UNE GÉNÉRALISATION DES DÉVELOPPEMENTS DE TAYLOR.

Par

ANDRÉ ROUSSEL,

à Strasbourg.

CHAPITRE I.

Le développement classique de Taylor est un cas particulier de développements plus généraux dont l'obtention peut être rattachée d'une maniere naturelle aux idées générales que nous avons exposées ailleurs, relatives à la définition d'une fonction par son accroissement infinitésimal.

Nous allons donner dans ce travail, formant un tout et pouvant être lu sans connaître les recherches auxquelles nous venons de faire allusion, l'énoncé et la démonstration d'un théorème beaucoup plus général que celui de Taylor relatif à la possibilité de développer l'accroissement d'une fonction holomorphe suivant les puissances entières de l'accroissement h de la variable.

Soit $g(x, h)$ une fonction des deux variables complexes x et h holomorphe dans le domaine D formé par les cercles C et C' tracés respectivement, pour C dans le plan complexe (x) avec a pour centre et R pour rayon, et pour C' dans le plan complexe (h) avec l'origine pour centre et R' pour rayon. Par définition a est l'affixe d'un point fixe donné dans le premier plan complexe. Nous supposerons en outre que l'on a:

$$g(x, 0) = 0.$$

Nous admettrons enfin pour simplifier que la fonction $g(x, h)$ est holomorphe sur les cercles C et C' eux mêmes, frontière du domaine D.

Posons:

$$g_1(x, h) = \int_0^h \frac{\partial g}{\partial x} d h$$

$$g_2(x, h) = \int_0^h \frac{\partial g}{\partial x}\, dh$$

....

$$g_n(x, h) = \int_0^h \frac{\partial g_{n-1}}{\partial x}\, dh$$

les intégrations indiquées ci-dessus ayant lieu par rapport à h, x étant traité comme une constante dans chaque intégration.

Posons de même:

$$g_{-1}(x, h) = \int_a^x \frac{\partial g}{\partial h}\, dx - \int_a^x \left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)_{h=0} dx$$

$$g_{-2}(x, h) = \int_a^x \frac{\partial g_{-1}}{\partial h}\, dx - \int_a^x \left(\frac{\partial g_{-1}}{\partial h}\right)_{h=0} dx$$

....

$$g_{-m}(x, h) = \int_a^x \frac{\partial g_{-m+1}}{\partial h}\, dx - \int_a^x \left(\frac{\partial g_{-m+1}}{\partial h}\right)_{h=0} dx$$

les intégrations indiquées ayant lieu par rapport à x, h étant traité comme une constante dans chaque intégration. Un symbole tel que:

$$\left(\frac{\partial g_{-m}}{\partial h}\right)_{h=0}$$

représente la valeur prise par la dérivée par rapport à h de g_{-m}, quand, une fois cette dérivation effectuée, on y fait h égal à zéro. Nous obtenons une première suite de termes à indice positif:

$$g(x, h),\ g_1(x, h) \cdots g_m(x, h) \cdots$$

Dans cette suite, chaque terme se déduit du précédant en dérivant celui-ci par rapport à x, puis en intégrant le résultat obtenu par rapport à h dans l'intervalle $(0, h)$. Nous obtenons de même une seconde suite de termes à indices négatifs que nous écrirons ainsi:

$$g(x, h),\ g_{-1}(x, h) \cdots g_{-m}(x, h) \cdots$$

Chacun de ces termes se déduit alors du précédent en dérivant celui-ci par rapport à h, puis en intégrant le résultat obtenu par rapport à x, dans l'intervalle (a, x), et enfin en retranchant de la fonction ainsi définie sa valeur pour h nul.

Nous pouvons déjà faire observer que l'holomorphie de $g(x, h)$ permet d'affirmer que toutes les opérations définies ci-dessus ont un sens.

Voici alors l'énoncé du théorème que nous avons en vue:

Le développement, illimité dans les deux sens :

$$\sum_{m=1}^{\infty} g_{-m}(x, h) + g(x, h) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x, h) \tag{1}$$

converge absolument pour les valeurs de x et de h qui satisfont à la double inégalite :

$$|x-a| + |h| < R; \ |x-a| + |h| < R'. \tag{2}$$

Il a pour somme :

$$f(x+h) - f(x)$$

en posant :

$$f(x) = g(a, x-a) + \int_0^{x-a} g'_x(x-t, t)\, dt. \tag{3}$$

On voit immédiatement en quel sens l'énoncé précédent généralise celui de Taylor. Soit $\varphi(x)$ une fonction holomorphe dans un cercle de centre a et de rayon R. Pour les valeurs de x et de h qui satisfont à la condition:

$$|x-a| + |h| < R \tag{4}$$

et en prenant ici:

$$g(x, h) = h \cdot \varphi'(x)$$

le développement (1) est convergent et se réduit au développement de Taylor relatif à la fonction $\varphi(x)$. Il est à remarquer que tous les termes de rang négatif sont nuls. La seconde partie de théorème, de son côté, donne immédiatement par application de la formule (3):

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = f(x+h) - f(x)$$

et l'on retrouve bien le résultat classique:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h \cdot \varphi'(x) + \cdots \frac{h^n}{n!} \varphi^{(n)}(x) + \cdots$$

pour les valeurs de x et de h satisfaisant à la condition (4). Venons maintenant à la démonstration de notre théorème.

Nous allons pour cela former les expressions respectives des termes généraux de (1). Occupons nous d'abord de $g_n(x, h)$. On a:

$$g_n(x, h) = \int_0^h d h \int_0^h \cdots \int_0^h \frac{\partial^n g}{\partial x^n} d h \tag{5}$$

comme on voit immédiatement par n applications successives de la formule de dérivation sous le signe intégral, applicable ici en vertu de l'holomorphie de la fonction $g(x, h)$. D'autre part, rappelons que n intégrations successives de a à x d'une fonction continue $F(x)$ peuvent se ramener à une seule intégration d'après la formule:

$$\int_a^x d x \int_a^x \cdots \int_a^x F(x) d x = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} F(t) d t \tag{6}$$

le premier membre comportant n intégrations. En appliquant ce résultat bien connu au second membre de la relation (5), on trouve avec un changement de notation évident:

$$g_n(x, h) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h g_{x^n}^{(n)}(x, v) \cdot (h-v)^{n-1} d v. \tag{7}$$

Appliquons le même raisonnement à la formation du terme $g_{-m}(x, h)$. On a:

$$g_{-m}(x, h) = \int_a^x d x \cdots \int_a^x \frac{\partial^n g}{\partial h^n} d x - \int_a^x d x \cdots \int_a^x \left(\frac{\partial^n g}{\partial h_n}\right)_{h=0} d x$$

ou, en utilisant encore la formule (6):

$$g_{-m}(x, h) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x g_{h^m}^{(m)}(u, h) \cdot (x-u)^{m-1} d u - \tag{8}$$

$$- \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x g_{h^m}^{(m)}(u, 0) \cdot (x-u)^{m-1} d u .$$

Les intégrations figurant dans les seconds membres des relations (7) et (8) sont supposées faites, entre les limites indiquées, le long de chemins quelconques, mais ne sortant pas bien entendu des cercles C et C'.

Ceci posé nous allons faire intervenir plus explicitement l'hypothèse de l'holomorphie de la fonction $g(x, h)$. On a par les théorèmes généraux de la théorie des fonctions analytiques:

$$g(x, h) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_C dz \int\limits_{C'} \frac{g(z, z')}{(z-x)\cdot(z'-h)}\, dz'$$

et:

(9)
$$g^{(n)}_{x^n}(x, h) = -\frac{n!}{4\pi^2}\int\limits_C dz \int\limits_{C'} \frac{g(z, z')}{(z-x)^{n+1}\cdot(z'-h)}\, dz'$$

(10)
$$g^{(m)}_{h^m}(x, h) = -\frac{m!}{4\pi^2}\int\limits_C dz \int\limits_{C'} \frac{g(z, z')}{(z-x)\cdot(z'-h)^{m+1}}\, dz'$$

Dans ces formules z désigne l'affixe d'un point courant de C, et z' celle d'un point courant de C', chacun de ces cercles étant supposé décrit dans le sens direct.

Le rapprochement des formules (7) et (9) donne alors:

(11)
$$g_n(x, h) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^h dv \int\limits_C dz \int\limits_{C'} \frac{n(h-v)^{n-1}\cdot g(z, z')}{(z-x)^{n+1}\cdot(z'-v)}\, dz'.$$

Le rapprochement des formules (8) et (10) donne de même:

(12)
$$g_{-m}(x, h) = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_a^x du \int\limits_C dz \int\limits_{C'} \frac{m(x-u)^{m-1}\cdot g(z, z')}{(z'-h)^{m+1}\cdot(z-u)}\cdot dz' + {}$$
$$+ \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_a^x du \int\limits_C dz \int\limits_{C'} \frac{m(x-u)^{m-1}\cdot g(z, z')}{z'^{m+1}\cdot(z-u)}\, dz'.$$

Nous sommes maintenant en état de procéder à la sommation de notre série (1).

Commençons par les termes d'indices positifs, c'est à dire par la considération de la série:

$$\sum_1^{+\infty} g_n(x, h).$$

Désignons par U_n le terme qui figure sous le triple signe d'intégration dans le second membre de (11), soit:

(13)
$$U_n = n\cdot\frac{(h-v)^{n-1}}{(z-x)^{n-1}}\cdot\frac{1}{(z-x)^2}\cdot\frac{g(z, z')}{z'-v} \qquad (n \geq 1).$$

Supposons que x et h satisfont aux deux inégalités:

(14)
$$|x-a| + |h| \leq R_1 < R$$

(15)
$$|h| < R'.$$

Formons alors le rapport:

(16)
$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{h-v}{z-x}.$$

Comme on peut supposer que l'intégration qui figure dans (11) *par rapport à v a lieu le long du segment de droite joignant, dans le plan des* (h) *l'origine au point d'affixe h,* il s'ensuit que l'on peut admettre que:

(17)
$$|h - v| \leq |h|.$$

On a d'autre part:

(18)
$$|z - x| \geq R_1 - |x - a| > R - |x - a|.$$

Compte tenu de (16), (17), et (18) il vient donc:

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| < \frac{n+1}{n} \cdot \frac{R_1 - |x - a|}{R - |x - a|}$$

ou encore:

(19)
$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| < \frac{n+1}{n} \cdot \left[1 - \frac{R - R_1}{R - |x - a|}\right].$$

Le crochet figurant au second membre de (19) étant un nombre *positif fixe, indépendant de n* et inférieur à 1. Quand on fait tendre n vers l'infini, le second membre de (19) tend vers le crochet, et par suite à partir d'un certain rang reste inférieur à un nombre positif fixe, inférieur à l'unité. Par conséquent les termes successifs de la serie U_n définie par l'égalité (13) ou x et h sont fixes, reste, en module, inférieurs aux termes de même rang d'une série numérique convergente, car d'après nos hypothèses — holomorphie de $g(z, z')$ sur C et C' et inégalité (15) — il existe un constante M telle que:

$$\left|\frac{g(z, z')}{(z' - v)}\right| < M.$$

Donc la série (13) est uniformement convergente. La nouvelle série obtenue en integrant (13) est donc elle même convergente. C'est la série $\sum\limits_1^n g_n(x, h)$ et la somme de cette série est l'intégrale de la somme U de la série (13).

Calculons donc U. Nous avons pour cela à effectuer une sommation de la forme:

(20)
$$S = 1 + 2\alpha + \cdots (n+1)\alpha^n + \cdots$$

avec:

$$\alpha = \frac{h - v}{z - x}.$$

Or la série (20) est une série élémentaire dont la somme s'obtient facilement, — en remarquant par example que:

$$\int_0^a S\,d\,a = a + a^2 + \cdots a^n + \cdots = \frac{a}{1-a}$$

d'où:

$$S = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

Donc la somme de (13) est:

$$\frac{1}{\left(1 - \dfrac{h-v}{z-x}\right)^2} \cdot \frac{1}{(z-x)} \cdot \frac{g(z, z')}{z' - v}$$

et par conséquent:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x, h) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^h d\,v \int_C d\,z \int_{C'} \frac{g(z, z') \cdot d\,z'}{[z - (x + h - v)]^2 \cdot (z' - v)}. \tag{21}$$

Comme:

$$g'_x(\xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_C d\,z \int_{C'} \frac{g(z, z') \cdot d\,z'}{(z-\xi)^2 \cdot (z' - \eta)}$$

$$|\xi| < R, \ |\eta| < R'.$$

On peut donc encore écrire (21) sous la forme:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x, h) = \int_0^h g'_x[(x + h - v), v] \cdot d\,v. \tag{22}$$

Remarque: Il découle du raisonnement utilisé pour démontrer la convergence de

$$\sum_1^{+\infty} g_n(x, h)$$

que cette série est elle-même uniformément et absolument convergente par rapport à x et h considérés comme variables, pourvu que soient vérifiées simultanément deux inégalites du type suivant:

$$\begin{aligned} &|x - a| + |h| \leq R_1 < R \\ &|h| \leq R'_1 < R'. \end{aligned} \tag{23}$$

Dans ces conditions, en effet, le terme général de notre série restera inférieur en module au terme général d'une série *numérique* convergente.

Un raisonnement analogue au précédent s'applique à la série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} g_{-m}(x, h) \tag{24}$$

des termes à indices négatifs.

Chaque terme de celle-ci se decomposant en la somme de deux intégrales, nous étudierons les deux séries qui ont respectivement celles-ci pour termes généraux.

La quantité sous le triple signe d'intégration dans la première série est:

$$V_m = m \cdot \left(\frac{x-u}{z'-h}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{(z'-h)^2} \cdot \frac{g(z, z')}{z-u} \tag{25}$$

d'où:

$$\frac{V_{m+1}}{V_m} = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{x-u}{z'-h}. \tag{26}$$

On peut supposer que l'intégration par rapport à u figurant dans l'expression de $g_{-m}(x, h)$ a lieu le long du segment de droite joignant le point d'affixe a au point d'affixe x. Actuellement x et h sont considérés comme constantes. On a alors:

$$|x-u| \leq |x-a|.$$

D'autre part supposons que:

$$|x-a| + |h| \leq R_1' < R' \tag{27}$$

on aura:

$$\left|\frac{V_{m+1}}{V_m}\right| < \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R_1' - |h|}{R' - |h|}$$

et en raisonnant comme pour la série:

$$\sum U_n$$

définie par (13), on en déduit que la série

$$\sum V_m \tag{28}$$

définie par (25) est uniformément et absolument convergente, les quantites variables étant ici z, z', u. Donc la somme des intégrales des termes successifs de la série (28) est égale à l'intégrale de la somme V de cette série. Or on a facilement en raisonnant comme pour la série des U_n:

$$V = \frac{g(z, z')}{(z-u)[z' - (x+h-u)]^2}$$

et il vient enfin:

(29) $$\sum_{m=1}^{+\infty} g_{-m}(x,h) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_a^x du\int_C dz\int_{C'}\frac{g(z,z')\cdot dz'}{(z-u)\cdot[z'-(x+h-u)]^2} + \frac{1}{4\pi^2}\int_a^x du\int_C dz\int_{C'}\frac{g(z,z')\cdot dz'}{(z-u)\cdot[z'-(x-u)]^2}$$

développement valable moyennant la condition (27).

Il est à remarquer que le premier membre de (29) est uniformément et absolument convergent pour les valeurs de x et h considérés maintenant comme variables, moyennant la condition (27) et la condition supplémentaire:

$$|x-a| \leq R_1 < R$$

le terme général de la série étant alors, en module, inférieur à celui d'une série numérique positive convergente.

Donc si les deux inégalités:

(2)′ $$\begin{cases} |x-a| + |h| \leq R_1 < R \\ |x-a| + |h| \leq R_1' < R' \end{cases}$$

sont simultanément satisfaites, les deux séries:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x,h) \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{+\infty} g_{-m}(x,h)$$

sont absolument et uniformément convergentes, x et h étant considérés comme variables.

Revenons maintenant à la formule (29). Son second membre est facile à transformer en remarquant que:

$$g'_\eta(\xi,\eta) = -\frac{1}{4\pi^2}\cdot\int_C dz\int_{C'}\frac{g(z,z')\cdot dz'}{(z-\xi)\cdot(z'-\eta)^2}$$

$$|\xi| < R \qquad |\eta| < R'$$

il vient alors:

(30) $$\sum_{m=1}^{+\infty} g_{-m}(x,h) = \int_a^x g'_h(u, x+h-u)\,du - \int_a^x g'_h(u, x-u)\,du.$$

Donc si nous posons:

(31) $$\bar{g}(x,h) = \sum_{m=1}^{+\infty} g_{-m}(x,h) + g(x,h) + \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x,h)$$

il vient, d'après (22) et (30):

(32) $$\bar{g}(x,h) = \int_a^x g'_h(u, x+h-u)\,du - \int_a^x g'_h(u, x-u)\,du + g(x,h) + \int_0^h g'_x(x+h-v, v)\,dv.$$

Il reste a démontrer que $\bar{g}(x, h)$ représente l'accroissement de la fonction definie par l'égalite (3). Pour cela considérons l'intégrale:

$$I_1 = \int_a^x g'_h(u, x + h - u)\, du;$$

de l'égalité:

$$d\, g(u, x + h - u) = g'_x(u, x + h - u)\, du - g'_h(x, x + h - u)\, du$$

obtenue en considérant x et h comme fixes, et u comme variable, on tire en intégrant par rapport à u dans l'intervalle (a, x):

$$(33) \qquad I_1 = \int_a^x g'_x(u, x + h - u)\, du - g(x, h) + g(a, x + h - a).$$

Posons maintenant:

$$I_2 = \int_a^x g'_h(u, x - h)\, du$$

le même raisonnement donne:

$$(34) \qquad I_2 = \int_a^x g'_x(u, x - u)\, du - g(x, 0) + g(a, x - a).$$

Posons encore:

$$x + h - u = v$$

la relation (33) devient:

$$(35) \qquad I_1 = \int_h^{x+h-a} g'_x(x + h - v, v)\, dv - g(x, h) + g(a, x + h - a).$$

Posons enfin:

$$x - u = v$$

l'intégrale I_2 devient, compte tenu du fait que *par hypothèse:*

$$g(x, 0) = 0$$

$$(36) \qquad I_2 = \int_0^{x-a} g'_x(x - v, v)\, dv + g(a, x - a).$$

Portons dans (32) les valeurs (35) et (36) respectivement trouvées pour I_1 et I_2. Il vient:

$$\bar{g}(x, h) = \left[g(a, x + h - a) + \int_0^{x+h-a} g'_x(x + h - v, v)\, dv\right] - \left[g(a, x - a) + \int_0^{x-a} g'_x(x - v, v)\, dv\right].$$

En posant:

$$f(x) = g(a, x - a) + \int_0^{x-a} g'_x(x - v, v)\,dv.$$

On a bien:

$$\bar{g}(x, h) = f(x + h) - f(x)$$

et le théorème est complètement demontré, car x et h étant maintenant considérés comme ayant des valeurs données, les inégalités (2) entraînent des inégalités du type (2)'.

Nous allons indiquer une seconde démonstration de cette seconde partie du théorème, qui a l'avantage sur la précédente de faire mieux comprendre pourquoi le développement (1) est un accroissement de fonction. Pour cela nous commencerons par démontrer le lemme suivant:

Soit $\bar{g}(x, h)$ une fonction des deux variables x et h, nulle pour h nul et satisfaisant à la condition (37):

$$\frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial x \partial h} = 0 \tag{37}$$

je dis que $\bar{g}(x,h)$ est égal a l'accroissement d'une fonction de x pour un accroissement h de la variable.

En effet considérons l'integrale:

$$\int \frac{\partial \bar{g}}{\partial \eta}(d\xi + d\eta) \tag{38}$$

dans l'expression de $\bar{g}$ on a remplacé x par ξ et h par η. Cette intégrale est nulle quand le point (ξ, η) décrit un chemin fermé, en vertu de (37).

Considérons alors le chemin fermé suivant, décrit par (ξ, η).

1°. ξ varie de x à $x + h$ et η reste nul.

2°. ξ varie de $x + h$ à x et η étant tel que:

$$\xi + \eta = x + h.$$

3°. ξ reste égal à x et η varie de h à 0. Bien entendu ici x et h sont considérés comme fixes, ξ et η variables pouvant prendre des valeurs complexes. Le long du contour précédent l'intégrale (38) est nulle. En l'évaluant on a immédiatement:

$$\int_x^{x+h} \bar{g}'_h(\xi, 0)\,d\xi - \bar{g}(x, h) = 0 \tag{39}$$

ce qui démontre notre lemme, car si l'on pose:

$$f(x) = \int \bar{g}'_h(x, 0)\,dx$$

(39) équivaut à:

$$\bar{g}(x, h) = f(x + h) - f(x).$$

Ceci posé, *d'après la loi même de formation du développement* (1) *celui-ci satisfait bien à l'équation aux dérivées partielles:*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial h} = 0.$$

En effet, nous avons démontré la convergence uniforme du développement (1) ou (31) moyennant une condition de la forme:

$$|x - a| + |h| < \varrho$$

ϱ étant un nombre positif inférieur à la fois à R et R'. D'après un théorème bien connu on peut dériver terme à terme autant de fois qu'on le veut les séries (1) ou (31) qui définissent $\bar{g}(x, h)$. Formons alors l'expression

$$\text{(40)} \qquad - \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial x \partial h} + \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial h^2}$$

que l'on peut écrire:

$$+ \cdots \frac{\partial^2 g_{-2}}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 g_{-2}}{\partial x \partial h} + \frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x \partial h} + \frac{\partial^2 g}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial h} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial h^2} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial h} + \cdots$$

Or dans cette série, les termes

$$- \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial h} \text{ et } \frac{\partial^2 g_1}{\partial h^2}; \ - \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial h} \text{ et } \frac{\partial^2 g_2}{\partial h^2}; \ \cdots - \frac{\partial^2 g_n}{\partial x \partial h} \text{ et } \frac{\partial^2 g_{n+1}}{\partial h^2} \cdots$$

se détruisent. Il en est de même pour:

$$- \frac{\partial^2 g_{-1}}{\partial x \partial h} \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial h^2}; \ \cdots - \frac{\partial^2 g_{-m-1}}{\partial x \partial h} \text{ et } \frac{\partial^2 g_{-m}}{\partial h^2}, \ \cdots$$

La somme de la série précédente qui est égale à l'expression (40) est donc nulle.

Comme $\bar{g}(x, h)$ est nulle avec h, d'après le lemme ci-dessus, $\bar{g}(x, g)$ représente bien l'accroissement d'une fonction $F(x)$. Pour avoir cette fonction, définie à une constante additive près, *aucune intégration n'est nécessaire*. En effet, de l'identité:

$$F(x + h) - F(x) = \bar{g}(x, h)$$

on déduit en remplacant x par a et h par $x - a$:

$$\text{(41)} \qquad F(x) - F(a) = \bar{g}(a, x - a).$$

Revenons à l'expression (32) de la fonction $\bar{g}$, on trouve immédiatement pour valeur du second membre de (41) la fonction $f(x)$ définie par (3), et (41) peut s'écrire:

$$F(x) = f(x) + \text{constante}.$$

Remarques: 1°. Reprenons l'identité:

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} g_{-m}(x, h) + g(x, h) + \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x, h)$$

avec:

$$|x-a| + |h| < \varrho \quad (\varrho < R;\ \varrho < R').$$

Dans l'identité précédente nous pouvons remplacer x par a et h par $x-a$ pourvu que:

$$|x-a| < \varrho.$$

On aura alors:

$$f(x) - f(a) = g(a, x-a) + \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(a, x-a)$$

ou en tenant compte de la relation (3):

$$\int_0^{x-a} g'_x(x-t, t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(a, x-a). \tag{42}$$

La série figurant au second membre de cette inégalité étant absolument et uniformément convergente pour les valeurs de x satisfaisant a l'inégalité:

$$|x-a| < \varrho$$

ou ϱ designe un nombre positif inférieur à la fois à R et R'. Si l'on pose:

$$g(x, h) = f'(x)\, h.$$

L'intégrale du premier membre devient:

$$f(x) - f(a) - \frac{x-a}{1!} f'(a)$$

tandis que le second membre prend la forme:

$$\frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \cdots$$

et en égalant les deux expressions précédentes on retrouve le développement de Taylor de $f(x)$ supposée holomorphe dans un cercle de centre a.

2°. Nous avons supposé que g était identiquement nulle pour h nulle. Si l'on ne fait pas cette hypothèse il résulte immédiatement des formules (32) à (36) que l'on a, en posant:

$$\bar{g}(x, h) = \sum_{m=1}^{+\infty} g_{-m}(x, h) + g(x, h) + \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x, h)$$

les fonctions g_{-m} et g_n se déduisant de g comme précédemment, la relation un peu plus générale:

$$\bar{g}(x, h) = g(x, 0) + \Delta_x \left\{ g(a, x-a) + \int_0^{x-a} g'_x(x-t, t)\, dt \right\} \tag{43}$$

un symbole tel que:

$$\Delta_x \{F(x, \alpha, \beta, \ldots \lambda)\}$$

représentant l'accroissement subi par la fonction entre accolades quand on donne à x l'accroissement h, les autres paramètres dont peut dépendre F restant constants. Cette formule (43) nous sera utile par la suite.

CHAPITRE II.

Cas de plusieurs variables indépendantes.

On peut étendre au cas de plusieurs variables les raisonnements et les résultats obtenus dans la premiere partie. Pour plus de simplicité examinons le cas de deux variables indépendantes x et y. Soit alors:

$$g(x, y, h, k)$$

une fonction donnée des quatre variables complexes $x, y; h, k$ (h et k seront dans la suite envisagés comme des accroissements donnés respéctivement à x et y), g étant nulle quand h et k sont simultanéments nuls et holomorphe dans le domaine constitué par l'ensemble de quatre cercles C_1, C_2, C_3, C_4 de rayons respectifs R_1, R_2, R_3, R_4 et tracés respectivement dans les quatre plans complexes suivants:

(x) pour C_1 avec un point donné d'affixe a pour centre.
(y) pour C_2 avec un point d'affixe b pour centre.
(h) pour C_3 avec le point d'affixe zéro pour centre.
(k) pour C_4 avec le point d'affixe zéro pour centre.

Considérons le tableau T à double entrée dont le terme général:

$$\varphi_{m,n}(x, y, h, k)$$

se déduit de $g(x, y, h, k)$ de la façon suivante:

1°. Si le premier indice m est positif on intégre successivement m fois $g(x, y, h, k)$ de zero à h par rapport à h et l'on dérive m fois le résultat obtenu par rapport à x.

Si m est négatif on intègre successivement m' fois $g(x, y, h, k)$ par rapport à x de a à x, et l'on dérive le résultat obtenu m' fois par rapport à h. $(m' = -m)$.

2°. Si le second indice n est positif on intègre successivement n fois par rapport à k, de zéro à k le résultat obtenu au 1° puis on dérive n fois par rapport à y le nouveau résultat. Si le second indice n est négatif $(n = -n')$ on intègre n' fois par rapport à y de b à y le résultat obtenu au 1° puis on dérive n' fois par rapport à k le nouveau résultat.

Ainsi l'indice m (premier indice) se rapporte à des opérations portant sur le couple (x, h) et l'indice n (second indice) se rapporte à des opérations effectuées sur le couple (y, k). Il est à remarquer que les opérations précédentes peuvent s'effectuer dans n'importe quel ordre.

3°. Si l'un des indices m ou n est nul on n'effectue aucune opération sur le couple correspondant. On posera en outre:

$$\varphi_{0,0}(x, y, h, k) = g(x, y, h, k).$$

Posons enfin:

$$g_{m,n}(x, y, h, k) = \varphi_{m,n}(x, y, h, k) - \varphi_{m,n}(x, y, 0, 0).$$

Nous allons démontrer le théorème suivant:

Si x, y, h, k vérifient simultanément les inégalités:

$$|x-a| + |h| \leq \varrho \text{ et } |y-b| + |k| \leq \varrho \tag{1}$$

où ϱ désigne un nombre positif inférieur au plus petit des quatre nombres R_1, R_2, R_3, R_4, l'expression:

$$\bar{g}(x, y, h, k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{m,n}(x, y, h, k) - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{m,0}(x, y, h, 0) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{0,n}(x, y, 0, k) \tag{2}$$

est absolument et uniformément convergente. Sa somme est égale à

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y) \tag{3}$$

en posant:

$$f(x, y) = g(a, b, x-a, y-b) + \int_0^{x-a} g'_x(x-t, b, t, y-b)\,dt + \tag{4}$$
$$+ \int_0^{y-b} g'_y(a, y-\tau, x-a, \tau)\,d\tau + \int_0^{x-a} dt \int_0^{y-b} g''_{xy}(x-t, y-\tau, t, \tau)\,d\tau.$$

Comme on le voit l'énoncé précédent ne constitue pas une généralisation exacte du théorème établi au chapitre I, l'expression (3) qu'on peut écrire:

$$\Delta_x \Delta_y \{f(x, y)\}$$

n'étant pas égale à l'accroissement de f quand on donne à x et à y des accroissements respectivement égaux à h et à k. Toutefois l'intérêt de la proposition énoncée reste considérable la fonction $\bar{g}(x, y, h, k)$ définie par (2) et dont la valeur est égale à (3) étant formées d'une façon très analogue à l'expression (1) du chapitre I et la théorème actuel constitue une généralisation immédiate de la proposition établie au chapitre précédent.

Nous montrerons d'ailleurs plus loin comment il faut modifier l'énoncé par lequel débute le chapitre II pour obtenir une généralisation complète du théorème établi au chapitre I. Pour le moment nous allons indiquer brièvement comment on peut établir la proposition qui vient d'être énoncée. Tout d'abord la convergence absolue et uniforme de (2) moyennant les conditions (1) s'établit par une marche tout à fait analogue quoique plus longue que celle employée dans le premier chapitre pour démontrer la convergence absolue et uniforme de la série (1) de ce chapitre.

On part de la relation:

$$g(x, y, h, k) = \frac{1}{(2\pi i)^4} \int_{C_1} d z_1 \int_{C_2} d z_2 \int_{C_3} d z_3 \int_{C_4} \frac{g(z_1, z_2, z_3, z_4)\, d z_4}{(z_1 - x)(z_2 - y)(z_3 - h)(z_4 - k)}$$

qui donne facilement les expressions des termes

$$g_{m,n}(x, y, h, k)$$

de la série (2) du présent chapitre; on en déduit facilement la convergence absolue et uniforme de (2) moyennant les hypothèses (1). Il est inutile d'insister davantage sur ce point, les raisonnements étant tout à fait semblables à ceux du chapitre précédent et présentant seulement quelques longueurs. Occupons nous de trouver la somme de (2). Nous utiliserons pour cela, avec des changements de notation évidents, l'identité (43) du chapitre précédent.

L'indice n étant fixé, nous avons grâce à cette identité:

$$(5) \qquad \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} g_{m,n}(x, y, h, k) = g_{0,n}(x, y, 0, h) + \\ + \Delta_x \left\{ g_{0,n}(a, y, x-a, k) + \int_0^{x-a} D_x g_{0,n}(x-t, y, t, k)\, d t \right\}.$$

La notation:

$$D_x g_{0,n}(x-t, y, t, k)$$

représentant la derivée partielle par rapport à x de la fonction $g_{0,n}(x-t, y, t, k)$. Nous utilisons cette notation comme plus commode ici que les notations habituelles.

Nous tirons de (5) l'identité:

$$(6)\quad \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} g_{m,n}(x, y, h, k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{0,n}(x, y, 0, k) +$$

$$+ \Delta_x \left\{ \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} g_{0,n}(a, y, x-a, k) + \int_0^{x-a} D_x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{0,n}(x-t, y, t, k)\, dt \right\}.$$

D'autre part toujours par application de l'identité (43) et aux notations près:

$$(7)\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{0,n}(a, y, x-a, k) = g(a, y, x-a, 0) +$$

$$+ \Delta_y \left\{ g(a, b, x-a, y-b) + \int_0^{y-b} g'_y(a, y-\tau, x-a, \tau)\, d\tau \right\}$$

et aussi:

$$(8)\quad \int_0^{x-a} D_x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{0,n}(x-t, y, t, k)\, dt = \int_0^{x-a} g'_x(x-t, y, t, 0)\, dt +$$

$$+ \Delta_y \left\{ \int_0^{x-a} g'_x(x-t, b, t, y-b)\, dt + \int_0^{x-a} \int_0^{y-b} g''_{xy}(x-t, y-\tau, t, \tau)\, dt\, d\tau \right\}.$$

Par conséquent, compte tenu de (6), (7), et (8):

$$(9)\quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{m,n}(x, y, h, k) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{0,n}(x, y, 0, k) =$$

$$= \Delta_x \left\{ g(a, y, x-a, 0) + \int_0^{x-a} g'_x(x-t, y, t, 0)\, dt \right\} +$$

$$+ \Delta_x \Delta_y \left\{ g(a, b, x-a, y-b) + \int_0^{x-a} g'_x(x-t, b, t, y-b)\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{y-b} g'_y(a, y-\tau, x-a, \tau)\, d\tau + \int_0^{x-a} \int_0^{y-b} g''_{xy}(x-t, y-\tau, t, \tau)\, dt\, d\tau \right\}.$$

Mais d'autre part:

$$(10)\quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{m,0}(x, y, h, 0) = g(x, y, 0, 0) + \Delta_x \left\{ g(a, y, x-a, 0) + \int_0^{x-a} g'_x(x-t, y, t, 0)\, dt \right\}.$$

Compte tenu de l'hypothèse initiale:

$$g(x, y, 0, 0) = 0$$

et en remplaçant dans le second membre de (9) le terme en Δ_x seul par le premier membre de (10), il vient donc:

$$(11)\quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{m,n}(x, y, h, k) - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{m,0}(x, y, h, 0) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{0,n}(x, y, 0, k) =$$

$$= \Delta_x \Delta_y \Big\{ g(a, b, x-a, y-b) + \int_0^{x-a} g'_x(x-t, b, t, y-b)\, dt +$$

$$+ \int_0^{y-b} g'_y(a, y-\tau, x-a, \tau)\, d\tau + \int_0^{x-a}\int_0^{y-b} g''_{xy}(x-t, y-\tau, t, \tau)\, dt\, d\tau \Big\}$$

ce qui n'est autre que l'égalité à démontrer et notre théorème se trouve ainsi démontré.

Nous pouvons maintenant aller plus loin et obtenir une proposition donnant un généralisation exacte du développement de Taylor pour les fonctions de deux variables complexes x et y.

De (7) nous tirons en effet:

$$(7')\quad \Delta_y \Big\{ g(a, b, x-a, y-b) + \int_0^{y-b} g'_y(a, y-\tau, x-a, \tau)\, d\tau \Big\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} g_{0,n}(a, y, x-a, k) - g(a, y, x-a, 0).$$

Nous tirons aussi de (8):

$$(8')\quad \Delta_y \Big\{ \int_0^{x-a} g'_x(x-t, b, t, y-b)\, dt + \int_0^{x-a}\int_0^{y-b} g''_{xy}(x-t, y-\tau, t, \tau)\, dt\, d\tau \Big\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0+\infty} \int_0^{x-a} D_x g_{0,n}(x-t, y, t, k)\, dt - \int_0^{x-a} g'_x(x-t, y, t, 0)\, dt.$$

D'où par addition membre à membre de (7') et de (8'):

$$(12)\quad \Delta_y \{f(x, y)\} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} g_{0,n}(a, y, x-a, k) + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_0^{x-a} D_x g_{0,n}(x-t, y, t, k)\, dt -$$

$$- g(a, y, x-a, 0) - \int_0^{x-a} g'_x(x-t, y, t, 0)\, dt.$$

La fonction $f(x, y)$ étant toujours celle définie par l'égalité (4).

De même on aurait d'une manière analogue:

$$(13)\quad \Delta_x \{f(x, y)\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{m,0}(x, b, h, y-b) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{y-b} D_y g_{m,0}(x, y-\tau, h, \tau)\, d\tau -$$

$$- g(x, b, 0, y-b) - \int_0^{y-b} g'_y(x, y-\tau, 0, \tau)\, d\tau.$$

Or on a l'identité évidente:

$$(14)\qquad f(x+h, y+k) - f(x, y) = \Delta_x \Delta_y \{f(x, y)\} + \Delta_x \{f(x, y)\} + \Delta_y \{f(x, y)\}.$$

Or les relations (11), (12) et (13) donnent les valeurs des différences qui figurent au second membre de (14). Compte tenu de ces égalités on obtient le théorème suivant:

Si x, y, h, k vérifient simultanément les inégalités:

$$(1)\qquad |x-a| + |h| \leq \varrho \text{ et } |y-b| + |k| \leq \varrho$$

où ϱ désigne un nombre positif inférieur au plus petit des quatre nombres R_1, R_2, R_3, R_4 respectivement égaux aux rayons des cercles constituant le domaine à l'intérieur duquel $g(x, y, h, k)$ est supposée holomorphe, l'expression suivante:

$$(15)\qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{m,n}(x, y, h, k) - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{m,0}(x, y, h, 0) - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{0,n}(x, y, 0, k) + \psi(x, y, h, k)$$

où le terme complémentaire $\psi(x, y, h, k)$ est défini par l'égalité:

$$(16)\qquad \psi(x, y, h, k) = \psi_1(x, y, h) + \psi_3(x, y, k)$$

avec:

$$(17)\qquad \psi_1(x, y, h) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{m,0}(x, b, h, y-b) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{y-b} D_y\, g_{m,0}(x, y-\tau, h, \tau)\, d\tau -$$
$$- g(x, b, 0, y-b) - \int_0^{y-b} g'_y(x, y-\tau, 0, \tau)\, d\tau$$

et:

$$(18)\qquad \psi_2(x, y, k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{0,n}(a, y, x-a, k) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{x-a} D_x\, g_{0,n}(x-t, y, t, k)\, dt -$$
$$- g(a, y, x-a, 0) - \int_0^{x-a} g'_x(x-t, y, t, 0)\, dt$$

est absolument et uniformément convergente. Sa valeur est égale à l'accroissement de la fonction:

$$(4)\qquad f(x, y) = g(a, b, x-a, y-b) + \int_0^{x-a} g'_x(x-t, b, t, y-b)\, dt +$$
$$+ \int_0^{y-b} g'_y(a, y-\tau, x-a, \tau)\, d\tau + \int_0^{x-a}\int_0^{y-b} g''_{xy}(x-t, y-\tau, t, \tau)\, dt\, d\tau$$

quand x et y prennent des accroissements respectivement égaux à h et à k.

Remarques: 1°. Désignons par $G(x, y, h, k)$ le premier membre de (14). Cette expression est égale a l'accroissement de la fonction $f(x, y)$ définie par (4). Si dans G nous remplaçons respectivement x par a et y par b, h par $x-a$ et k par $y-b$, on obtient immédiatement l'identité:

$$G(a, b, x-a, y-b) = f(x, y) \tag{19}$$

qui constitue une généralisation de Taylor pour la fonction $f(x, y)$.

2°. L'expression (4) de f peut recevoir différentes formes équivalentes. Ainsi de l'identité:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x-t, b, t, y-b) = -g'_x(x-t, b, t, y-b) + g'_h(x-t, b, t, y-b)$$

on tire immédiatement par intégration:

$$\int_0^{x-a} g'_x(x-t, b, t, y-b)\,dt = -g(a, b, x-a, y-b) + g(x, b, 0, y-b) + \int_0^{x-a} g'_h(x-t, b, t, y-b)\,dt.$$

On obtient d'une manière analogue la formule:

$$\int_0^{y-b} g'_y(a, y-\tau, x-a, \tau)\,d\tau = -g(a, b, x-a, y-b) + g(a, y, x-a, 0) + \int_0^{y-b} g'_k(a, y-\tau, x-a, \tau)\,d\tau$$

et en portant dans (4) on trouve:

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & g(a, y, x-a, 0) + g(x, b, 0, y-b) - g(a, b, x-a, y-b) + \\ & + \int_0^{x-a} g'_h(x-t, b, t, y-b)\,dt + \int_0^{y-b} g'_k(a, y-\tau, x-a, \tau)\,d\tau + \\ & + \int_0^{x-a}\int_0^{y-b} g''_{xy}(x-t, y-\tau, t, \tau)\,dt\,d\tau. \end{aligned} \tag{4'}$$

Cette expression (4') de f peut dans certains cas être plus avantageuse que l'expression (4).

Nous indiquerons une autre transformation de (4) ou (4'). On a:

$$\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial \tau} g(x-t, y-\tau, t, \tau) = g''_{xy}(x-t, y-\tau, t, \tau) - g''_{xk}(\quad) - g''_{yh}(\quad) + g''_{hk}(\quad)$$

d'où:

$$\int_0^{x-a}\int_0^{y-b} g''_{xy}(x-t, y-\tau, t, \tau)\,dt\,d\tau = \int_0^{x-a}\int_0^{y-b} (g''_{xk} + g''_{yh} - g''_{hk})\,dt\,d\tau + \int_0^{x-a}\int_0^{y-b} \frac{\partial^2 g}{\partial t\,\partial t}\,dt\,d\tau.$$

Or:

$$\int_0^{x-a}\int_0^{y-b} \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial \tau} g(x-t, y-\tau, t, \tau)\,dt\,d\tau = g(a, b, x-a, y-b) - g(x, b, 0, y-b) - g(a, y, x-a, 0)$$

et (4′) devient:

$$(4'')\quad f(x, y) = \int_0^{x-a} g'_h(x-t, b, t, y-b)\,dt + \int_0^{y-a} g'_k(a, y-\tau, x-a, \tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^{x-a}\int_0^{y-b} [g''_{xk}(x-t, y-\tau, t, \tau) + g''_{yh}(\ ) - g''_{hk}(\ )]\,dt\,d\tau.$$

Exemple: Soit $F(x, y)$ une fonction holomorphe dans le domaine constitué par l'ensemble de deux cercles C et C' tracés respectivement dans les plans des variables complexes x et y, ayant leurs centres respectifs aux points d'affixe a et b. Supposons que l'on ait simultanément:

$$|x-a| + |h| \leq \varrho;\ |y-b| + |k| \leq \varrho$$

ϱ étant un nombre positif inférieur au plus petit des rayons des cercles C et C'. Posons:

$$(20)\qquad g(x, y, h, k) = \frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} k.$$

Appliquons à g les considérations du présent chapitre.

Formons pour cela $g_{m,n}(x, y, h, k)$.

Si:

$$m \geq 0;\ n \geq 0$$

on a immédiatement:

$$(21)\qquad g_{m,n}(x, y, h, k) = \frac{1}{(m+1)!}\cdot\frac{1}{n!} F^{(m+n+1)}_{x^{m+1}y^n}(x, y)\, h^{m+1} k^n + \frac{1}{m!}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{(n+1)!} F^{(m+n+1)}_{x^m, y^{n+1}}(x, y)\, h^m k^{n+1}.$$

D'autre part, si l'un au moins des deux indices m, n est négatif on voit facilement que:

$$(22)\qquad g_{m,n}(x, y, h, k) = 0.$$

Compte tenu de (21) et de (22) on a donc:

$$(23)\quad \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{m=+\infty} g(x, y, h, k) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} g_{m,n}(x, y, h, k) =$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^m k^n}{m!\, n!} F^{(m+n)}_{x^m y^n}(x, y) + \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h^m k^n}{m!\, n!} F^{(m+n)}_{x^m, y^n}(x, y)$$

et (23) peut encore s'écrire:

$$(24)\quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{m,n}(x, y, h, k) = -\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} F^{(m)}_{x^m}(x, y) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{n!} F^{(n)}_{y^n}(x, y) +$$

$$+ 2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!} \cdot \frac{k^n}{n!} F^{(m+n)}_{x^m y^n}(x, y).$$

D'autre part d'après (21):

$$(25)\quad \begin{aligned} g_{m,0}(x, y, h, 0) &= \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} F^{(m+1)}_{x^{m+1}}(x, y) \\ g_{0,n}(x, y, 0, k) &= \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}_{y^{n+1}}(x, y). \end{aligned}$$

Par conséquent il vient d'après (24) et (25), en posant:

$$(26)\qquad S = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} g_{m,n}(x, y, h, k) - \sum_{-\infty}^{+\infty} g_{m,0}(x, y, h, 0) - \sum_{-\infty}^{+\infty} g_{0,n}(x, y, 0, k).$$

$$(27)\qquad S = 2 \sum_{0}^{+\infty} {\sum_{0}^{+\infty}}' \frac{h^m}{m!} \cdot \frac{k^n}{n!} F^{(m+n)}_{x^m y^a}(x, y) - 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{h^m}{m!} F^{(m)}_{x^m}(x, y) - 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{k^n}{n!} F^{(n)}_{y^n}(x, y).$$

L'accent dont est affecté dans le second membre de (27) le symbole de la double sommation indique que l'on exclut de celle-ci le terme correspondant à la combinaison $m = n = 0$ (ce terme étant égal à $F(x, y)$).

D'autre part S est égale à:

$$\Delta_x \Delta_y f(x, y)$$

f étant définie par une expression telle que (4), ou l'expression équivalente (4″). Sous cette dernière forme le calcul est très facile. On a ici:

$$g = h F'_x(x, y) + k F'_y(x, y),$$

d'où d'après (4″):

$$f(x, y) = \int_0^{x-a} F'_x(x-t, b)\, dt + \int_0^{y-b} F'_y(a, y-\tau)\, d\tau + 2 \int_0^{x-a} \int_0^{y-b} F''_{xy}(x-t, y-\tau)\, dt\, d\tau$$

ce qui donne:

$$f = 2\,F(x, y) - F(x, b) - F(a, y)$$

d'où l'on tire:

$$\Delta_x \Delta_y f(x, y) = 2\,\Delta_x \Delta_y F(x, y).$$

Par conséquent la valeur de S (formule (27)) est donnée par:

$$S = 2\,\Delta_x \Delta_y F = 2\,[F(x+h, y+k) - F(x+h, y) - F(x, y+k) + F(x, y)]$$

ou:

$$\tfrac{1}{2} S = [F(x+h, y+k) - F(x, y)] - [F(x+h, y) - F(x, y)] - [F(x, y+k) - F(x, y)]$$

ce qui est bien conforme à un résultat classique.

COMPLEMENT AU CHAPITRE I.

Développement Taylorien d'une fonction donnée.

1°. Dans le chapitre I nous sommes partis d'une fonction $g(x, h)$ des deux variables x et h, holomorphe au voisinage de $x = a$, $h = 0$ et nulle pour h nul. A partir de g nous avons formé un développement en série:

$$(1) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} g_m(x, h) \qquad \text{avec } g_0 = g$$

et nous avons montré que ce développement (1) était égal à l'accroissement de la fonction:

$$(2) \qquad g(a, x-a) + \int_0^{x-a} g'_x(x-t, t)\,dt:$$

d'ailleurs (2) est égale au développement:

$$(3) \qquad \sum_0^{+\infty} g_m(a, x-a).$$

Nous dirons que les series (1) et (3) constituent un développement Taylorien de l'accroissement de la fonction (2) et un développement Taylorien de cette fonction elle-même.

Nous allons maintenant étudier le probleme inverse:

Soit une fonction donnée $f(x)$, holomorphe dans un cercle C de centre a et de rayon R. Proposons nous de mettre cette fonction sous la forme d'un développement du type (3). *Tous les développements ainsi obtenus pour f et dont nous montrerons qu'ils sont en nombre infini seront dits des développements Tayloriens de cette fonction.*

D'après ce que nous venons de rappeler le problème revient à déterminer toutes les fonctions $g(x, h)$ telles que:

$$g(a, x-a) + \int_0^{x-a} g'_x(x-t, t)\,dt = f(x) - f(a). \tag{4}$$

Nous allons montrer que ce problème revient à la résolution d'une équation intégrale d'un type classique (équation de Volterra).

Posons:

$$x = a + s.$$

L'équation (4) s'écrira:

$$g(a, s) + \int_0^{s} g'_x(a+s-t, t)\,dt = f(a+s) - f(a). \tag{5}$$

Donnons nous maintenant d'une façon arbitraire une fonction $K(s, t)$ des deux variables indépendantes s et t, holomorphe dans le domaine constitué par l'ensemble de deux cercles C et C' des plans complexes (s) et (t), les rayons de ces cercles étant respectivement égaux à R et R'.

Considérons l'équation intégrale de Volterra:

$$u(s) - \int_0^{s} K(s, t)\,u(t)\,dt = f(a+s) - f(a) \tag{6}$$

qui admet toujours une solution et une seule en u. Remarquons que:

$$u(0) = 0 \tag{7}$$

$u(s)$ étant alors definie par (6) cherchons les fonctions $g(x, h)$ telles que l'on ait simultanément:

$$g'_x(a+s-t, t) = -K(s, t)\cdot u(t) \tag{8}$$

$$g(a, s) = u(s). \tag{9}$$

On a d'après (8):

$$g(a+s-t, t) = -u(t)\int_0^{s} K(\sigma, t)\,d\sigma + \psi(t). \tag{10}$$

Je fais $s = t$ dans (10). D'après (9) on doit avoir:

$$u(t) = -u(t)\int_0^{t} K(\sigma, t)\,d\sigma + \psi(t) \tag{11}$$

d'où l'on tire immédiatement $\psi(t)$ et (10) devient:

$$g(a+s-t,t) = u(t)\int_t^s K(\sigma,t)\,d\sigma + u(t) \tag{12}$$

Posons alors:

$$g(x,h) = -u(h)\int_h^{x-a+h} K(\sigma,h)\,d\sigma + u(h). \tag{13}$$

On a d'ailleurs:

$$g(x,0) = u(0) = 0$$

et la fonction g définie par (13) peut être considérée comme la solution générale de (3) qui dépend donc d'une façon simple d'une fonction arbitraire $K(s,t)$.

On aura donc pour la fonction *donnée* $f(x)$ le développement:

$$f(x) - f(a) = \sum_0^{+\infty} g_m(a, x-a) \tag{14}$$

la fonction $g(x,h) = g_0(x,h)$ étant donnée par la relation (13) ou u est la solution de l'équation intégrale (6).

2°. Un cas particulier intéressant est celui où $g(x,h)$ se présente sous la forme du produit d'une fonction de x seul par une fonction de h seul. Cherchons à determiner comment il faut prendre le noyau $K(s,t)$ pour qu'il en soit ainsi, g étant toujours définie par la relation (13).

On doit donc avoir:

$$u(h)\Big[1 - \int_h^{x-a+h} K(\sigma,h)\,d\sigma\Big] = \Phi(x)\,v(h)$$

d'où:

$$1 - \int_h^{x-a+h} K(\sigma,h)\,d\sigma = \Phi(x)\frac{v(h)}{u(h)} = \Phi(x)\,v_1(h).$$

Si nous faisons $x = a$ dans l'identité précédente, nous trouvons

$$1 = \Phi(a)\,v_1(h)$$

donc $v_1(h)$ se réduit à une constante et par conséquent l'intégrale:

$$\int_h^{x-a+h} K(\sigma,h)\,d\sigma \tag{15}$$

doit dépendre de x seulement. Écrivons que la dérivée de (15) par rapport à h est identiquement nulle. Il vient:

$$K(x-a+h, h) - K(h, h) + \int_h^{x-a+h} K'_h(\sigma, h)\, d\sigma = 0$$

ou:

$$\int_h^{x-a+h} [K'_\sigma(\sigma, h) + K'_h(\sigma, h)]\, d\sigma = 0$$

d'où en revenant aux notations s et t pour les variables:

$$K'_s(s, t) + K'_t(s, t) = 0 \tag{16}$$

il en résulte immédiatement que $K(s, t)$ est fonction de $s-t$ seulement, et l'on peut écrire:

$$K(s, t) = F'(s-t) \tag{17}$$

la fonction u est donnée par l'équation intégrale:

$$u(s) - \int_0^s F'(s-t)\, u(t)\, dt = f(a+s) - f(a) \tag{18}$$

el l'on a:

$$\int_h^{x-a+h} K(\sigma, h)\, d\sigma = F(x-a) - F(0)$$

et enfin:

$$g(x, h) = u(h)[1 + F(0) - F(x-a)]. \tag{19}$$

Remarque: Si nous posons:

$$F'(s-t) = -\frac{f''(a+s-t)}{f'(a)} \text{ d'où: } F(s-t) = -\frac{f'(a+s-t)}{f'(a)}$$

l'équation intégrale correspondante est:

$$u(s) + \int_0^s \frac{f''(a+s-t)}{f'(a)}\, u(t)\, dt = f(a+s) - f(a)$$

admet pour solution:

$$u(s) = f'(a) \cdot s$$

comme on le vérifie immédiatement. D'autre part:

$$F(0) = -1;\quad F(x-a) = -\frac{f'(x)}{f'(a)}$$

et d'après (19) il vient dans le cas particulier actuel:

$$g(x, h) = h \cdot f'(x)$$

et le développement correspondant:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} g_m(x, h)$$

qui coincide avec le développement classique de Taylor de la fonction holomorphe donnée $f(x)$, nous fournit, d'après les généralités qui précèdent la valeur de l'accroissement de $f(x)$. La théorie générale exposée ci-dessus permet donc bien de retrouver l'énoncé du théorème classique de Taylor à titre de cas très particulier.

Conclusion.

On pourrait résumer ainsi les idées développées dans ce mémoire:

Soit un processus de résolution par approximation successives de l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial x \partial h} - \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial h^2} = 0. \qquad \text{(E)}$$

Supposons que la solution obtenue s'annule avec h. Cette solution, qu'on peut toujours concevoir comme mise sous la forme d'une série convergente

$$\sum g_n(x, h) \qquad \text{(F)}$$

est égale à un accroissement de fonction, soit:

$$f(x + h) - f(x).$$

Si le processus d'approximation considéré permet d'obtenir (moyennant des conditions de régularité convenables) *toutes* les solutions de (E) qui s'annulent avec h, solutions qui sont des accroissements de fonctions, nous dirons que les développements correspondants (F) sont des développements de Taylor.

Les développements donnés dans la première partie de ce mémoire constituent une classe spéciale de développements tayloriens, au sens défini ci-dessus.

Nous nous proposons de revenir ultérieurement sur cette question.

Le présent travail est le développement de trois notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris (7 Juillet, 1947, 18 Août 1947, 30 Août 1948).