# RESOLUTION ANALYTIQUE DES PROBLEMES DE BELLMAN-DIRICHLET

PAR

P. L. LIONS

*Université P. et M. Curie, Paris, France*

## Introduction

Le contrôle de processus de diffusions stoppés à la sortie d'un ouvert $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}\subset\mathbf{R}^N$) conduit, via la programmation dynamique, à l'étude de problèmes de Dirichlet non linéaires, elliptiques du 2e ordre. Dans ce travail, nous présentons une méthode de résolution de ces problèmes à l'aide de techniques d'équations aux dérivées partielles.

Ainsi nous montrons notamment que le problème suivant

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{A_i u - f_i\} = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathcal{O},\ u=0 \quad \text{sur } \Gamma, \tag{1}$$

admet une unique solution dans $W^{2,\infty}(\mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^N$, de frontière $\Gamma$ régulière, où $A_1, \ldots, A_m$ sont des opérateurs uniformément elliptiques du deuxième ordre à coefficients réguliers et où $f_1, \ldots, f_m$ sont des données régulières. Nous supposons uniquement que les coefficients d'ordre zéro des opérateurs $A_i$ sont assez grands (voir pour l'énoncé et les hypothèses précises le paragraphe 2, ainsi que les résultats complémentaires du paragraphe 4).

La classe des problèmes (1) a été introduite par N. V. Krylov qui dans [11] et [12] traite le cas $N=2$ et le cas $\mathcal{O}=\mathbf{R}^N$. Par la suite le cas $m=2$ a été résolu par H. Brézis et L. C. Evans [3], puis le cas d'opérateurs à coefficients constants, simultanément, par L. C. Evans et A. Friedman [7], et P. L. Lions et J. L. Menaldi [16] où d'autre résultats partiels de résolution sont donnés.

Ainsi que nous l'avons dit ci-dessus, le problème (1) correspond à un problème de contrôle stochastique qui est détaillé au paragraphe 1. Le paragraphe 2 comporte les résultats principaux, dont les démonstrations sont faites au paragraphe 3. Enfin au paragraphe 4 nous donnons quelques résultats complémentaires concernant la résolution de (1) (sans supposer les termes d'ordre zéro des opérateurs $A_i$ assez grands).

Cet article fait suite à un précédent article [14] où l'auteur étudie le cas dégénéré pour $\mathcal{O}=\mathbf{R}^N$ par des méthodes probabilistes. Dans une étude ultérieure nous nous intéres-

10 − 802908 *Acta Mathematica* 146. Imprimé le 24 Juin 1981

serons aux problèmes analogues pour des équations paraboliques, des problèmes d'obstacle, des problèmes elliptiques dégénérés et au cas où la condition de Dirichlet est remplacée par d'autres conditions.

## 1. Notations et hypotheses

Soit $O$ un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ de frontière $\Gamma$ régulière. On se donne une suite $(A_k)_{k\geq 1}$ d'opérateurs définis par

$$A_k = -a_{ij}^k \partial_i \partial_j + b_i^k \partial_i + c^k,\text{(1)} \tag{2}$$

où les coefficients $a_{ij}^k$, $b_i^k$, $c^k$ vérifient les conditions suivantes :

$$a_{ij}^k,\ b_i^k,\ c^k \in C^2(\bar{O}), \quad \text{et restent bornés dans } C^2(\bar{O}) \text{ si } k \to \infty, \tag{3}$$

$$c^k(x) \geq \lambda > 0, \quad \forall x \in \bar{O}, \quad \forall k \geq 1, \tag{4}$$

$$\exists \nu > 0, \quad a_{ij}^k(x)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2, \quad \forall x \in \bar{O}, \quad \forall k \geq 1, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N. \tag{5}$$

Nous noterons :

$$\lambda = \inf_{k \geq 1,\, x \in \bar{O}} c^k(x). \tag{6}$$

Enfin, nous supposerons donnée une suite de fonctions $(f_k)_{k\geq 1}$ vérifiant

$$f_k \in W^{2,\infty}(O), \quad f_k \text{ reste bornée dans } W^{2,\infty}(O) \text{ si } k \to \infty. \tag{7}$$

Nous considérons alors le problème suivant : trouver $u$ solution de

$$\sup_{k \geq 1} (A_k u - f_k) = 0 \quad \text{p.p. dans } O,\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad u \in W^{2,\infty}(O). \tag{8}$$

Ces équations (appelées équations de Hamilton–Jacobi–Bellman) sont étroitement liées à un problème de contrôle stochastique : le raisonnement heuristique de la programmation dynamique indique en effet que le critère (ou fonction coût minimum) d'un problème de contrôle stochastique convenable « doit » être la solution de (8) (le lecteur, pour plus de précisions, pourra se reporter à [1], [11], [14] par exemple).

## 2. Le resultat principal

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses* (3)–(4) *et* (5) (*régularité des coefficients et des données et ellipticité uniforme*) *et si on suppose de plus*

$$\lambda > \lambda_0 \geq 0 \tag{9}$$

(1) Nous emploierons la convention de l'indice répété.

*(où $\lambda_0$ ne dépend que des normes $C^2(\bar{O})$ des coefficients d'ordre* 1 *et* 2 *des opérateurs et de $\nu$ dans* (5)) *alors il existe un unique $u \in W^{2,\infty}(O)$ solution de*

$$\sup_{k\geqslant 1}(A_k u - f_k) = 0 \quad \text{p.p. dans } O,\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \tag{8}$$

*Remarque 2.1.* En fait l'unicité a lieu dans la classe $W^{2,N}_{\mathrm{loc}}(O) \cap C(\bar{O})$.

*Remarque 2.2.* De plus $\exists C > 0$ (indépendante des $f_k$) telle que

$$\|u\|_{W^{2,\infty}(O)} \leqslant C \sup_k \|f_k\|_{W^{2,\infty}(O)}. \tag{10}$$

*Remarque 2.3.* Le Théorème 2.1 est conservé sous les mêmes hypothèses pour des ouverts non bornés, à condition toutefois de remplacer dans (1) $C^2(\bar{O})$ par $C^2_b(\bar{O}) = \{u \in C^2(\bar{O}),\ D^\alpha u \in L^\infty(O),\ |\alpha| \leqslant 2\}$.

*Remarque 2.4.* Nous ne savons pas si l'hypothèse (9) est indispensable, remarquons qu'une hypothèse analogue est employée dans [11], [14]. Dans le cas non-uniformément elliptique, une telle hypothèse est justifiée par le contre-exemple de [8]. Néanmoins dans le cas où $a^k_{ij}$ ne dépend pas de $x$, nous verrons (cf. Corollaire 4.1) que (9) peut être supprimée.

*Remarque 2.5.* En ce qui concerne la résolution du problème de contrôle stochastique il est classique de déduire du Théorème 2.1 les résultats suivants (voir pour cela la démonstration du Théorème 5.4 dans [1] ou bien [16], [17]) :

Il existe un contrôle markovien optimal à $\varepsilon$-près et si la suite $(A_k)$ est finie il existe un contrôle markovien optimal.

Signalons que la démonstration du Théorème 2.1 (qui est faite dans le paragraphe suivant) est entièrement analytique.

## 3. Demonstration du Théorème 2.1

La démonstration sera divisée en plusieurs étapes :

(a) introduction d'un système approximant (8) et premières estimations,

(b) estimation des dérivées secondes sur $\Gamma$, bord de $O$,

(c) estimation $W^{2,\infty}(O)$,

(d) passages à la limite,

(e) unicité.

Les étapes (a), (b), (c) seront consacrées à la résolution de (1), on fixe donc $m$.

**3 (a). Introduction du système approché et premières estimations**

Comme dans [7] on introduit le système pénalisé nonlinéaire suivant[1]

$$\begin{aligned}
&A_1 u_1^\varepsilon + \beta_\varepsilon(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon) = f_1 \quad \text{p.p. dans } O,\ u_1^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\
&A_2 u_2^\varepsilon + \beta_\varepsilon(u_2^\varepsilon - u_3^\varepsilon) = f_2 \quad \text{p.p. dans } O,\ u_2^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\
&\vdots \\
&A_m u_m^\varepsilon + \beta_\varepsilon(u_m^\varepsilon - u_1^\varepsilon) = f_m \quad \text{p.p. dans } O,\ u_m^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma
\end{aligned} \tag{11}$$

où $\beta_\varepsilon$ est une fonction croissante convexe de classe $C^\infty$ sur $\mathbf{R}$ telle que $\beta_\varepsilon(t)=0$ si $t \leqslant 0$ et $\beta_\varepsilon$ (quand $\varepsilon \to 0$) converge au sens des graphes vers la fonction multivoque $\beta$ définie par : domaine $(\beta) = (-\infty, 0)$ et

$$\beta(t) = 0 \quad \text{si } t < 0, \quad \beta(0) = [0, +\infty).$$

L'idée d'approximer le problème (1) par le système pénalisé (11) est très naturelle du point de vue stochastique, voir pour une explication plus détaillée de ce fait, A. Bensoussan et P. L. Lions [2].

La résolution de (11) ne présente aucune difficulté (voir pour cela [7], [16] et [2]) : il existe un unique $m$-uplet $(u_i^\varepsilon)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ solution de (11) tel que $u_i^\varepsilon \in C^2(\bar{O})$. Notre but dans les étapes (a), (b), (c), est de montrer

$$\|u_i^\varepsilon\|_{W^{2,\infty}(O)} \leqslant \text{const.} \quad (\text{indep. de } \varepsilon,\ i \text{ et } m).$$

Par régularisation nous pouvons supposer que $(a_{kl}^i) \in C^\infty(\bar{O})$, $f_i \in C^\infty(\bar{O})$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$, avec $\|a_{kl}^i\|_{C^2(\bar{O})}$, $\|f_i\|_{W^{2,\infty}(\bar{O})}$ bornées.

Nous avons alors par des résultats classiques de régularité du problème de Dirichlet

$$u_i^\varepsilon \in C^4(\bar{O}).$$

D'autre part, d'après [7] ou [16], nous savons déjà que

$$\|u_i^\varepsilon\|_{W^{1,\infty}(O)} \leqslant \text{const.} \quad (\text{indép. de } \varepsilon,\ i \text{ et } m). \tag{12}$$

Toutefois afin de faire un exposé complet, nous présentons de manière condensée la démonstration de (12) donnée par P. L. Lions et J. L. Menaldi [16]. Elle consiste en quatre étapes :

---

[1] L'idée de cette pénalisation m'avait également été indiquée par M. L. Tartar.

(i) construction d'une sous-solution,

(ii) estimation $L^\infty(O)$,

(iii) estimation de $\nabla u_i^\varepsilon$ sur $\Gamma$,

(iv) estimation $W^{1,\infty}(O)$.

(i) *Construction d'une sous-solution.* Comme nous supposons en particulier que $O$ possède la propriété de sphère extérieure uniforme, nous avons

$$\exists \varrho > 0, \quad \forall y \in \Gamma, \quad \exists \hat{y} \in \mathbf{R}^N - O \text{ tel que } \{z \in \mathbf{R}^N;\ |z - \hat{y}| \leqslant \varrho\} \cap \bar{O} = \{y\}.$$

Alors bien sûr $|\hat{y} - y| = \varrho$. On introduit $w$ donnée par

$$w(x) = e^{-\mu\varrho^2} - e^{-\mu|x-\hat{y}|^2},$$

où $\mu$ est une constante positive qui sera déterminée dans la suite. Un calcul de $A_i w$ donne

$$2\mu(2\mu a_{kl}^i(x_k - \hat{y}_k)(x_l - \hat{y}_l) - a_{kk}^i - b_k^i(x_k - \hat{y}_k))\, e^{-\mu|x-\hat{y}|^2} + c^i w(x).$$

Mais pour $x \in \bar{O}$, $w(x) \geqslant 0$ et

$$A_i w(x) \geqslant \{4\mu^2\varrho^2\nu - 2\mu a_{kk}^i + 2\mu b_k^i(x_k - \hat{y}_k)\} \exp(-\mu|x - \hat{y}|^2)$$

d'où, en choisissant $\mu$ assez grand, $A_i w(x) \geqslant \alpha > 0$ où $\alpha$ est indépendant de $i$. Donc pour $C$ assez grand (indépendant de $i$) nous avons

$$\begin{gathered} A_i(-Cw) < f_i \quad \text{sur} \quad \bar{O}; \quad -Cw|_\Gamma \leqslant 0, \quad -Cw(y) = 0, \\ A_i(Cw) > f_i \quad \text{sur} \quad \bar{O}; \quad Cw|_\Gamma \geqslant 0, \quad Cw(y) = 0. \end{gathered}$$

(ii) *Estimation* $L^\infty(O)$. Nous allons montrer que $-Cw \leqslant u_i^\varepsilon \leqslant Cw$ sur $\bar{O}$. Montrons par exemple $u_i^\varepsilon > -Cw$. Soient $i \in \{1, \ldots, m\}$, $x_0 \in \bar{O}$ tels que

$$\min_{j,x} (u_j^\varepsilon + Cw)(x) = (u_i^\varepsilon + Cw)(x_0).$$

Si $x_0 \in \Gamma$ alors $(u_j^\varepsilon + Cw)(x_0) \geqslant 0$ et $u_i^\varepsilon \geqslant -Cw$ sur $\bar{O}$. Sinon $x_0 \in O$; supposons alors que $u_i^\varepsilon + Cw(x_0) < 0$. Le principe du maximum donne alors (on convient $u_{m+1}^\varepsilon = u_1^\varepsilon$)

$$0 \geqslant A_i(u_i^\varepsilon + Cw)(x_0) = f_i(x_0) - A_i(-Cw)(x_0) - \beta_\varepsilon(u_i^\varepsilon - u_{i+1}^\varepsilon)$$

mais $f_i > A_i(-Cw)$ et $u_i^\varepsilon(x_0) \leqslant u_{i+1}^\varepsilon(x_0)$ donc $\beta_\varepsilon(u_i^\varepsilon - u_{i+1}^\varepsilon) = 0$. On obtient une contradiction qui prouve

$$u_j^\varepsilon \geqslant -Cw.$$

De même a-t-on $u_j^\varepsilon \leqslant Cw$. En particulier $\|u_j^\varepsilon\|_{L^\infty(O)} \leqslant \text{const}$.

(iii) *Estimation de* $\nabla u_i^\varepsilon$ *sur* $\Gamma$. On remarque tout d'abord que $|\nabla u_i^\varepsilon(y)| = |\partial_\nu u_i^\varepsilon(y)|$ où $\nu$ est la normale extérieure à $O$ au point $y$ de $\Gamma$. De plus de l'inégalité $|u_i^\varepsilon| \leqslant Cw$, on déduit aisément

$$|\partial_\nu u_i^\varepsilon(y)| \leqslant C|\partial_\nu w(y)| \leqslant \text{const.}$$

(iv) *Estimation* $W^{1,\infty}(O)$. Soit $C$ une constante majorant $\|u_i^\varepsilon\|_{L^\infty(O)}$, on considère

$$z_i = |\nabla u_i^\varepsilon|^2 + \mu(C - u_i^\varepsilon)^2$$

où $\mu$ est une constante positive qui sera déterminée dans la suite.

Nous allons montrer que $\max_{j,x} z_j(x) \leqslant \text{const.}$ Pour cela soient $(i, x_0) \in \{1, \ldots, m\} \times \bar{O}$ tels que $\max_{j,x} z_j(x) = z_i(x_0)$. Si $x_0 \in \Gamma$, d'après (iii) l'estimation est prouvée. Si $x_0 \in O$, on calcule $A_i z_i$ :

$$\begin{aligned} A_i z_i = & -2a_{kl}^i(\partial_k \partial_q u_i^\varepsilon)(\partial_l \partial_q u_i^\varepsilon) - 2\mu a_{kl}^i(\partial_k u_i^\varepsilon)(\partial_l u_i^\varepsilon) + (2A_i(\partial_q u_i^\varepsilon) - c^i(\partial_q u_i^\varepsilon))(\partial_q u_i^\varepsilon) \\ & - 2\mu(C - \mu_i^\varepsilon) A_i u_i^\varepsilon + \mu(C^2 - (u_i^\varepsilon)^2) c^i. \end{aligned}$$

En choisissant $\mu$ assez grand, on en déduit en dérivant (11)

$$\begin{aligned} A_i z_i(x_0) \leqslant & -\mu\nu|\nabla u_i^\varepsilon|^2(x_0) + \text{const.} \; -2\beta_\varepsilon'(u_i^\varepsilon - u_{i-1}^\varepsilon) \\ & \times (\partial_q u_i^\varepsilon \cdot \partial_q u_i^\varepsilon - \partial_q u_i^\varepsilon \cdot \partial_q u_{i+1}^\varepsilon + \mu(C - u_i^\varepsilon)^2 - \mu(C - u_i^\varepsilon)(C - u_{i+1}^\varepsilon)) \\ & + 2\mu(C - u_i^\varepsilon)(\beta_\varepsilon(u_i^\varepsilon - u_{i+1}^\varepsilon) - \beta'(u_i^\varepsilon - u_{i+1}^\varepsilon)(u_i^\varepsilon - u_{i+1}^\varepsilon)) \end{aligned}$$

mais par la convexité de $\beta_\varepsilon$

$$\beta_\varepsilon(u_i^\varepsilon - u_{i+1}^\varepsilon) - \beta_\varepsilon'(u_i^\varepsilon - u_{i+1}^\varepsilon)(u_i^\varepsilon - u_{i+1}^\varepsilon) \leqslant \beta_\varepsilon(0) = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} A_i z_i & \leqslant -\mu\nu|\nabla u_i^\varepsilon|^2(x_0) + \text{const.} \; -\beta_\varepsilon'(u_i^\varepsilon - u_{i+1}^\varepsilon)(z_i^\varepsilon(x_0) - z_{i+1}^\varepsilon(x_0)) \\ & \leqslant -\mu\nu|\nabla u_i^\varepsilon|^2(x_0) + \text{const.} \end{aligned}$$

Or de par le choix de $x_0$, $A_i z_i(x_0) \geqslant 0$ et donc

$$z_i(x_0) \leqslant |\nabla u_i^\varepsilon|^2(x_0) + \text{const.} \leqslant \text{const.}$$

En conclusion nous avons montré

$$\|u_j^\varepsilon\|_{W^{1,\infty}(O)} \leqslant \text{const.} \quad (\text{indép. de } \varepsilon, m). \tag{12}$$

## 3 (b). Estimation des dérivées secondes sur le bord de $O$

Nous noterons $M = \sup_{1 \leqslant i \leqslant m} \|D^2 u_i^\varepsilon\|_{L^\infty(O)}$. Nous allons montrer que nous avons

$$|D^2 u_i^\varepsilon(x)| \leqslant C + CM^{1/2}, \quad \forall x \in \Gamma, \tag{13}$$

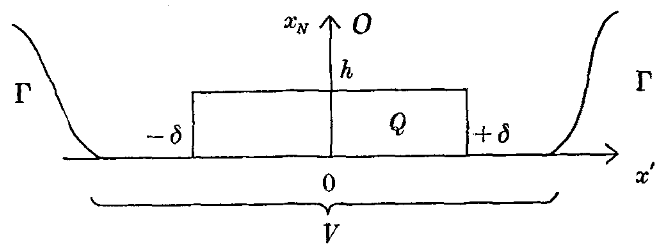


Fig. 3.1

(dans (13) et dans les paragraphes 3 (b), 3 (c), $C$ désignera diverses constantes indépendantes de $m$ et de $\varepsilon$).

Pour démontrer (13), nous allons utiliser une technique de J. J. Kohn et L. Nirenberg [9],(1) dont une autre application aux problèmes de Bellman–Dirichlet est donnée dans P. L. Lions [15].

Dans ce qui suit nous supprimerons l'indice $\varepsilon$. Soit $x \in \Gamma$, nous allons montrer (13). Remarquons tout d'abord que par une transformation simple nous pouvons nous ramener au cas où $x=0$, $\mathcal{O} \subset \{x_N>0\}$, $\exists\, V$ voisinage sur $\Gamma$ de 0 tel que $V \subset \{x_N=0\}$ (voir Figure 3.1). Nous poserons $Q=\{|x'|<\delta, 0<x_N<h=M^{-1/2}\}$ et en supposant $M$ assez grand et $\delta$ convenablement choisi nous avons $Q \subset \mathcal{O}$.

Soit $1 \leqslant q \leqslant N-1$, en dérivant (11) par rapport à $x_q$, nous obtenons

$$|\tilde{A}_i \partial_q u_i + \beta'(u_i-u_{i+1})(\partial_q u_i - \partial_q u_{i+1})| \leqslant CM+C, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{14}$$

où par convention $u_{m+1}=u_1$ et où $\tilde{A}_i$ est l'opérateur

$$\tilde{A}_i = -a^i_{kl}\partial_k \partial_l + c^i.$$

Soit $b>0$ tel que $b\delta^2 \geqslant 1$, on introduit

$$w = 2M^{1/2}x_N - M^{3/4}x_N^{3/2} + b \sum_{j \leqslant N-1} |x_j|^2$$

et on vérifie que l'on a (on peut toujours supposer $M$ assez grand)

$$\begin{aligned} &w \geqslant 1 \quad \text{sur} \quad (\partial Q) \cap \mathcal{O}, \quad w \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad \bar{Q} \\ &\tilde{A}_i w \geqslant c_0 M + c_0 \quad \text{où} \quad 0 < c_0 < 1, \end{aligned} \tag{15}$$

(1) L'auteur tient à remercier le prof. L. Nirenberg pour lui avoir communiqué cette méthode.

ce que l'on peut réécrire

$$\begin{aligned} &\tilde{A}_i \frac{Cw}{c_0} + \beta'(u_i - u_{i+1}) \left\{ \frac{Cw}{c_0} - \frac{Cw}{c_0} \right\} \geqslant CM + C, \quad 1 \leqslant i \leqslant m; \\ &\frac{Cw}{c_0} \geqslant 0 = \partial_q u_i \quad \text{sur} \quad Q \cap \partial \mathcal{O}\,; \qquad \frac{Cw}{c_0} \geqslant C \geqslant \partial_q u_i \quad \text{sur} \quad (\partial Q) \cap \mathcal{O}. \end{aligned} \tag{15'}$$

Nous voulons alors en déduire $|\partial_q u_i| \leqslant Cw/c_0$ sur $Q$, pour ce faire soit $x_0 \in \bar{Q}$ tel que $Cw/c_0 - \max_i \partial_q u_i$ atteigne un minimum strictement négatif. Nécessairement d'après (15') $x_0 \in Q$, d'autre part par un raisonnement classique de principe du maximum, nous obtenons une contradiction avec (14) et (15') appliqués aux point $x_0$ et pour $j$ tel que $\max_i \partial_q u_i(x_0) = \partial_q u_j(x_0)$. Donc $|\partial_q u_i| \leqslant Cw/c_0$ sur $Q$, on en déduit

$$|\partial_q \partial_N u_i(0)| \leqslant \frac{C}{c_0} \partial_N w(0) = \frac{2C}{c_0} M^{1/2}. \tag{16}$$

D'autre part pour $k,\ l \leqslant N-1$, nous avons évidemment $\partial_k \partial_l u_i(0) = 0$ Enfin d'après (11), appliquée au point $x = 0$, puisque $\beta_\varepsilon(0) = 0$, nous avons

$$\partial_N \partial_N u_i(0) = \frac{1}{a^i_{NN}(0)} \left[ -\sum_{j=1}^{N-1} 2a^i_{jN}(0)\, \partial_j \partial_N u_i(0) + b^i_N \partial_N u(0) - f_i(0) \right],$$

ce qui permet d'obtenir (13) à partier de (16).

### 3 (c). Estimation $W^{2,\infty}(\mathcal{O})$

C'est l'étape la plus importante de la démonstration. Essentiellement nous dérivons deux fois le système (11) par rapport à un nombre suffisant de directions unitaires et appliquons « une sorte » de principe de maximum, au système obtenu. L'idée de dériver deux fois une équation avec une nonlinéarité convexe (ici $\beta_\varepsilon(t)$) a été utilisée par H. Brézis et D. Kinderlehrer [4], et par S. N. Kruzkov [10] (dans le cadre de problèmes non linéaires qui sont également des équations de Hamilton–Jacobi–Bellman).

Le plan de la démonstration de l'estimation $W^{2,\infty}(\mathcal{O})$ est le suivant :

(i) choix d'un point $x_0 \in \mathcal{O}$, d'une base orthonormale $(\chi_1, \ldots, \chi_N)$,
(ii) construction d'un ensemble $T$ de vecteurs unitaires et de coefficients,
(iii) application du principe du maximum à une fonction auxiliaire,
(iv) conclusion.

Avant d'entamer la démonstration proprement dite, signalons que nous allons, pour simplifier la présentation, omettre les indices $\varepsilon$ et supposer que $b^i_k(x) \equiv 0$, $c^i(x) \equiv \lambda \geqslant 0$. De plus nous noterons $\varphi_i$ la dérivée par rapport à $x_i$ de $\varphi$ (et $\varphi_{j,i}$ la dérivée de $\varphi_j$ par rapport à $x_i$). Enfin nous noterons $u_{ij}^k = \partial_i \partial_j u_k^e$.

(i) *Choix d'un point et d'une base orthonormale.* On choisit d'abord $x_0 \in \bar{O}$ tel que $\sup |u_{ij}^k(x_0)| = M$, pour $1 \leqslant i, j \leqslant N$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Et on suppose, ce qui ne restreint évidemment pas la généralité, que $M = \sup_{i,j} |u_{ij}^1(x_0)|$.

Si $x_0 \in \Gamma$, nous avons grâce à (13) :

$$M \leqslant CM^{1/2} + C$$

et l'estimation est prouvée.

Supposons donc que $x_0 \in O$ : alors en diagonalisant la matrice Hessienne de $u^1$ au point $x_0$ nous avons l'existence de $(\chi_1, \ldots, \chi_N)$ base orthonormale de $\mathbf{R}^N$ telle que

$$u^1_{\chi_i \chi_j}(x_0) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \tag{17}$$

et donc

$$-a_{ij}^1(x_0)\, u_{ij}^1(x_0) = -\sum_i \mu_i\, u^1_{\chi_i \chi_i}(x_0)$$

où $\nu \leqslant \mu_i \leqslant \mu = N \sup \|a_{ij}^1\|_{L^\infty}$.

(ii) *Construction d'un ensemble I de vecteurs unitaires et de coefficients.* Soit $I$ l'ensemble des $\alpha = (k, i, j)$ où $1 \leqslant k \leqslant N$ et ou bien $1 \leqslant i < j \leqslant N$, ou bien $i = j = 1$. Posons $\chi_\alpha = \chi_k$ sauf si $i < j$ et $k = i$ ou $k = j$. Dans ces deux cas on pose

$$\chi_\alpha = (\chi_i + \chi_j)/\sqrt{2}, \quad \chi_\alpha = (\chi_i - \chi_j)/\sqrt{2},$$

quand $k = i$ et $k = j$ respectivement. Alors, pour $i$ et $j$ fixés, l'ensemble des $\chi_\alpha$ est la base orthonormale $(\chi_1, \ldots, \chi_N)$ sauf si $i < j$, où dans ce cas $\chi_i$ est remplacé par $(\chi_i + \chi_j)/\sqrt{2}$ et $\chi_j$ par $(\chi_i - \chi_j)/\sqrt{2}$. Ceci nous donne $1 + \frac{1}{2}N(N-1)$ bases orthonormales.

On introduit enfin, pour $\alpha$ dans $I$

$$\mu_\alpha = \mu_k \quad \text{si} \quad i < j \quad \text{et} \quad k \neq i, j$$

$$\mu_\alpha = \inf_{1 \leqslant l \leqslant N} \mu_l \quad \text{si} \quad i < j \quad \text{et} \quad k = i \quad \text{ou} \quad j$$

et enfin

$$\mu_\alpha = N\mu_k - (N-1) \inf_{1 \leqslant l \leqslant N} \mu_l \quad \text{si} \quad i = j = 1.$$

On utilisera les deux relations suivantes

$$0 < \nu \leqslant \mu_\alpha \leqslant N\mu - (N-1)\nu \tag{18}$$

$$\sum_{\alpha \in I} \mu_\alpha u^1_{\chi_\alpha \chi_\alpha}(x_0) = (1 + \tfrac{1}{2}N(N-1)\,(\sum_i \mu_i u^1_{\chi_i \chi_i}(x_0)). \tag{19}$$

Les inégalités de (18) sont claires au vu du choix des $\mu_\alpha$ et des propriétés des $\mu_i$. Vérifions donc (19) : pour cela remarquons tout d'abord que grâce à (17) nous avons

$$u^1_{\chi_\alpha\chi_\alpha}(x_0) = u^1_{\chi_k\chi_k}(x_0) \quad \text{si } i<j \quad \text{et } k \neq i, j, \quad \text{ou bien si } i=j=1$$
$$u^1_{\chi_\alpha\chi_\alpha}(x_0) = \tfrac{1}{2}[u^1_{\chi_i\chi_i}(x_0) + u^1_{\chi_j\chi_j}(x_0)] \quad \text{si } i<j \quad \text{et } k=i \quad \text{ou } j.$$

Donc $\sum_{\alpha\in I}\mu_\alpha u^1_{\chi_\alpha\chi_\alpha}(x_0) = \sum_i c_i u^1_{\chi_i\chi_i}(x_0)$.

Montrons par exemple $c_1 = (1+\frac{1}{2}N(N-1))\mu_1$ : en effet $c_1 = \sum_{\alpha\in I_1}\mu_\alpha$ où $I_1 = \{\alpha$ tels que $k=i=j=1$, ou $k=1<i<j$, ou $k=i=1<j\}$ et donc

$$c_1 = (N\mu_1 - (N-1)\inf_{1\leqslant l\leqslant N} u_l) + \tfrac{1}{2}(N-1)(N-2)\mu_1 + (N-1)\inf_{1\leqslant l\leqslant N}\mu_l = (1+\tfrac{1}{2}N(N-1))\mu_1.$$

(iii) *Application du principe du maximum.* Pour simplifier l'écriture, nous noterons $v^k_\alpha = u^k_{\chi_\alpha\chi_\alpha}$.

LEMME 3.1. *Sous les hypothèses du Théorème 2.1 (sauf (9)), il existe $b^{k,\alpha,\gamma}$, $c^{k,\alpha,\gamma}$ $(1\leqslant i\leqslant N,\ 1\leqslant k\leqslant m,\ \alpha,\gamma\in I)$ dans $C(\bar{O})$ dont les normes $L^\infty(O)$ ne dépendent que des normes $L^\infty(O)$ des dérivées premières et secondes des $a^k_{ij}$, de $v$, $\mu$ et $N$, telles que le système suivant d'inégalités soit vérifié :*[1]

$$\begin{aligned} -a^k_{ij}\mu_\alpha v^k_{\alpha ij} + \sum_{\gamma\in I} b^{k,\alpha,\gamma}_i \mu_\gamma v^k_{\gamma i} + \sum_{\gamma\in I} c^{k,\alpha,\gamma}\mu_\gamma v^k_\gamma + \lambda\mu_\alpha v^k_\alpha \\ + \beta'(u^k - u^{k+1})(\mu_\alpha v^k_\alpha - \mu_\alpha v^{k+1}_\alpha) \leqslant \mu_\alpha f_{k,\chi_\alpha\chi_\alpha} \end{aligned} \tag{20}$$

*pour* $1\leqslant k\leqslant m$, $\alpha\in I$.

*Démonstration du Lemme* 3.1. Il suffit de montrer (20) pour $\mu_\alpha \equiv 1$. Pour cela on différentie deux fois par rapport à $\chi_\alpha$ le système (11) et on obtient

$$\begin{aligned} -a^k_{ij}v^k_{\alpha ij} + \lambda v^k_\alpha + \beta'\cdot(v^k_\alpha - v^{k+1}_\alpha) + \beta''\cdot(u^k_{\chi_\alpha} - u^{k+1}_{\chi_\alpha})^2 \\ = f_{k,\chi_\alpha\chi_\alpha} + a^k_{ij,\chi_\alpha\chi_\alpha}u^k_{ij} + 2a^k_{ij,\chi_\alpha}u^k_{ij,\chi_\alpha}, \end{aligned}$$

pour $1\leqslant k\leqslant m$, $\alpha\in I$; et où $u^k - u^{k+1}$ est l'argument de $\beta'$ et $\beta''$.

Pour conclure il suffit de remarquer que d'une part $\beta$ a été choisi convexe et donc le dernier terme du membre de gauche est positif; et que d'autre part on peut exprimer les termes $u^k_{ij}$, $u^k_{ij\chi_\alpha}$ en fonction des $v^k_\alpha$. On conclut alors aisément.

---

[1] Rappelons que $u_{\chi_\alpha\chi_\alpha ij} = \partial_i\partial_j(\partial^2 u/\partial\chi^2_\alpha)$.

On pose alors

$$K=\max_{1\leqslant k\leqslant m}\{\sup_{x\in\bar{O}}(\sum_{\alpha\in I}(\mu_\alpha v_\alpha^k)^2)^{1/2}\}$$

et on introduit

$$w^k(x)=\sum_{\alpha\in I}(K+\mu_\alpha v_\alpha^k)^2.$$

Nous allons montrer dans ce qui suit que

$$w^k(x)\leqslant\sum_{\alpha\in I}(K+\tau K+C+CK^{1/2})^2,\quad \forall x\in\bar{O},\quad 1\leqslant k\leqslant m, \tag{21}$$

où $\tau$ est arbitrairement petit si $\lambda$ est suffisamment grand (les normes $C^2$ des coefficients $a_{ij}^k$ restant bornées).

Pour cela *fixons $k$ et $x_1$* tels que $w^k(x_1)=\max_{l,x}w^l(x)$ et calculons $-a_{ij}^k w_{ij}^k$ :

$$-a_{ij}^k w_{ij}^k=-2\sum_\alpha a_{ij}^k\mu_\alpha v_{\alpha i}^k\mu_\alpha v_{\alpha j}^k+2\sum_\alpha(K+\mu_\alpha v_\alpha^k)\{-a_{ij}^k\mu_\alpha v_{\alpha ij}^k\}$$

mais $K+\mu_\alpha v_\alpha^k\geqslant 0$, donc de (20) nous déduisons

$$-a_{ij}^k w_{ij}^k\leqslant-2\sum_\alpha a_{ij}^k(K+\mu_\alpha v_\alpha^k)_i(K+\mu_\alpha v_\alpha^k)_j+2\sum_\alpha(K+\mu_\alpha v_\alpha^k)B_\alpha \tag{22}$$

où, $\beta'$ ayant son argument habituel,

$$B_\alpha=\mu_\alpha f_{k,\chi_\alpha\chi_\alpha}-\lambda\mu_\alpha v_\alpha^k-\sum_\gamma c^{k,\alpha,\gamma}\mu_\gamma v_\gamma^k-\sum_\gamma b_j^{k,\alpha}\mu_\gamma v_{\gamma j}^k-\beta'\cdot(\mu_\alpha v_\alpha^k-\mu_\alpha v_\alpha^{k+1}).$$

1$^{er}$ *cas : $x_1\in O$.* En ce cas comme $w^k\in C^2(O)$, nous avons $-a_{ij}^k w_{ij}^k(x_1)\geqslant 0$, d'où nous déduisons d'après (22) appliqué au point $x_1$

$$\begin{aligned}a_{ij}^k(K+\mu_\alpha v_\alpha^k)_i(K+\mu_\alpha v_\alpha^k)_j+A^k+\lambda\sum_\alpha(K+\mu_\alpha v_\alpha^k)^2+2\beta'\cdot\sum_\alpha(K+\mu_\alpha v_\alpha^k)(\mu_\alpha v_\alpha^k-\mu_\alpha v_\alpha^{k+1})\\ \leqslant\sum_\alpha(K+\mu_\alpha v_\alpha^k)(\lambda K+K(\sum_\gamma c^{k,\alpha,\gamma})+\mu_\alpha f_{k,\chi_\alpha\chi_\alpha})\end{aligned} \tag{22'}$$

où $A_k$ est bilinéaire en $(K+\mu_\alpha v_\alpha^k)$ et $(K+\mu_\alpha v_\alpha^k)_i$ et son gradient à coefficients $c^{k,\alpha,\gamma}$ et $b_i^{k,\alpha,\gamma}$.

Or en $x_1$ nous avons

$$\sum_\alpha(K+\mu_\alpha v_\alpha^k)(\mu_\alpha v_\alpha^k-\mu_\alpha v_\alpha^{k+1})\geqslant\tfrac{1}{2}w^k(x_1)-\tfrac{1}{2}w^{k+1}(x_1)\geqslant\tfrac{1}{2}\max_x w_k(x)-\tfrac{1}{2}\max_x w^{k+1}(x)\geqslant 0$$

et aussi $\beta'(u^k-u^{k+1})\geqslant 0$, donc $\beta'(u^k-u^{k+1})\sum_\alpha(K+\mu_\alpha u_{\chi_\alpha\chi_\alpha}^k)(\mu_\alpha u_{\chi_\alpha\chi_\alpha}^k-\mu_\alpha u_{\chi_\alpha\chi_\alpha}^{k+1})\geqslant 0.$

D'autre part, de par l'ellipticité de $a_{ij}^k$, $\exists\lambda_1>0$ dépendant de $\nu$ et des normes $L^\infty$ des $b_i^{k,\alpha,\gamma}$, $c^{k,\alpha,\gamma}$ tel que $\forall(\xi_0^\alpha,\xi^\alpha)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N$ pour $\alpha\in I$ on ait

$$\sum_\alpha a_{ij}^k\xi_i^\alpha\xi_j^\alpha+\sum_{\alpha,\gamma}b_i^{k,\alpha,\gamma}\xi_0^\alpha\xi_i^\gamma+\sum_{\alpha,\gamma}c^{k,\alpha,\gamma}\xi_0^\alpha\xi_0^\alpha+\lambda_1\sum_\alpha\xi_0^\alpha\xi_0^\alpha\geqslant 0.$$

Donc (22′) peut être réécrit si $\lambda>\lambda_1+1$

$$w_k(x_1)\leqslant\sum_\alpha(K+\mu_\alpha v_\alpha^k)(x_1)\,((\lambda-\lambda_1)^{-1}(\lambda+C_1)K+C_2), \tag{23}$$

où $C_1$ ne dépend que de $\|c^{k,\alpha,\gamma}\|_{L^\infty(O)}$ et $C_2$ de $\|f^k\|_{W^{2,\infty}(O)}$. On en déduit

$$w^k(x)\leqslant(\sum_\alpha)(K+\tau K+C_2)^2,\quad\forall x\in\bar{O}\quad(\text{où}\quad\tau=(\lambda_1+C_1)/(\lambda-\lambda_1)). \tag{23′}$$

$2^e$ *cas :* On suppose ici que $x_1\in\Gamma$, alors d'après (13)

$$w^k(x_1)\leqslant(\sum_\alpha)(K+CM^{1/2})^2$$

mais

$$M\leqslant N\sup_{\substack{i,j,k\\x\in\bar{O}}}|u_{\chi_i\chi_j}^k(x)|\leqslant 2N\sup_{\substack{\alpha\in I,k\\x\in O}}|v_\alpha^k(x)|$$

(utiliser la relation : si $i\neq j$, $u_{\chi_i\chi_j}(x)=u_{\chi\chi}(x)-\frac{1}{2}u_{\chi_i\chi_i}(x)-\frac{1}{2}u_{\chi_j\chi_j}(x)$; où $\chi=(\chi_i+\chi_j)/\sqrt{2}$); d'où une majoration de $M$ par $C_3K$ où $C_3$ ne dépend que de $N$, $\nu$ et $\mu$.

Ainsi dans tous les cas on en déduit la majoration (21) :

$$w^k(x)\leqslant(\sum_\alpha)(K+\tau K+CK^{1/2}+C)\quad\forall x\in\bar{O},\quad 1\leqslant k\leqslant m, \tag{21}$$

où $\tau=(\lambda_1+C_1)/(\lambda-\lambda_1)$ et $C$ ne dépend pas de $\lambda$.

(iv) *Conclusion.* Nous allons appliquer (21) au point $x_0$ (choisi en (i)), nous obtenons en développant

$$\sum_\alpha\{\mu_\alpha v_\alpha^1(x_0)\}^2\leqslant(\sum_\alpha)(K+\tau K+CK^{1/2}+C)(\tau K+CK^{1/2}+C)$$
$$+2K\sum_\alpha(-\mu_\alpha v_\alpha^1)(x_0)+(\sum_\alpha)(\tau K^2+CK^{3/2}+CK).$$

Mais d'après (19)

$$-\sum_\alpha\mu_\alpha v_\alpha^1(x_0)=-(1+\tfrac{1}{2}N(N-1))\,a_{ij}^1u_{ij}^1(x_0)\leqslant C$$

puisque

$$A_1u^1(x_0)\leqslant f_1(x_0)\quad\text{et}\ \|u^1\|_{C^1(\bar{O})}\leqslant\text{const.}$$

De plus

$$\sum_{\alpha} \{\mu_\alpha v_\alpha^1(x_0)\}^2 \geqslant \nu^2 \sup_{i,j} |u_{ij}^1(x_0)|^2 = \nu^2 M^2$$

par définition de $x_0$.

Enfin $K \leqslant C_4 M$ où $C_4$ ne dépend que de $\nu$, $\mu$, $N$; donc en conclusion nous avons

$$M^2 \leqslant C_4^2 \tau(2+\tau) M^2 + CM^{3/2} + C$$

et si $\lambda > \lambda_0$ où $\lambda_0$ est tel que $C_4^2 \tau(2+\tau) < 1$, nous obtenons une estimation de $M$.

## 3 (d). Passage à la limite

Nous allons faire un double passage à la limite : tout d'abord faire tendre $\varepsilon$ vers 0, puis faire tendre $m$ vers l'infini.

Pour effectuer ces passages à la limite, deux démonstrations sont possibles, introduites l'une par P. L. Lions et J. L. Menaldi [16] et l'autre par L. C. Evans et A. Friedman (voir [6] et [7]). La première, bien que plus élémentaire, utilise des arguments probabilistes; aussi présenterons-nous la méthode de L. C. Evans et A. Friedman qui est entièrement analytique. Néanmoins comme il ne s'agit que d'une redite des démonstrations de [7], nous ne ferons qu'esquisser la démonstration.

Montrons tout d'abord que si, pour $m$ fixé, $\varepsilon \to 0$, $u_k^\varepsilon \to u_m$ dans $C^1(\bar{O})$, $1 \leqslant k \leqslant m$ et $u_m \in W^{2,\infty}(O)$ et $u_m$ vérifie :

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} (A_i u_m - f_i) = 0 \quad \text{p.p. dans } O,\ u_m = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \tag{1}$$

Admettons cela provisoirement, alors d'après 3 (a), (b), (c) nous avons $\|u_m\|_{W^{2,\infty}(O)} \leqslant$ const. (indép. de $m$); alors un raisonnement identique au précédent permet de démontrer que $u_m \to u$ dans $C^1(\bar{O})$ si $m \to \infty$, où $u \in W^{2,\infty}(O)$ et est solution de

$$\sup_{i \in N} (A_i u - f_i) = 0 \quad \text{p.p. dans } O,\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \tag{8}$$

En raison de la similarité des raisonnements nous ne démontrerons pas le deuxième passage à la limite (voir [7]).

Il ne nous reste plus donc qu'à montrer que si $\varepsilon_n \to 0$ et $u_k^{\varepsilon_n} \to u_k \in W^{2,\infty}(O)$, la convergence ayant lieu dans $C^1(\bar{O})$ alors $u_k = u$ pour tout $k$ et $u$ vérifie (1).

La démonstration de la première assertion est aisée : en effet puisque $\beta_{\varepsilon_n}(u_k^{\varepsilon_n} - u_{k+1}^{\varepsilon_n})$ est bornée dans $L^\infty(O)$, nous avons $u_k \leqslant u_{k+1}$, $\forall k = 1, \ldots, m$ et donc $u_k = u$ pour tout $k$.

Montrons maintenant que $u$ vérifie (1). Pour cela, suivant une méthode de « type Minty » (voir [6] ou [7]), on introduit le crochet $[f, g]^+$ pour $f, g \in C(\bar{O})$, $f \not\equiv 0$ :

$$[f, g]^+ = \sup_{\{x \in \bar{O};\, |f(x)| = \|f\|_{C(\bar{O})}\}} g(x) \cdot \operatorname{sgn} f(x).$$

On rappelle que $(f, g) \to [f, g]^+$ est s.c.s. sur $C(\bar{O}) \times C(\bar{O})$. Nous allons montrer successivement que

(a) $\forall \varphi \in C^2(\bar{O})$, $\varphi > u$ sur $\bar{O}$, nous avons
$[u - \varphi, -\max_k [A_k \varphi - f_k]]^+ \geqslant 0$,

(b) $\max_k [A_k u - f_k] \geqslant 0$,

(c) $\max_k [A_k u - f_k] = 0$.

(a) Puisque $\varphi > u$, pour $n$ assez grand nous avons $\varphi > u_k^{\varepsilon_n}$ sur $\bar{O}$, et du principe maximum nous déduisons (comme dans [6])

$$0 \leqslant \sup \{(A_k \varphi - f_k)(x); \quad \text{pour tous les } x \text{ et } k \text{ vérifiant } (\varphi - u_k^{\varepsilon_n})(x) = \max_k \|\varphi - u_k^{\varepsilon_n}\|_{C(\bar{O})}\}$$

d'où à fortiori

$$0 \leqslant [\varphi - \inf_k u_k^{\varepsilon_n}, \max_k (A_k \varphi - f_k)]^+.$$

Par passage à la limite on en déduit

$$[u - \varphi, \ -\max_k (A_k \varphi - f_k)]^+ \geqslant 0. \tag{25}$$

(b) On en déduit que $\max_k (A_k u - f_k) \geqslant 0$ p.p. dans $\bar{O}$, grâce au lemme suivant dû à L. C. Evans [6] :

Lemme 3.2. *Si $u \in W^{2,\infty}(O)$, alors p.p. $x_0 \in \bar{O}$, $\exists \varphi_n \in C^2(\bar{O})$ tel que*

(i) $\varphi_n(x_0) \to u(x_0)$, $\nabla \varphi_n(x_0) \to \nabla \varphi(x_0)$, $D^2 \varphi_n(x_0) \to D^2 u(x_0)$ si $n \to \infty$,

(ii) $-(u - \varphi_n)(x_0) = \|u - \varphi_n\|_{C(\bar{O})}$,

(iii) $0 > (u - \varphi_n)(x) > (u - \varphi_n)(x_0)$ *pour* $x \in \bar{O}$, $x \neq x_0$.

En prenant alors dans (25) $\varphi = \varphi_n$, on obtient

$$\text{p.p. } x_0 \in \bar{O}, \quad \forall n, \quad \max_k (A_k \varphi_n(x_0) - f_k(x_0)) \geqslant 0$$

d'où

$$\text{p.p. } x_0 \in \bar{O}, \quad \max_k (A_k u(x_0) - f_k(x_0)) \geqslant 0.$$

(c) Comme $A_k u_k^\varepsilon \leqslant f_k$, on a bien sûr $A_k u \leqslant f_k$ p.p. dans $\bar{O}$, d'où en conclusion $\max_k (A_k u - f_k) = 0$ p.p. dans $\bar{O}$.

### 3 (e). Unicité

L'unicité de $u$ solution de (8) s'obtient dans la classe $W^{2,N}_{\text{loc}}(\mathcal{O}) \cap C(\bar{\mathcal{O}})$ par la méthode probabiliste de N. V. Krylov [13] (voir également l'exposé dans [16]). Dans la classe $W^{2,p}_{\text{loc}}(\mathcal{O}) \cap C(\bar{\mathcal{O}})$ (avec $p > N$) on peut démontrer l'unicité grâce au principe du maximum de J. M. Bony [5]. En effet soient $u$, $\tilde{u}$ deux solutions de (8) dans $W^{2,p}(\mathcal{O}) \cap C(\bar{\mathcal{O}})$ et supposons qu'il existe $x \in \bar{\mathcal{O}}$ tel que :

$$(u-\tilde{u})(x) = \max (u-\tilde{u}) = \delta > 0.$$

Alors bien sûr $x \in \mathcal{O}$. D'autre part il existe une application mesurable $(y \to m_y)$ (voir par exemple [17]) de $\bar{\mathcal{O}}$ dans $N$ telle que p.p. $y \in \bar{\mathcal{O}}$

$$A_{m_y}\tilde{u}(y) \geq f_{m_y}(y) - \tfrac{1}{2}\delta\lambda$$

donc

$$A_{m_y}(u-\tilde{u})(y) \leq \tfrac{1}{2}\delta\lambda \quad \text{p.p. } y \in \bar{\mathcal{O}}.$$

D'où $\lim\sup \mathrm{ess}_{y \to x} A_{m_y}(u-\tilde{u})(y) \leq \frac{1}{2}\delta\lambda$ ce qui contredit [5]. La contradiction prouve donc l'unicité.

## 4. Quelques complements relatifs a l'hypothese (9)

Nous conjecturons que l'hypothèse (9) n'est pas necessaire : le Théoreme 2.1 devrait rester vérifié uniquement sous l'hypothèse $\lambda \geq 0$. Nous donnons ci-dessous deux résultats partiels dans cette direction qui semblent confirmer cette conjecture. Un autre cas (très simple) où on peut montrer que $\lambda \geq 0$ suffit est le cas où les opérateurs $A_m$ satisfont :

$$a^m_{ij} \quad \text{est indépendant de } m.$$

THÉORÈME 4.1. *Sous les mêmes hypothèses qu'au Théorème* 2.1 *sauf* (9) *et si on suppose de plus que :*
*ou bien*

$$\delta = \text{diam}\,(\bar{\mathcal{O}}) < \delta_0 \tag{9'}$$

*(et $\delta_0$ ne dépend que des normes $L^\infty(\mathcal{O})$ des dérivées premières et secondes des coefficients);*
*ou bien*

$$|D^k\varphi(x)| \leq \varepsilon_0 \quad \forall x \in \bar{\mathcal{O}}, \quad \forall k = 1, 2, \quad \forall \varphi = a^m_{ij}, b^m_i \tag{9''}$$

*(où $\varepsilon_0$ ne dépend que de $\nu$ dans* (3), *et de $\delta$), alors il existe un unique $u \in W^{2,\infty}(\mathcal{O})$ solution de*

$$\sup_{m \geq 1} (A_m u - f_m) = 0 \quad \text{p.p. dans } \mathcal{O},\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

COROLLAIRE 4.2. *Sous les hypothèses* (3), (4) *et* (5) *et si on suppose de plus*

$$a_{ij}^m \quad \text{ne dépend pas de } x, \text{ pour tout } m \geqslant 1,\ 1 \leqslant i, j \leqslant N; \tag{26}$$

*alors il existe un unique* $u \in W^{2,\infty}(O)$ *solution de*

$$\sup_{m \geqslant 1} (A_m u - f_m) = 0 \quad \text{p.p. dans } O,\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

*Remarque 4.3.* Le Corollaire 4.2 généralise le résultat principal de [7], où sous les mêmes hypothèses il est démontré l'existence d'une solution dans $W^{2,\infty}_{\text{loc}} \cap W^{1,\infty}_0(O)$.

Nous ne donnons pas les démonstrations de ces deux résultats, qui sont très semblables à celle du Théorème 2.1.

## Bibliographie


[1] BENSOUSSAN, A. & LIONS, J. L., *Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique*. Dunod, Paris, 1978.

[2] BENSOUSSAN, A. & LIONS, P. L., Control of random evolutions. A paraître.

[3] BRÉZIS, H. & EVANS, L. C., A variational approach to the Bellman–Dirichlet equation for two elliptic operators. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 71 (1979), 1–14.

[4] BRÉZIS, H. & KINDERLEHRER, D., The smoothness of solutions to non linear variational inequalities. *Indiana Univ. Math. J.*, 23 (1974), 831–844.

[5] BONY, J. M., Principe du maximum dans les espaces de Sobolev. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A–B*, 265 (1967), 333–336.

[6] EVANS, L. C., A convergence theorem for solutions of nonlinear second order elliptic equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 27 (1978), 875–887.

[7] EVANS, L. C. & FRIEDMAN, A., Optimal stochastic switching and the Dirichlet problem for the Bellman equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 253 (1979), 365–389.

[8] GENIS, I. L. & KRYLOV, N. V., An example of a one dimensional controlled process. *Theor. Probability Appl.*, 21 (1976), no 1, 148–152.

[9] KOHN, J. J. & NIRENBERG, L., Communication personnelle.

[10] KRUZKOV, S. N., Generalized solutions of the Hamilton–Jacobi equations of Eikonal type. I. *Mat. Sb.*, 27 (1975), no 3, 406–445.

[11] KRYLOV, N. V., On control of the solution of a stochastic integral equation. *Th. Proba. and Appl.*, 17 (1972), 114–131.

[12] —— On equations of minimax type in the theory of elliptic and parabolic equations in the plane. *Math. USSR-Sb.*, 10 (1970), 1–20.

[13] —— On uniqueness of the solution of the Bellman's equation. *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Math.*, 5 (1971), no 6, 1387–1398.

[14] LIONS, P. L., Contrôle de diffusions dans $\mathbf{R}^N$. A paraître aux *Comm. Pure Appl. Math.* Voir aussi *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A–B*, 288 (1979), 339–342.

[15] —— Equations de Hamilton–Jacobi–Bellman dégénérées dans des ouverts bornés. A paraître.

[16] LIONS, P. L. & MENALDI, J. L., Control of stochastic integrals and equations of Hamilton–Jacobi–Bellman. A paraître.

[17] NISIO, M., Some remarks on optimal stochastic controls. *Proceedings 3rd Japan-USSR Symposium on Probability theory*. Springer Lecture Notes, 446–460.


*Reçu le 20 Novembre 1979*