SUR L'APPROXIMATION D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE ET DE SES DÉRIVÉES SUCCESSIVES PAR UN POLYNOME TRIGONOMÉTRIQUE ET PAR SES DÉRIVÉES SUCCESSIVES

PAR

J. CZIPSZER ET G. FREUD

Institut de Mathématique de l'Académie des Sciences de Hongrie, Budapest

Introduction

Cet article sera consacré au problème suivant: $f(x)$ étant une fonction périodique de période 2π qui admet une k-ième dérivée continue $(k=1, 2, \ldots)$ et $P_n(x)$ un polynome trigonométrique d'ordre n qui approche $f(x)$ à ε près:

$$\max |f(x) - P_n(x)| \leqslant \varepsilon, \tag{1}$$

quelle estimation supérieure peut-on donner pour la quantité

$$\max |f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)| ?$$

Il est clair que la seule connaissance de ε ne suffit pas à résoudre ce problème. Mais si nous considérons la quantité $E_n(f^{(k)})$ (1) comme donnée, alors nous pouvons énoncer la proposition suivante:

$$\max |f^{(k} (x) - P_n^{(k)}(x)| \leqslant c_1(k) [n^k \varepsilon + E_n(f^{(k)})] \tag{2}$$

où $c_1(k)$ est une constante qui ne dépend que de k (voir le théorème 1° du §.1). L'inégalité (2) admet une localisation que nous présenterons dans le §.2.

On obtient des inégalités d'une forme plus simple si l'on mesure l'écart de la fonction du polynome trigonométrique d'ordre n relativement à la meilleure approximation trigonométrique d'ordre n, c'est-à-dire si l'on compare les quantités

---

(1) Pour les notations voir la fin de cette Introduction.

$$\frac{\max|f(x)-P_n(x)|}{E_n(f)} \quad \text{et} \quad \frac{\max|f^{(k)}(x)-P_n^{(k)}(x)|}{E_n(f^{(k)})}.$$

On trouve dans cet ordre d'idées que

$$\max|f(x)-P_n(x)| \leqslant \delta E_n(f) \tag{3}$$

entraîne

$$\max|f^{(k)}(x)-P_n^{(k)}(x)| \leqslant c_2(k)\,\delta E_n(f^{(k)}) \tag{4}$$

où $c_2(k)$ est une constante qui ne dépend que de k. Le théorème 2° du §. 1. fournit pour $c_2(k)$ la valeur $12\cdot 2^k$. Dans le reste de cet ouvrage nous nous sommes efforcés d'abaisser la valeur de $c_2(k)$ autant que possible. Dans ce but nous introduisons dans le §. 3. certaines moyennes des sommes partielles de la série de Fourier de $f(x)$ qui constituent une généralisation de la moyenne de Ch. de la Vallée Poussin. A l'aide de certaines propriétés de ces moyennes, exposées dans le §. 3., nous montrerons dans le §. 4. que $\Theta_1 \log(k+1)$ est une valeur admissible pour $c_2(k)$ où Θ_1 est une constante absolue. Encore mieux: si l'on admet que dans (4) $c_2(k)$ soit aussi fonction de n alors l'inégalité

$$\max|(f^{(k)}(x)-P_n^{(k)}(x)| \leqslant \Theta_1 \log[\min(k,n)+1]\,\delta E_n(f^{(k)}) \tag{5}$$

est valable (toujours dans l'hypothèse (3)).

L'un des auteurs du présent article, J. Czipszer, est parvenu à montrer par des contre-exemples que la quantité $\Theta_1 \log[\min(k,n)+1]$ au second membre de (5) ne peut plus être abaissée, abstraction faite de la valeur numérique de Θ_1.(¹)

Tous ces résultats sont valables aussi dans l'espace $\mathbf{L}^1$, c'est-à-dire que nous pouvons remplacer $\max|\ldots|$ par $\|\ldots\|_1$ et E_n par $E_n^{(1)}$. Dans les espaces $\mathbf{L}^p\,(1<p<\infty)$ on peut donner des estimations plus précises comme nous verrons dans 4.2. En effet dans ces espaces $c_2(k)$ peut être remplacé par une constante qui ne dépend que de p.

Remarquons encore que tout ce que nous venons de dire de l'estimation des fonctions $f^{(k)}(x)-P_n^{(k)}(x)$ est valable aussi pour leurs conjuguées $\tilde{f}^{(k)}(x)-\tilde{P}_n^{(k)}(x)$.

Voici enfin les notations dont nous nous servirons au cours de cet ouvrage. $\mathbf{T}_n$ désigne l'ensemble des polynomes trigonométriques d'ordre n. $\mathbf{C}$ désigne l'espace des fonctions continues et périodiques de période 2π avec la norme $\|f\|=\max|f(x)|$.

(¹) Ajouté à l'épreuve: Entre temps, nous avons appris d'une lettre de M. le Professeur S. B. Stechkine, datée du 13.II.56. et adressée à M. le Professeur G. Alexits, lequel a bien voulu nous la remettre, que M. A. L. Garcavi a exposé, dans une communication faite à la Société Mathématique de Moscou sous le titre « Sur l'approximation des fonctions périodiques et de leurs dérivées par des polynomes trigonométriques » (en russe), des resultats qui impliquent les premières propositions des théorèmes 1 et 4 du §. 4. ainsi que les contre-exemples relatifs mentionnés dans l'Introduction. Vu que les resultats de M. Garcavi sont plus précis sur certains points que les nôtres, nous omettons la publication des contre-exemples.

$\mathbf{L}^p\,(1 \leqslant p < \infty)$ désigne l'espace des fonctions de période 2π à p-ième puissance intégrables sur $(-\pi, \pi)$ et mesurables, normé avec la norme

$$\|f\|_p = \Big[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\, dx\Big]^{1/p}.$$

$\mathbf{L}^\infty$ désigne l'espace des fonctions mesurables, essentiellement bornées périodiques de période 2π, normé avec la norme $\|f\|_\infty = \text{vrai max}\,|f(x)|$. Soit

$$E_n(f) = \min_{U_n \in \mathbf{T}_n} \|f - U_n\| \quad (f \in \mathbf{C}), \qquad E_n^{(p)}(f) = \min_{U_n \in \mathbf{T}_n} \|f - U_n\|_p \quad (f \in \mathbf{L}^p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

$s_n(f, x)$ désigne la n-ième somme partielle de la série de Fourier de $f(x)$.

Nous désignerons par « inégalité $\mathcal{B}_p$ » $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ la relation $\|U_n'\|_p \leqslant n \|U_n\|_p$ valable pour chaque $U_n \in \mathbf{T}_n$. L'inégalité $\mathcal{B}_\infty$ est due à S. Bernstein, voir [2], pour $1 \leqslant p < \infty$ voir [12], §. 3. pp. 19–28.

Nous désignons par « inégalité $\tilde{\mathcal{B}}_p$ » $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ la relation $\|\tilde{U}_n'\|_p \leqslant n \|U_n\|_p$ valable pour chaque $U_n \in T_n$. L'inégalité $\tilde{\mathcal{B}}_\infty$ est due à G. Szegö ([10]), pour $1 \leqslant p < \infty$ voir [12], §. 3., pp. 19–28.

Si dans une proposition le domaine de variation de n ou de k n'est pas fixé, alors cela signifie que le domaine de variation de n ou de k est l'ensemble des nombres naturels.

§. 1.

1.1. Théorème 1°. *Soit $f \in \mathbf{C}$, $P_n \in \mathbf{T}_n$ et*

$$\|f - P_n\| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Alors les inégalités suivantes sont valables:

$$\|f^{(k)} - P_n^{(k)}\| \leqslant 3 \cdot 2^k n^k \varepsilon + 4 E_n(f^{(k)}), \tag{2}$$

pourvu que $f^{(k)}$ existe et soit continue;

$$\|\tilde{f}^{(k)} - \tilde{P}_n^{(k)}\| \leqslant 3 \cdot 2^k n^k \varepsilon + 4 E_n(\tilde{f}^{(k)}), \tag{3}$$

pourvu que $\tilde{f}^{(k)}$ existe et soit continue;

$$\|\tilde{f} - \tilde{P}_n\| \leqslant A\, \varepsilon \log (n+1) + 4 E_n(\tilde{f}), \tag{4}$$

A désignant une constante universelle, pourvu que $\tilde{f}$ soit continue.

$g(x)$ étant une fonction de $\mathbf{C}$, désignons par $V_n(g, x)$ (ou simplement par $V_n(g)$) la n-ième moyenne de de La Vallée Poussin de la série de Fourier de $g(x)$ c'est-à-dire posons

$$V_n(g,x)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=n}^{2n-1} s_\nu(g,x)$$

(cf. [11], Ch. II.). On obtient les inégalités bien connues:

$$\|V_n(g)\|\leqq 3\|g\| \tag{5}$$

et

$$\|g-V_n(g)\|\leqq 4E_n(g). \tag{6}$$

Rappelons que V_n est une opération linéaire, c'est-à-dire

$$V_n(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)=\lambda_1 V_n(g_1)+\lambda_2 V_n(g_2)$$

($g_1, g_2 \in \mathrm{C}$, λ_1 et λ_2 étant deux nombres réels) et que l'opération V_n et la dérivation, ainsi que l'opération V_n et la formation de la fonction conjuguée se laissent intervertir, c'est-à-dire

$$V_n(g',x)=\frac{d}{dx}V_n(g,x),\qquad \text{si } g'(x) \text{ est continue}$$

et

$$V_n(\tilde g,x)=\tilde V_n(g,x),\qquad \text{si } \tilde g(x) \text{ est continue.}$$

Rappelons encore l'identité

$$V_n(U_n,x)\equiv U_n(x) \tag{7}$$

valable pour chaque $U_n\in \mathrm{T}_n$.

Après ces préliminaires, procédons à la démonstration du théorème.

On a d'après (1), (5) et (7)

$$\|V_n(f)-P_n\|\leqq 3\varepsilon. \tag{8}$$

ad (2). Appliquons l'inégalité $\mathcal{B}_\infty$ au polynome trigonométrique $V_n(f)-P_n$ d'ordre $2n-1$; il en résulte

$$\|V_n^{(k)}(f)-P_n^{(k)}\|\leqq 3\cdot 2^k n^k \varepsilon. \tag{9}$$

(6) fournit pour $g=f^{(k)}$ l'inégalité

$$\|f^{(k)}-V_n(f^{(k)})\|\leqq 4E_n(f^{(k)}). \tag{10}$$

(2) résulte de (9) et (10) en vertu de l'identité $V_n(f^{(k)})\equiv V_n^{(k)}(f)$.

ad (3). A l'aide de l'inégalité $\tilde{\mathcal{B}}_\infty$ on déduit de (8)

$$\|\tilde V_n^{(k)}(f)-\tilde P_n^{(k)}\|\leqq 3\cdot 2^k n^k \varepsilon. \tag{11}$$

(6) fournit pour $g=\tilde f^{(k)}$ l'inégalité

$$\|\tilde f^{(k)}-V_n(\tilde f^{(k)})\|\leqq 4E_n(\tilde f^{(k)}). \tag{12}$$

(3) résulte de (11) et (12) en vertu de l'identité $V_n(\tilde f^{(k)})\equiv \tilde V_n^{(k)}(f)$.

ad (4). Nous partons de l'inégalité bien connue

$$\|\tilde{U}_n\| \leqslant a \log (n+1) \|U_n\| \tag{13}$$

où a est une constante universelle et U_n est un élément arbitraire de $\mathbf{T}_n$.

Il s'ensuit de (8) en vertu de (13) que

$$\|\tilde{V}_n(f) - \tilde{P}_n\| \leqslant 3 a \varepsilon \log 2n \leqslant 6 a \varepsilon \log (n+1). \tag{14}$$

D'après (6) on a

$$\|\tilde{f} - V_n(\tilde{f})\| \leqslant 4 E_n(\tilde{f}). \tag{15}$$

En comparant (14) et (15) et en tenant compte de l'identité $\tilde{V}_n(f) \equiv V_n(\tilde{f})$, on trouve (4) avec $A = 6a$.

1.2. Nous allons modifier quelque peu le théorème 1° (abstraction faite de l'inégalité 1.1. (4)). Citons à cet effet les inégalités

$$E_n(g) \leqslant \frac{\pi}{(n+1)^k} E_n(g^{(k)}) \tag{1}$$

et

$$E_n(\tilde{g}) \leqslant \frac{\pi}{(n+1)^k} E_n(g^{(k)}), \tag{2}$$

valables pour chaque $g \in \mathbf{C}$ qui admet une k-ième dérivée continue. Ces inégalités se laissent déduire par une méthode bien connue des inégalités

$$E_n(g) \leqslant \frac{\pi}{2(n+1)^k} \|g^{(k)}\| \tag{3}$$

et

$$E_n(\tilde{g}) \leqslant \frac{\pi}{2(n+1)^k} \|g^{(k)}\|, \tag{4}$$

valables pour chaque $g \in \mathbf{C}$ qui admet une k-ième dérivée continue, dues à Favard et Achyeser. (1)

Substituons maintenant $\delta E_n(f)$ à ε dans 1.1. (1). On obtient alors les quantités

$$3 \cdot 2^k n^k \delta E_n(f) + 4 E_n(f^{(k)}) \quad \text{et} \quad 3 \cdot 2^k n^k \delta E_n(f) + 4 E_n(\tilde{f}^{(k)})$$

aux membres droits de (2) et (3). En appliquant (1) à f et (2) à $\tilde{f}$, on voit que ces quantités sont majorées par $(3 \cdot 2^k \pi \delta + 4) E_n(f^{(k)})$, resp. par $(3 \cdot 2^k \pi \delta + 4) E_n(\tilde{f}^{(k)})$ et en tenant compte des inégalités triviales $\delta \geqslant 1$ (si $E_n(f) \neq 0$), $3 \cdot 2^k \pi + 4 < 12 \cdot 2^k$, on voit qu'elles sont majorées à plus forte raison par $12 \cdot 2^k \delta E_n(f^{(k)})$, resp. par $12 \cdot 2^k \delta E_n(\tilde{f}^{(k)})$.

(1) Voir, pour (3) et (4), [1], pp. 195–199 et [3], pp. 219, 250, 251, pour (1) et (2), [9], pp. 198, 199. Dans les passages cités nous trouvons, au lieu de π et $\frac{1}{2}\pi$, des constantes qui dépendent de k. En posant π, resp. $\frac{1}{2}\pi$, nous avons remplacé ces constantes par une de leurs bornes supérieures. Remarquons que (1) et (2) sont valables aussi avec $\frac{1}{2}\pi$ au lieu de π, mais nous n'insistons pas sur ce point.

Ainsi nous pouvons énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2°. *Soit* $f \in \mathbf{C}$, $P_n \in \mathbf{T}_n$ *et supposons que*

$$\|f - P_n\| \leqq \delta E_n(f).$$

On a alors

$$\|f^{(k)} - P_n^{(k)}\| \leqq 12.2^k \delta E_n(f^{(k)}), \tag{5}$$

pourvu que $f^{(k)}$ *existe et soit continue et*

$$\|\tilde{f}^{(k)} - \tilde{P}_n^{(k)}\| \leqq 12 \cdot 2^k \delta E_n(\tilde{f}^{(k)}), \tag{6}$$

pourvu que $\tilde{f}^{(k)}$ *existe et soit continue.*

Voici une conséquence directe de ce théorème:

Si
$$P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots$$

est une suite de polynomes trigonométriques ($P_n \in \mathbf{T}_n$) qui converge dans l'ordre de la meilleure approximation vers une fonction f de $\mathbf{C}$, c'est-à-dire si

$$\|f - P_n\| = O(E_n(f)),$$

alors il en est de même pour la suite des dérivées

$$P_1^{(k)}(x),\ P_2^{(k)}(x),\ \ldots,\ P_n^{(k)}(x),\ \ldots \quad \text{et} \quad f^{(k)}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

et pour la suite des dérivées conjuguées

$$\tilde{P}_1^{(k)}(x),\ \tilde{P}_2^{(k)}(x),\ \ldots,\ \tilde{P}_n^{(k)}(x),\ \ldots \quad \text{et} \quad \tilde{f}^{(k)}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

c'est-à-dire on a

$$\|f^{(k)} - P_n^{(k)}\| = O[E_n(f^{(k)})] \quad (n \to +\infty)$$

et

$$\|\tilde{f}^{(k)} - \tilde{P}_n^{(k)}\| = O[E_n(\tilde{f}^{(k)})] \quad (n \to +\infty),$$

pourvu que $f^{(k)}(x)$, resp. $\tilde{f}^{(k)}(x)$ existe et soit continue.

§. 2.

Le théorème suivant est une sorte de localisation de l'inégalité (2) du théorème 1° (§. 1.).

THÉORÈME. *Soit* $f(x)$ *une fonction définie dans* $[\alpha_1, \alpha_2]$ *de longeur inférieure à* 2π *qui admet une* k*-ième dérivée continue. Désignons par* $E_n(f;\ \alpha_1, \alpha_2)$ *la borne inférieure* ($=$ *minimum*) *des nombres*

$$\max_{\alpha_1 \leqq x \leqq \alpha_2} |f(x) - U_n(x)|$$

lorsque U_n *parcourt* $\mathbf{T}_n$. *Soit* $P_n \in \mathbf{T}_n$, ε *un nombre réel qui vérifie l'inégalité*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (\alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2) \tag{1}$$

et δ *un nombre positif inférieur à* $\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$.

Dans ces hypothèses on a

$$|f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)| \leqslant \Lambda\,[n^k \varepsilon + E_n(f^{(k)};\ \alpha_1, \alpha_2) + 2^{-n} M] \qquad (\alpha_1 + \delta \leqslant x \leqslant \alpha_2 - \delta) \tag{2}$$

où

$$M = \max_{\substack{0 \leqslant \nu \leqslant k \\ \alpha_1 \leqslant x \leqslant \alpha_2}} |f^{(\nu)}(x)|$$

et Λ *est une constante qui ne dépend que de* $\alpha_2 - \alpha_1$, δ *et* k *(elle est alors indépendante de* x, *de* f *et de* n*).*

Il est légitime d'admettre que l'intervalle $[\alpha_1, \alpha_2]$ soit situé symétriquement par rapport à l'origine.

Posons $\qquad \alpha = \alpha_2 = -\alpha_1;$

on a alors $\qquad 0 < \delta < \alpha < \pi.$

Le reste de ce paragraphe sera consacré à la démonstration de ce théorème.

2.1. Pour que nous puissions reprendre le cours de la démonstration du théorème 1° (§. 1.) étendons $f(x)$ à une fonction $F(x)$ définie pour chaque x qui soit périodique (de période 2π) et qui admette une k-ième dérivée continue. Définissons, à cet effet, le polynome ordinaire $H(x)$ d'ordre $2k+1$ par les conditions

$$H^{(\nu)}(\alpha) = f^{(\nu)}(\alpha) \qquad (0 \leqslant \nu \leqslant k)$$

$$H^{(\nu)}(2\pi - \alpha) = f^{(\nu)}(-\alpha) \qquad (0 \leqslant \nu \leqslant k)$$

et posons

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha \\ H(x) & \text{pour } \alpha < x < 2\pi - \alpha \end{cases}$$

et étendons $F(x)$ périodiquement (de période 2π) pour toutes les valeurs de x.

Il est évident que $F(x)$ satisfait aux exigences énoncées plus haut. On constate facilement que le module de $F(x)$ et de ses dérivées ne dépasse pas un multiple constant de M:

$$\|F^{(\nu)}(x)\| \leqslant \lambda_1 M \qquad (0 \leqslant \nu \leqslant k) \tag{1}$$

où λ_1 ne dépend que de α, δ et k. (1)

(1) Convenons de désigner par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ des constantes positives qui ne dépendent que de α, δ et k et par $\mu_1, \mu_2, \ldots$ des constantes positives qui ne dépendent que de α et δ.

2.2.1. Nous introduisons maintenant une suite d'opérations $A_1, A_2, \ldots$ inventées par M. T. Frey qui joueront le rôle des opérations V_n du §. 1. La plus importante propriété de ces opérations est exprimée par (5), qui peut être conçue comme une variante localisée de 1.1. (5). (1) Posons successivement:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\left(\tfrac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos nx\right),$$

$$e_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} s_{n+k}(x),$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e_{n+k}(x).$$

Nous définissons avec M. T. Frey les opérations A_n par la formule

$$A_n(g, x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t)\, g(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

pour chaque g de $\mathbf{C}$.

Il est bien évident que A_n est une opération linéaire qui reproduit chaque polynome trigonométrique d'ordre n et que $A_n(g, x)$ est un polynome trigonométrique d'ordre $4n-2$. La propriété: $A_n(g', x) = A_n'(g, x)$ si g admet une dérivée continue, est aussi évidente.

Il résulte d'un calcul élémentaire que

$$F_n(x) = \frac{\cos^n \frac{x}{2}}{2\pi n \sin \frac{x}{2}} \operatorname{Im}\left[\left(e^{\frac{1}{2}(3n+1)ix} - \cos^n \frac{x}{2}\, e^{(3n+\frac{1}{2})ix}\right) \Big/ \left(1 - \cos \frac{x}{2}\, e^{3ix/2}\right)\right].$$

Pour le dénominateur de l'expression entre crochet nous avons l'estimation

$$\left|1 - \cos \frac{x}{2}\, e^{3ix/2}\right| = \left|\sin \frac{x}{2}\right| \sqrt{1 + 8\cos^2 \frac{x}{2}} \geqslant \left|\sin \frac{x}{2}\right|.$$

Par conséquent

$$|F_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi n} \frac{\cos^n \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}. \tag{1}$$

---

(1) La construction des opérations A_n ainsi que l'inégalité [5] et sa démonstration sont empruntées entièrement à la thèse de M. T. Frey, voir [4], pp. 51–54. Les écarts du texte original de la thèse sont insignifiants.

Estimons maintenant l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} |F_n(x)|\,dx$. En vertu de la définition de $F_n(x)$ nous avons

$$\int_0^{\pi/(4n-1)} |F_n(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{\pi n} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2^k} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \int_0^{\pi/(4n-1)} |\tfrac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos (k+l)\,x|\,dx <$$

$$< \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{4n-1} (\tfrac{1}{2} + 4n - 2) < 1. \quad (2)$$

Par suite de (1) on a

$$\int_{\pi/(4n-1)}^{\pi} |F_n(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{\pi n} \int_{\pi/4n-1)}^{\pi} \frac{\cos^n \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}\,dx < \frac{\pi}{n} \cdot \int_{\pi/(4n-1)}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{4n-1}{n} < 4. \quad (3)$$

Il résulte de (2), (3) et de la parité de $F_n(x)$ que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_n(x)|\,dx < 10. \quad (4)$$

Démontrons maintenant qu'il existe deux constantes μ_1 et μ_2 telles que

$$|A_n(g, x)| \leqslant 10 \max_{|t| \leqslant \alpha} |g(t)| + \mu_1 \mu_2^n \|g\|, \quad \mu_2 < 1 \quad \text{si} \quad |x| \leqslant \alpha - \delta \quad \text{et} \quad g \in \mathbf{C}. \quad (5)$$

On a en vertu de (1)

$$\int_{\delta}^{\pi} |F_n(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{\pi n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\cos^n \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}\,dx < \frac{\cos^n \frac{\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}. \quad (6)$$

Soit maintenant $g \in \mathbf{C}$. Alors

$$A_n(g, x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t)\,g(t)\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} F_n(x-t)\,g(t)\,dt + \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} F_n(x-t)\,g(t)\,dt$$

d'où

$$|A_n(g, x)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |F_n(t)|\,dt \max_{|t| \leqslant \alpha} |g(t)| + \int_{x+\alpha}^{x+2\pi-\alpha} |F_n(t)|\,dt\,\|g\|. \quad (7)$$

Pour $|x| \leqslant \alpha - \delta$ on obtient à l'aide de (4), (6) et (7) que

$$|A_n(g, x)| \leqslant 10 \max_{|t| \leqslant \alpha} |g(t)| + \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |F_n(t)|\,dt\,\|g\| = 10 \max_{|t| \leqslant \alpha} |g(t)| + 2 \int_{\delta}^{\pi} |F_n(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 10 \max_{|t| \leqslant \alpha} |g(t)| + \frac{2 \cos^n \frac{\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \|g\|.$$

Nous avons donc démontré l'inégalité

$$|A_n(g,x)| \leqslant 10 \max_{|t|\leqslant\alpha} |g(t)| + \frac{2\cos^n \frac{\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \|g\| \qquad (|x| \leqslant \alpha - \delta)$$

ce qui équivaut à (5) si l'on pose $\mu_1 = 2/\sin^2 \frac{\delta}{2}$ et $\mu_2 = \cos \frac{\delta}{2}$.

2.2.2. Lemme. *A chaque* $0 < \beta < \pi$ *on peut faire correspondre une constante* γ_β *telle qu'on ait*

$$\|U_n\| \leqslant \gamma_\beta^n \max_{|x|\leqslant\beta} |U_n(x)| \tag{1}$$

pour chaque $U_n \in \mathbf{T}_n$.

Démontrons d'abord l'inégalité

$$|U_n(x)| \leqslant N \left| T_n \left(\frac{\cos x - \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} \right) \right| \qquad (U_n \in \mathbf{T}_n,\ \beta < |x| \leqslant \pi). \tag{2}$$

où $N = \max_{|x|\leqslant\beta} |U_n(x)|$ et où $T_n(x)$ désigne le n-ième polynome de Tchebycheff.

Supposons que (2) soit faux. Alors on peut trouver deux nombres q et x_0 tels que $0 \leqslant |q| < 1$, $\beta < |x_0| \leqslant \pi$ et le polynome

$$\prod(x) = N\, T_n \left(\frac{\cos x - \cos^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} \right) + q\, U_n(x)$$

s'annule pour $x = x_0$. $\prod(x)$ a encore $2n$ racines dans $(-\beta, \beta)$ puisqu'il change de signe au moins $2n$ fois dans $[-\beta, \beta]$. Comme polynome trigonométrique d'ordre n, $\prod(x)$ s'annule donc identiquement, ce qui est en contradiction avec l'inégalité

$$\prod(1) = N + q\, U_n(1) > 0.$$

Cette contradiction montre que (2) doit être valable.

Rappelons encore l'inégalité bien connue

$$|T_n(x)| \leqslant (|x| + \sqrt{x^2 - 1})^n \qquad (|x| \geqslant 1)$$

d'où

$$|T_n(x)| \leqslant 2^n |x|^n \qquad (|x| \geqslant 1). \tag{3}$$

Il s'ensuit de (2) et (3) que

$$|U_n(x)| \leqslant 2^n \left| \frac{\cos x - \cos^2 \dfrac{\beta}{2}}{\sin^2 \dfrac{\beta}{2}} \right|^n N \leqslant \left(2 + 4 \operatorname{cotg}^2 \frac{\beta}{2}\right)^n N \qquad (\beta < |x| \leqslant \pi).$$

Cette inégalité entraîne évidemment (1) avec $\gamma_\beta = 2 + 4 \operatorname{cotg}^2 \dfrac{\beta}{2}$.

2.2.3. Le lemme précédent nous permet de déduire une propriété nouvelle de l'opération A_n qui est analogue à 1.1. (6). Soit $g \in \mathbf{C}$, $U_n \in \mathbf{T}_n$ et

$$|g(x) - U_n(x)| \leqslant E_n(g;\ -\alpha, \alpha) \qquad (|x| \leqslant \alpha). \tag{1}$$

On en conclut:

$$|U_n(x)| \leqslant 2\,\|g\| \qquad (|x| \leqslant \alpha),$$

ce qui entraîne en vertu du lemme 2.2.2. que

$$\|U_n\| \leqslant 2\gamma_\alpha^n \|g\|. \tag{2}$$

$\varkappa$ étant un nombre naturel quelconque, on déduit de 2.2.1. (5) et (1) que

$$|A_{\varkappa n}(g, x) - U_n(x)| \leqslant 10\, E_n(g;\ -\alpha, \alpha) + \mu_1 \mu_2^{\varkappa n} \|g - U_n\| \qquad (|x| \leqslant \alpha - \delta).$$

En combinant cette inégalité avec (2), nous parvenons à

$$(A_{\varkappa n}(g, x) - U_n(x)| \leqslant 10\, E_n(g;\ -\alpha, \alpha) + \mu_1 \mu_2^{\varkappa n} (1 + 2\gamma_\alpha^n)\, \|g\| \qquad (|x| \leqslant \alpha - \delta). \tag{3}$$

Choisissons un nombre naturel μ_3 si grand que l'on ait

$$(1 + \mu_1)\, \mu_2^{\mu_3} (1 + 2\gamma_\alpha) \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Pour $\varkappa \geqslant \mu_3$ on a en vertu de (3)

$$|A_{\varkappa n}(g, x) - U_n(x)| \leqslant 10\, E_n(g;\ -\alpha, \alpha) + \frac{1}{2^n} \|g\| \qquad (|x| \leqslant \alpha - \delta,\ \varkappa \geqslant \mu_3). \tag{4}$$

Enfin (1) et (4) entraînent l'importante inégalité

$$|g(x) - A_{\varkappa n}(g, x)| \leqslant 11\, E_n(g;\ -\alpha, \alpha) + \frac{1}{2^n} \|g\| \qquad (|x| \leqslant \alpha - \delta,\ \varkappa \geqslant \mu_3) \tag{5}$$

qui nous rappelle 1.1. (6).

2.3. Nous pouvons procéder maintenant directement à la démonstration du théorème.

2 (1) entraîne

$$|P_n(x)| \leqslant M + \varepsilon \qquad (|x| \leqslant \alpha)$$

d'où il s'ensuit en vertu du lemme que

$$\|P_n\| \leqslant \gamma_\alpha^n (M + \varepsilon).$$

On déduit de là et de 2.1. (1) que

$$\| F - P_n \| \leqslant \gamma_\alpha^n [(\lambda_1 + 1) M + \varepsilon]. \tag{1}$$

Rappelons que selon 2 (1)

$$| F(x) - P_n(x) | \leqslant \varepsilon \qquad (|x| \leqslant \alpha). \tag{2}$$

Appliquons maintenant 2.2.1. (5) á $F(x) - P_n(x)$ avec $\frac{\delta}{2}$ au lieu de δ et avec $\varkappa n$ au lieu de n; désignons par μ_1' et μ_2' les constantes qui tiennent lieu de μ_1 et μ_2 pour $\frac{\delta}{2}$. En tenant compte de (1) et (2) nous obtenons

$$| A_{\varkappa n}(F, x) - P_n(x) | \leqslant 10\,\varepsilon + \mu_1' \mu_2'^{\varkappa n} \gamma_\alpha^n [(\lambda_1 + 1) M + \varepsilon] \qquad \left(|x| \leqslant \alpha - \frac{\delta}{2},\ \mu_2' < 1 \right) \tag{3}$$

pour chaque nombre naturel $\varkappa$. Choisissons maintenant un nombre naturel μ_4 si grand que l'on ait

$$(1 + \lambda_1)(1 + \mu_1') \mu_2'^{\mu_4} \gamma_\alpha \leqslant \tfrac{1}{3}.$$

En vertu de (3) on obtient

$$| A_{\varkappa n}(F, x) - P_n(x) | \leqslant 11\,\varepsilon + 3^{-n} M \qquad \left(|x| \leqslant \alpha - \frac{\delta}{2},\ \varkappa \geqslant \mu_4 \right). \tag{4}$$

Posons
$$\mu_5 = \max(\mu_3, \mu_4).$$

Rappelons maintenant une inégalité due à Privaloff et Jackson ([7] et [6], p. 145), en vertu de laquelle à chaque paire d'intervalles i et i' tels que la longeur de i est inférieure à 2π et les extrémités de i' sont situées à l'intérieur de i, correspond une constante $c(i, i')$ avec la propriété suivante:

$$\text{Si} \quad U_n \in \mathbf{T}_n, \qquad \text{alors}$$
$$| U_n'(x) | \leqslant c(i, i')\, n \max_{t \in i} | U(t) | \qquad (x \in i').$$

On déduit facilement de cette inégalité l'existence d'une constante $c(i, i', \varrho)$ où ϱ est un nombre naturel qui vérifie l'inégalité

$$| U_n^{(\varrho)}(x) | \leqslant c(i, i', \varrho)\, n^\varrho \max_{t \in i} | U(t) | \qquad (x \in i')$$

pour chaque $U_n \in \mathbf{T}_n$.

Appliquons cette inégalité avec $\varrho = k$, $i = \left[-\alpha + \frac{\delta}{2},\ \alpha - \frac{\delta}{2} \right]$, $i' = [-\alpha + \delta,\ \alpha - \delta]$ au polynome trigonométrique $A_{\mu_5 n}(F, x) - P_n(x)$ qui est d'ordre $4\mu_5 n - 2$. En tenant compte de (4) et en posant $\lambda_2 = c(i, i', k)$ nous trouvons que

$$| A_{\mu_5 n}^{(k)}(F, x) - P_n^{(k)}(x) | \leqslant \lambda_2 (4 \mu_5 n)^k (11\,\varepsilon + 3^{-n} M) \qquad (|x| \leqslant \alpha - \delta).$$

Il en résulte l'existence d'un λ_3 tel que

$$|A_{\mu_5 n}^{(k)}(F, x) - P_n^{(k)}(x)| \leqslant \lambda_3 (\varepsilon + 3^{-n} M) n^k \qquad (|x| \leqslant \alpha - \delta). \tag{5}$$

Appliquons 2.2.3. (5) à $F^{(k)}(x)$ avec $\varkappa = \mu_5$:

$$|F^{(k)}(x) - A_{\mu_5 n}(F^{(k)}, x)| \leqslant 11\, E_n(F^{(k)};\ -\alpha, \alpha) + 2^{-n} M \qquad (|x| \leqslant \alpha - \delta) \tag{6}$$

où nous nous sommes servis également de 2.1 (1). En combinant (5) et (6) et en tenant compte des relations

$$A_{\mu_5 n}^{(k)}(F, x) = A_{\mu_5 n}(F^{(k)}, x), \quad 2^{-n} + 3^{-n} \lambda_3 n^k \leqslant 2^{-n} \lambda_4 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(valables avec un λ_4 convenablement choisi) et

$$F(x) = f(x) \qquad (|x|) \leqslant \alpha),$$

on aboutit à

$$|f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)| \leqslant \lambda_3 \varepsilon n^k + 11\, E_n(f^{(k)};\ -\alpha, \alpha) + \lambda_4 2^{-n} M \qquad (|x| \leqslant \alpha - \delta)$$

ce qui entraîne 2 (2), si l'on pose $\Lambda = \max(\lambda_3, 11, \lambda_4)$. Le théorème est donc entièrement démontré.

§. 3.

Revenons, pour un moment, au théorème 2° du §. 1. Comme nous l'avons déjà dit, nous avons l'intention d'abaisser, autant que possible, la constante 2^k qui figure dans 1.2. (5) et 1.2. (6). Or ce 2^k est l'héritage du théorème 1° (§.1) et là, on se le rappelle, son apparition est due tout simplement au fait que $V_n(f)$ est d'ordre $2n-1$. Il est donc raisonnable d'essayer de construire pour chaque n une opération qui tout en jouissant des propriétés fondamentales de V_n, ait l'avantage sur celle-ci d'ordonner à chaque fonction de $\mathbf{C}$ un polynome trigonométrique d'ordre « essentiellement » plus petit que $2n-1$. C'est dans ce but que nous introduisons les moyennes

$$V_{q,n}(g, x) = \frac{1}{[nq] - n} \sum_{\nu=n}^{[nq]-1} s_\nu(g, x) \qquad (g \in \mathbf{C}),$$

où q est un nombre quelconque situé dans l'intervalle $\left[1 + \frac{1}{n}, 2\right]$. Nous verrons que $V_{q,n}$ jouit de toutes les propriétés importantes de V_n.

Pour $q = 2$ l'on a

$$V_{2,n}(g, x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=n}^{2n-1} s_\nu(g, x) = V_n(g, x). \tag{1}$$

$V_{q,n}$ est donc une généralisation de la moyenne de M. Ch. de La Vallée Poussin. Dans son traité [11], M. de La Vallée Poussin considère, lui aussi, des moyennes de ce type, mais il donne des valeurs entières positives à q. Pour $q=1+\frac{1}{n}$ nous retrouvons la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de g:

$$V_{1+\frac{1}{n}, n}(g, x) = s_n(g, x). \tag{2}$$

Tout d'abord on voit que $V_{q,n}$ est une opération linéaire qui ordonne un polynome trigonométrique d'ordre $[nq]-1$ à chaque fonction de $\mathbf{C}$. Les formules

$$V_{q,n}(g', x) = \frac{d}{dx} V_{q,n}(g, x) \qquad (g \in \mathbf{C},\ g' \in \mathbf{C}),$$

$$V_{q,n}(\tilde{g}, x) = \tilde{V}_{q,n}(g, x) \qquad (g \in \mathbf{C},\ \tilde{g} \in \mathbf{C}),$$

$$V_{q,n}(U_n, x) = U_n(x) \qquad (U_n \in \mathbf{T})$$

sont aussi évidentes.

On trouve par un calcul simple que

$$V_{q,n}(g, x) = \frac{1}{2\pi[nq-n]} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) \frac{\sin [nq+n]\frac{t}{2} \sin [nq-n]\frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt.$$

$$I_{q,n}(x) = \frac{1}{2\pi[nq-n]} \frac{\sin [nq+n]\frac{x}{2} \sin [nq-n]\frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

est donc le « noyau » de l'opération $V_{q,n}$ et $V_{q,n}(g)$ peut s'écrire sous la forme

$$V_{q,n}(g, x) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) I_{q,n}(t)\, dt. \tag{3}$$

Théorème 1°. *Il existe une constante universelle positive C telle que:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |I_{q,n}(x)|\, dx < C \log\left(\frac{1}{q-1}+1\right)^{(1)} \qquad \left(1+\frac{1}{n} \leqslant q \leqslant 2\right). \tag{1}$$

On a successivement

$$\int_{-\pi}^{\pi} |I_{q,n}(x)\, dx = 4 \int_{0}^{\pi/2} |I_{q,n}(2x)|\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi[nq-n]} \left\{ \int_0^{\pi/2n} + \int_{\pi/2n}^{\pi/2[nq-n]} + \int_{\pi/2[nq-n]}^{\pi/2} \frac{|\sin [nq+n]x \sin [nq-n]x|}{\sin^2 x} dx \right\} = I_1 + I_2 + I_3. \tag{2}$$

---

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} |I_{q,n}(x)|\, dx$ est la norme de l'opération $V_{q,n}$ si elle est conçue comme une transformation de $\mathbf{C}$ ou de $\mathbf{L}^1$ en lui-même.

Rappelons que l'hypothèse $1+\frac{1}{n}\leqslant q\leqslant 2$ entraîne

$$1\leqslant n(q-1)\leqslant n \qquad \text{et} \qquad 1\leqslant [nq-n]\leqslant n \tag{3}$$

et ainsi les nombres 0, $\pi/2n$, $\pi/2[nq-n]$, $\pi/2$ forment une suite non-décroissante.

Dans ce qui suit nous nous servirons des inégalités suivantes:

$$(\alpha)\ \sin x\geqslant \frac{2}{\pi}x \quad \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right), \qquad (\beta)\ |\sin x|\leqslant 1,$$

$$(\gamma)\ |\sin\mu x|\leqslant\mu|\sin x| \qquad (\mu=1,2,\ldots).$$

En tenant compte de (3) et (γ) on a pour I_1

$$I_1\leqslant\frac{2}{\pi[nq-n]}[nq+n]\,[nq-n]\frac{\pi}{2n}\leqslant 3 \tag{4}$$

et en tenant compte de (α) et (β), on a pour I_3

$$I_3\leqslant\frac{2}{\pi[nq-n]}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\int_{\pi/2[nq-n]}^{\infty}\frac{dx}{x^2}=1. \tag{5}$$

En tenant compte de (3), (α), (β) et (γ), on a pour I_2:

$$I_2\leqslant\frac{2}{\pi[nq-n]}\frac{\pi}{2}[nq-n]\int_{\pi/2n}^{\pi/2[nq-n]}\frac{dx}{x}=\log\frac{n}{[nq-n]}<$$

$$<\log\left\{\frac{[nq]-n+1}{[nq]-n}\cdot\frac{n}{nq-n}\right\}\leqslant\log 2+\log\frac{1}{q-1}\cdot \tag{6}$$

D'après (3), (4), (5) et (6)

$$I_1+I_2+I_3<4+\log 2+\log\frac{1}{q-1}<9\log 2+\log\left(\frac{1}{q-1}+1\right)\leqslant 10\log\left(\frac{1}{q-1}+1\right)\cdot$$

En vertu de (2), l'inégalité (1) est donc démontrée avec $C=10$.

Une conséquence directe de (6) et de (1) est fournie par l'inégalité suivante

$$\|V_{q,n}(g)\|\leqslant C\log\left(\frac{1}{q-1}+1\right)\|g\| \qquad (g\in \mathrm{C}) \tag{7}$$

qui peut être conçue comme une généralisation de 1.1. (5). On en déduit avec une méthode bien connue l'inégalité

$$\|g-V_{q,n}(g)\|\leqslant\left\{C\log\left(\frac{1}{q-1}+1\right)+1\right\}E_n(g)$$

d'où il s'ensuit en vertu de l'inégalité $\log\left(\frac{1}{q-1}+1\right) \geqslant \log 2 > \frac{1}{2}$

$$\|g - V_{q,n}(g)\| \leqslant (C+2) \log\left(\frac{1}{q-1}+1\right) E_n(g) \qquad (g \in \mathbf{C}) \tag{8}$$

qui, pour sa part, est l'analogue de 1.1. (6).

§. 4.

4.1. Le théorème suivant est une précision du théorème 2° du §. 1.

THÉORÈME 1°. *Soit* $f \in \mathbf{C}$, $P_n \in \mathbf{T}_n$ *et*

$$\|f - P_n\| \leqslant \delta E_n(f).$$

On a alors

$$\|f^{(k)} - P_n^{(k)}\| \leqslant \Theta\, \delta \log [\min(k, n) + 1]\, E_n(f^{(k)}),$$

pourvu que $f^{(k)}$ *existe et soit continue et*

$$\|\tilde{f}^{(k)} - \tilde{P}_n^{(k)}\| \leqslant \Theta\, \delta \log [\min(k, n) + 1]\, E_n(\tilde{f}^{(k)}),$$

pourvu que $\tilde{f}^{(k)}$ *existe et soit continue; ici* Θ *désigne une constante universelle.*

Pour les grandes valeurs de k ces estimations des quantités $\|f^{(k)} - P_n^{(k)}\|$ et $\|\tilde{f}^{(k)} - \tilde{P}_n^{(k)}\|$ sont en effet plus précises que celles fournies par le théorème 2°, §. 1.

Le théorème 1° peut être déduit du théorème 2° ci-dessous tout comme nous avons déduit le théorème 2° du théorème 1° au §. 1. Nous nous contentons donc de la démonstration du théorème suivant:

THÉORÈME 2°. *Soit* $f \in \mathbf{C}$, $P_n \in \mathbf{T}_n$ *et*

$$\|f - P_n\| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

On a alors

$$\|f^{(k)} - P_n^{(k)}\| \leqslant \Theta_1 \log [\min(k, n) + 1]\, [n^k \varepsilon + E_n(f^{(k)})]$$

et

$$\|\tilde{f}^{(k)} - \tilde{P}_n^{(k)}\| \leqslant \Theta_1 \log [\min(k, n) + 1]\, [n^k \varepsilon + E_n(\tilde{f}^{(k)})],$$

pourvu que $f^{(k)}(x)$, *resp.* $\tilde{f}^{(k)}(x)$ *existe et soit continue;* Θ_1 *désigne une constante universelle.*

Par raison d'analogie il suffit de démontrer la première inégalité de la thèse du théorème.

Posons
$$q = 1 + [\min(k, n)]^{-1}.$$

On a en vertu de 3. (11) et (1)

$$\|V_{q,n}(f) - P_n\| \leqslant C\, \varepsilon \log [\min(k, n) + 1].$$

Appliquons $\mathcal{B}_\infty$ au polynome trigonométrique $V_{q,n}(f)-P_n$ qui est d'ordre $[nq]-1$:

$$\| V_{q,n}^{(k)}(f) - P_n^{(k)} \| \leqslant C\,\varepsilon\,[n q - 1]^k \log\,[\min\,(k, n) + 1].$$

Vu que
$$[n q - 1]^k = n^k \quad \text{pour } k \geqslant n$$

et
$$[n q - 1]^k < n^k \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < 3\,n^k \quad \text{pour } k < n,$$

nous parvenons à l'inégalité

$$\| V_{q,n}^{(k)}(f) - P_n^{(k)} \| < 3\,C\,\varepsilon\, n^k \log\,[\min\,(k, n) + 1]. \tag{2}$$

Appliquons 3.1. (12) à $f^{(k)}(x)$:

$$\| f^{(k)} - V_{q,n}(f^{(k)}) \| \leqslant (C+2) \log\,[\min\,(k, n) + 1]\, E_n(f^{(k)}). \tag{3}$$

(2) et (3) entraînent

$$\| f^{(k)} - P_n^{(k)} \| \leqslant (3\,C+2) \log\,[\min\,(k, n) + 1]\; [\varepsilon\, n^k + E_n(f^{(k)})].$$

Le théorème est donc démontré avec $\Theta_1 = 3\,C + 2$.

Revenons au théorème 1°. Introduisons la quantité

$$\mathcal{E}_n(f) = E_n(f) / \| f \|$$

pour chaque $f \in \mathbf{C}$ qui n'est pas identique à 0. On pourrait appeler $\mathcal{E}_n(f)$ la meilleure approximation trigonométrique spécifique d'ordre n de f. En se servant de cette notation et en intervertissant f et $\tilde{f}$, on constate sans peine que le théorème 1° équivaut au théorème suivant:

Théorème 3°. *Pour chaque f de* **C** *qui admet une k-ième dérivée continue et qui n'est pas constante, on a*

$$\mathcal{E}_n(f) \leqslant \Theta \log\,[\min\,(k, n) + 1]\, \mathcal{E}_n(f^{(k)})$$

et
$$\mathcal{E}_n(\tilde{f}) \leqslant \Theta \log\,[\min\,(k, n) + 1]\, \mathcal{E}_n(f^{(k)}).$$

Ces inégalités ressemblent aux inégalités 1.2. (1) et 1.2. (2).

4.2. Les théorèmes des §§. 1., 3. et 4.1 avec leurs démonstrations sont valables aussi dans l'espace $\mathbf{L}^p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Cela veut dire précisément qu'il est permis de remplacer partout aux §§. 1., 3. et 4.1. simultánément

$$\mathbf{C} \;\text{ par }\; \mathbf{L}^p,\; \| \ldots \| \;\text{ par }\; \| \ldots \|_p,\; E_n \;\text{ par }\; E_n^{(p)},\; \mathcal{E}_n$$

par $\mathcal{E}_n^{(p)}$ défini pour chaque $g \in \mathbf{L}^p$ qui ne s'annule pas presque partout par la formule

$$\mathcal{E}_n^{(p)} = E_n^{(p)}(g) / \| g \|_p,$$

et enfin l'énoncé: « admet une k-ième dérivée continue » par l'énoncé: « est la k-ième intégrale indéfinie d'une fonction de $\mathbf{L}^p$ ».

La légitimité de cette transcription ne demande aucune explication particulière. Il suffit de tenir compte de l'inégalité de Minkowski

$$\|g_1+g_2\|_p \leqslant \|g_1\|_p + \|g_2\|_p \qquad (g_1,\ g_2 \in \mathbf{L}^p),$$

des inégalités $\mathcal{B}_p$ et $\tilde{\mathcal{B}}_p$ et de l'inégalité

$$\Big\|\int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)\,h(t)\,dt\Big\|_p \leqslant \|g\|_1\,\|h\|_p \qquad (g\in\mathbf{L}^1,\ h\in\mathbf{L}^p).$$

Cette dernière inégalité intervient dans la vérification des inégalités qui correspondent dans $\mathbf{L}^p$ à 1.1. (5), 1.1. (6), 1.1. (13), 1.2. (3), 1.2. (4) et 3. (11). Elle est une conséquence directe de l'inégalité de Minkowski dans la forme intégrale (voir [5], inégalité 202, p. 148).

Nous nous contentons d'énoncer le théorème qui résulte de 1° à l'aide de cette transcription pour $p=1$:

Théorème 4°. *Soit* $f\in\mathbf{L}^1$, $P_n\in\mathbf{T}_n$ *et*

$$\|f-P_n\|_1 \leqslant \delta\, E_n^{(1)}(f).$$

On a alors

$$\|f^{(k)}-P_n^{(k)}\|_1 \leqslant \Theta\,\delta\,\log\,[\min\,(k,n)+1]\,E_n^{(1)}(f^{(k)}),$$

pourvu que $f^{(k-1)}$ *soit absolument continue et*

$$\|\tilde{f}^{(k)}-\tilde{P}_n^{(k)}\|_1 \leqslant \Theta\,\delta\,\log\,[\min\,(k,n)+1]\,E_n^{(1)}(\tilde{f}^{(k)}),$$

pourvu que $\tilde{f}^{(k-1)}$ *soit absolument continue.*

Pour $1<p<\infty$ on a le théorème suivant qui fournit une estimation beaucoup plus précise pour les quantités $\|f^{(k)}-P_n^{(k)}\|_p$ et $\|\tilde{f}^{(k)}-\tilde{P}_n^{(k)}\|_p$ que n'en donnerait une simple transcription pour $\mathbf{L}^p$ des théorèmes du §. 1. ou de 4.1.:

Théorème 5°. *Soit* $1<p<\infty$, $f\in\mathbf{L}^p$, $P_n\in\mathbf{T}_n$ *et soit*

$$\|f-P_n\|_p \leqslant \delta\, E_n^{(p)}(f).$$

Alors

$$\|\tilde{f}-\tilde{P}_n\|_p \leqslant B_p\,\delta\, E_n^{(p)}(\tilde{f}).$$

En supposant encore que f soit la k-ième intégrale indéfinie d'une fonction de $\mathbf{L}^p$, *on a aussi*

$$\|f^{(k)}-P_n^{(k)}\|_p \leqslant B_p\,\delta\, E_n^{(p)}(f^{(k)})$$

et

$$\|\tilde{f}^{(k)}-\tilde{P}_n^{(k)}\|_p \leqslant B_p\,\delta\, E_n^{(p)}(\tilde{f}^{(k)})$$

où B_p ***est une constante qui ne dépend que de p.***

La démonstration de ce théorème est tout à fait analogue à celle du théorème 1° et 2° du §. 1.; on n'a qu'à tenir compte des modifications suivantes:

Partout on remplace V_n par s_n.

Au lieu des inégalités 1.1. (5), 1.1. (6) et 1.1. (13) on se sert du théorème suivant dû à M. Riesz (voir [8]):

Si $g \in \mathbf{L}^p$, alors $\tilde{g} \in \mathbf{L}^p$ et les inégalités suivantes ont lieu:

$$\|s_n(g)\|_p \leqslant A_p \|g\|_p$$
$$\|g - s_n(g)\|_p \leqslant A'_p \|g\|_p$$
$$\|\tilde{g}\|_p \leqslant A''_p \|g\|_p$$

où les constantes A_p, A'_p, A''_p ne dépendent que de p.

Renvois

[1]. N. I. ACHIESER, *Vorlesungen über Approximationstheorie*, 1953 (traduction du russe).

[2]. S. BERNSTEIN, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues (n° 2), *Mémoires Acad. Belgique*, t. IV. (1912).

[3]. J. FAVARD, Sur les meilleurs procédés d'approximation, *Bull. Sci. Math.* 61 (1937), 209–224 et 243–256.

[4]. FREY TAMÁS, A konstruktiv függvénytan néhány lokális tételéről. *Kandidátusi értekezés*, Budapest, 1956.

[5]. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. PÓLYA, *Inequalities*, 2e éd., Cambridge, 1952.

[6]. DUNHAM JACKSON, A generalized problem in weighted approximation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 26 (1924), 133–154.

[7]. J. PRIVALOFF, Intégrale de Cauchy (en russe) Saratoff, *Izv. ouniv. phys.-math. fac.* 11: 1 (1918).

[8]. MARCEL RIESZ, Sur les fonctions conjuguées, *Math. Z.*, 27 (1928), 218–244.

[9]. S. B. STETCHKINE, Sur la meilleure approximation des fonctions conjuguées par des polynomes trigonométriques (en russe), *Izv. Acad. Naouk SSSR*, 20 (1956), 197–206.

[10]. G. SZEGÖ, Über einen Satz des Herrn S. Bernstein, *Schriften d. Königsberger Gel. Ges.*, 1928.

[11]. CH. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, Paris, 1919.

[12]. ANTONI ZYGMUND, *Trigonometric Interpolation*, Chicago, 1950.