_1 - x_2$  atteint la valeur 0, cette valeur est un maximum, ce qui est d'ailleurs une conséquence de l'inégalité  $x_2^2 > x_1^2$ .

Si nous supposons maintenant  $x_2 = -x_1$ , l'excentricité sera encore nulle, mais le mouvement sera rétrograde (il l'est toutes les fois que  $x_1$  et  $x_2$  ne sont pas de même signe); alors  $F$  et la situation du système ne dépendent plus que de l'angle:

$$-l + g - t = y_1 - y_2,$$

ce qui donne:

$$\frac{dF}{dy_1} + \frac{dF}{dy_2} = 0.$$

Je vais maintenant traiter la question suivante:

Trouver une variable  $\xi$  telle que si  $x_1, x_2, y_1, y_2$  satisfont aux égalités et inégalités (2) et (3) (qui dans le cas qui nous occupe se réduisent à

$$F = C, \quad x_2^2 > x_1^2)$$

ces quatre quantités peuvent s'exprimer en fonctions uniformes de  $\xi, y_1$  et  $y_2$ .

Je traiterai d'abord la question dans le cas où  $\mu = 0$  et où

$$F = F_0 = \frac{1}{2x_2^2} + x_1.$$

Envisageons un plan et dans ce plan un point dont les coordonnées sont:

$$X = x_1 - c, \quad Y = x_2.$$

Alors les égalités et inégalités (2) et (3) s'écrivent:

$$X + \frac{1}{2Y^2} = 0, \quad Y > X + c > -Y.$$

Construisons la courbe:

$$X + \frac{1}{2Y^2} = 0$$

et les deux droites:

$$X + c = \pm Y.$$



Ces droites et cette courbe peuvent être dans deux situations différentes, représentées par les figures 4 et 5.

Chacune des deux figures devrait se composer de deux moitiés symétriques par rapport à l'axe des  $x$ , mais nous n'avons représenté que la moitié qui est au-dessus de cet axe. Dans le cas de la figure 4, la courbe nous offre deux arcs utiles  $BC$  et  $DE$  pendant que les arcs  $AB$  et  $CD$  doivent être rejetés à cause de l'inégalité  $Y^2 > (X+c)^2$ . Dans le cas de la figure 5, il n'y a qu'un arc utile  $BC$  et l'arc  $AB$  doit être rejeté.

Fig. 4.

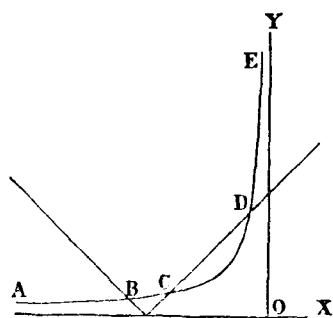
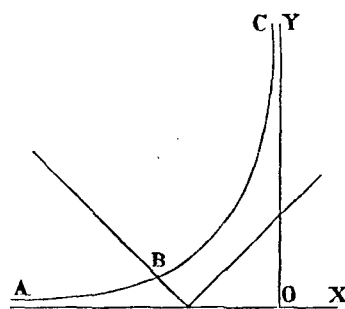


Fig. 5.



Le passage de la figure 4 à la figure 5 se fait quand la droite  $CD$  devenant tangente à la courbe, les deux points  $C$  et  $D$  se confondent. Cela a lieu pour:

$$C = \frac{3}{2}, \quad X = -\frac{1}{2}, \quad Y = 1.$$

Nous nous supposons dans ce qui va suivre placés dans le cas de la figure 4 et nous envisagerons seulement l'arc utile  $BC$ ; c'est en effet le cas le plus intéressant au point de vue des applications.

Posons:

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - G}{L + G};$$

on voit que  $\xi$  s'annule au point  $C$  et devient infini au point  $B$  et que quand on parcourt l'arc  $BC$  depuis  $C$  jusqu'en  $B$ , on voit  $\xi$  croître constamment depuis 0 jusqu'à  $+\infty$ . Si donc on se donne  $\xi$ , le point correspondant de l'arc  $BC$  sera entièrement déterminé, ce qui revient à dire que  $x_1$  et  $x_2$  sont fonctions uniformes de  $\xi$ .

Qu'arrivera-t-il maintenant si  $\mu$  n'est plus nul, mais seulement très petit?

Faisons encore

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1}$$

et voyons si en tenant compte des relations

$$(7) \quad F = C, \quad \xi > 0, \quad x_2 > 0,^1$$

$x_1$  et  $x_2$  seront encore fonctions uniformes de  $\xi$ , de  $y_1$  et de  $y_2$ . Pour qu'il cessât d'en être ainsi, il faudrait que le déterminant fonctionnel:

$$\frac{\partial(\xi, F)}{\partial(x_1, x_2)}$$

s'annulât pour un système de valeurs satisfaisant aux conditions (7). Or cela n'arrivera pas si  $\mu$  est assez petit et si  $C$  est assez différent de  $\frac{3}{2}$ .

Dans la plupart des applications, ces conditions seront remplies; nous pourrons donc prendre  $\xi$  comme variable indépendante; cette variable sera essentiellement positive et  $x_1$  et  $x_2$  seront fonctions uniformes de  $\xi$ ,  $y_1$  et  $y_2$ .

Toutefois pour trouver le mode de représentation géométrique le plus convenable, il faut encore faire un changement de variables. Posons:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_2, & x'_2 &= x_1 - x_2, \\ y'_1 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2), & y'_2 &= \frac{1}{2}(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Après ce changement de variables, les équations conserveront la forme canonique:

$$\begin{aligned} \frac{dx'_1}{dt} &= \frac{dF}{dy'_1}, & \frac{dy'_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx'_1}, \\ \frac{dx'_2}{dt} &= \frac{dF}{dy'_2}, & \frac{dy'_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx'_2}. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> On voit aisément pourquoi j'écris cette dernière relation; l'arc  $BC$  comme on le voit sur la figure est tout entier au-dessus de l'axe des  $X$ , ce qui entraîne l'inégalité  $x_2 > 0$ ; il est clair que cette inégalité subsistera encore pour les valeurs suffisamment petites de  $\mu$ .

On voit que  $y'_1$  et  $y'_2$  sont encore des variables angulaires; quand en effet  $y'_1$  ou  $y'_2$  augmente d'un multiple de  $2\pi$ ,  $y_1$  et  $y_2$  augmentent aussi d'un multiple de  $2\pi$  et par conséquent la situation du système ne change pas.

Mais il y a plus; quand on change simultanément  $y'_1$  et  $y'_2$  en  $y'_1 + \pi$  et  $y'_2 + \pi$ ,  $y_2$  ne change pas et  $y_1$  augmente de  $2\pi$ . La situation du système ne change donc pas.

Cela posé nous représenterons la situation du système par le point de l'espace qui a pour coordonnées rectangulaires:

$$X = \cos y'_1 e^{\xi \cos y'_2}, \quad Y = \sin y'_1 e^{\xi \cos y'_2}, \quad Z = \xi \sin y'_2.$$

Pour  $\xi = 0$  la situation du système ne dépend pas de  $y'_2$  et il en est de même du point représentatif qui est alors sur le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1, \quad Z = 0.$$

Pour  $\xi = \infty$ , la situation du système ne dépend pas de  $y'_1$  et il en est de même du point représentatif qui est alors sur l'axe des  $Z$  si  $\cos y'_2$  est négatif et à l'infini si  $\cos y'_2$  est positif.

A chaque point de l'espace correspond donc une situation du système et une seule; réciproquement, à chaque situation du système correspondent, non pas un, mais deux points de l'espace et en effet aux deux systèmes de valeurs  $(x'_1, x'_2, y'_1, y'_2)$  et  $(x'_1, x'_2, y'_1 + \pi, y'_2 + \pi)$  correspondent deux points différents de l'espace, mais une seule situation du système.

Les équations (1) admettent les invariants intégraux:

$$\int (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2) = \int (dx'_1 dy'_1 + dx'_2 dy'_2)$$

et

$$\int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \int dx'_1 dy'_1 dx'_2 dy'_2.$$

Si nous transformons cet invariant par les règles exposées dans le § 7 nous verrons que:

$$\int \frac{x_1'^2 d\xi dy'_1 dy'_2}{x_1' \frac{dF}{dx_1'} + x_2' \frac{dF}{dx_2'}} = \int \frac{x_1'^2 dXdYdZ}{\left(x_1' \frac{dF}{dx_1'} + x_2' \frac{dF}{dx_2'}\right) \xi (X^2 + Y^2)}$$

est encore un invariant intégral.

Comme  $\xi$  est essentiellement positif, la quantité sous le signe  $\int$  est de même signe que:

$$x_1' \frac{dF}{dx_1'} + x_2' \frac{dF}{dx_2'} = x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2}.$$

Or pour  $\mu = 0$ , on trouve:

$$x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2} = x_1 - \frac{1}{x_2^2}.$$

Si nous nous supposons placés dans le cas de la figure 4 et sur l'arc  $BC$ , nous devons supposer:

$$C > \frac{3}{2}, \quad x_1^2 < x_2^2, \quad 0 < x_2 < 1,$$

d'où l'on tire:

$$x_1 - \frac{1}{x_2^2} = 3x_1 - 2C < 3x_1 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 3(x_1 - 1) < 0.$$

Ainsi  $x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2}$  est toujours négatif quand  $\mu$  est nul. Il en sera encore de même quand  $\mu$  cessera d'être nul, pourvu que  $C$  soit assez différent de  $\frac{3}{2}$ .

Dans ces conditions l'intégrale:

$$\int \frac{x_1'^2 dX dY dZ}{\xi(X^2 + Y^2) \left( -x_1' \frac{dF}{dx_1'} - x_2' \frac{dF}{dx_2'} \right)}$$

est un invariant positif.

Pour  $\mu = 0$ , les équations (5) s'intègrent aisément comme on le sait et on trouve:

$$L = \text{const.}, \quad G = \text{const.}, \quad g = \text{const.}, \quad l = nt + \text{const.}$$

Les solutions ainsi obtenues sont représentées dans le mode de représentation géométrique adopté par certaines trajectoires. Ces trajectoires sont fermées toutes les fois que le moyen mouvement  $n$  est un nombre

commensurable. Elles sont tracées sur des surfaces trajectoires qui ont pour équation générale

$$\xi = \text{const.}$$

et qui sont par conséquent des surfaces de révolution fermées analogues à des tores.

Nous verrons dans la suite comment ces résultats sont modifiés quand  $\mu$  n'est plus nul.

Comme second exemple, je reprends l'équation dont j'ai déjà parlé à la fin du § 11

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + n^2\rho + m\rho^3 = \mu R,$$

$R$  étant une fonction de  $\rho$  et de  $t$ , holomorphe par rapport à  $\rho$  et s'annulant avec  $\rho$  et périodique par rapport à  $t$ . Cette équation peut s'écrire en reprenant les notations du paragraphe cité:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dF}{d\sigma}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dF}{d\rho}, \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\eta}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dF}{d\xi}$$

avec:

$$\xi = t, \quad \frac{d\rho}{dt} = \sigma, \quad F = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{n^2\rho^2}{2} + \frac{m\rho^4}{4} - \mu \int R(\rho, \xi) d\rho + \eta$$

Posons:

$$\sigma = \sqrt{n}\sqrt{2x_1} \cos y_1, \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2x_1} \sin y_1.$$

Les équations conserveront la forme canonique des équations de la dynamique et la fonction  $F$  dépendra de deux variables linéaires  $x_1$  et  $\eta$  et de deux variables angulaires  $y_1$  et  $\xi$ .

On voit aisément que quand on se donne la constante des forces vives  $C$ ,  $x_1$ ,  $y_1$  et  $\xi$ , la quatrième variable  $\eta$  est entièrement déterminée; on a en effet:

$$\eta = C - nx_1 - \frac{m}{n^2}x_1^2 \sin^2 y_1 + \mu \int R(\rho, \xi) d\rho.$$

Pour  $x_1 = 0$ , la situation du système ne dépend pas de  $y_1$ . Nous

pouvons donc adopter pour représenter cette situation le point dont les coordonnées sont:

$$X = \cos \xi e^{x_1 \cos y_1}, \quad Y = \sin \xi e^{x_1 \cos y_1}, \quad Z = x_1 \sin y_1.$$

A chaque situation du système correspond ainsi un point de l'espace et inversement. Il faut excepter les points à l'infini et les points de l'axe des  $Z$  qui nous donneraient  $x_1 = \infty$  et par conséquent un résultat illusoire.

Comme troisième exemple, envisageons un point mobile pesant se mouvant sur une surface parfaitement polie et dans le voisinage d'une position d'équilibre stable.

Prenons pour origine le point le plus bas de la surface; pour plan des  $xy$  le plan tangent qui sera horizontal; pour axes des  $x$  et des  $y$  les axes de l'indicatrice de façon que l'équation de la surface s'écrive:

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{by^2}{2} + \mu\varphi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$  étant un ensemble des termes du 3<sup>m</sup>e degré au moins en  $x$  et en  $y$  et  $\mu$  un coefficient très petit.

Nous aurons alors en appelant  $x'$  et  $y'$  les projections de la vitesse sur les axes des  $x$  et des  $y$

$$F = \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} + gz,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx'}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dy'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{dF}{dx}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dF}{dy}.$$

Changeons de variables en posant:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2x_1}}{\sqrt[4]{ga}} \cos y_1, & x' &= \sqrt{2x_1} \sqrt[4]{ga} \sin y_1, \\ y &= \frac{\sqrt{2x_2}}{\sqrt[4]{gb}} \cos y_2, & y' &= \sqrt{2x_2} \sqrt[4]{gb} \sin y_2. \end{aligned}$$

Les équations différentielles conserveront la forme canonique des équations de la dynamique. L'équation des forces vives s'écrit:

$$\sqrt{ga}x_1 + \sqrt{gb}x_2 + \mu g\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

$\varphi$  désignant la même fonction que plus haut, mais transformée par le changement de variables. Comme  $x_1$  et  $x_2$  sont essentiellement positifs (ainsi d'ailleurs que les coefficients  $a$  et  $b$ ), l'équation des forces vives montre que ces deux quantités restent toujours inférieures à une certaine limite. D'après la définition de la fonction  $\varphi$  cette fonction s'annule avec  $x_1$  et  $x_2$ , et il en est encore de même de ses dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre. Nous en concluons que  $\mu$  étant très petit, la fonction  $\mu\varphi$  et ses dérivées du 1<sup>er</sup> ordre ne pourront jamais dépasser une certaine limite supérieure très petite. Nous pouvons donc écrire:

$$\left| \mu \frac{d\varphi}{dx_1} \right| < \sqrt{\frac{a}{g}}, \quad \left| \mu \frac{d\varphi}{dx_2} \right| < \sqrt{\frac{b}{g}}.$$

Faisons maintenant  $x_2 = \xi x_1$ ; le rapport  $\xi$  sera essentiellement positif. L'équation des forces vives devient:

$$(9) \quad x_1(\sqrt{ga} + \sqrt{gb}\xi) + \mu g \varphi(x_1, \xi x_1, y_1, y_2) = C.$$

La dérivée du premier membre de (9) par rapport à  $x_1$  s'écrit:

$$\sqrt{ga} + \sqrt{gb}\xi + \mu g \frac{d\varphi}{dx_1} + \mu \xi g \frac{d\varphi}{dx_2}.$$

En vertu des inégalités (8), cette expression est toujours positive, ce qui montre que l'on peut tirer de l'équation (9)  $x_1$  en fonction uniforme de  $\xi$ ,  $y_1$  et  $y_2$ , et par conséquent que la situation du système est complètement définie par les trois variables  $y_1$ ,  $y_2$  et  $\xi$ .

Pour  $\xi = 0$  la situation ne dépend pas de  $y_1$ , pour  $\xi = \infty$  elle ne dépend pas de  $y_2$ .

Nous représenterons donc cette situation par le point:

$$X = \cos y_2 e^{\xi \cos y_1}, \quad Y = \sin y_2 e^{\xi \cos y_1}, \quad Z = \xi \sin y_1.$$

A chaque point de l'espace correspondra ainsi une situation du système et réciproquement.

Les exemples qui précèdent suffiront, je pense, pour faire comprendre l'importance du problème qui va nous occuper dans ce chapitre et la façon dont on peut varier les modes de représentation géométrique.