ZWEI DETERMINANTENSÄTZE

VON

E. NETTO

in GIESSEN.

1.

So viel ich weiss, ist der folgende Satz noch nicht bekannt.

Wird die aus dem Systeme

$$c_{\varkappa\lambda} \qquad \binom{\varkappa=3,4,\ldots,n}{\lambda=1,2,\ldots,n}$$

durch Fortlassung der α^{ten} *und der* β^{ten} *Colonne* ($\beta > \alpha$) *entstehende Determinante durch* $\Delta_{\alpha\beta}$ *bezeichnet, ferner* $\Delta_{\beta\alpha} = -\Delta_{\alpha\beta}$ *gesetzt und* $\Delta_{\alpha\alpha} = 0$ *genommen, so wird*

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \Delta_{\alpha\rho} & \Delta_{\alpha\sigma} & \Delta_{\alpha\tau} \\ \Delta_{\beta\rho} & \Delta_{\beta\sigma} & \Delta_{\beta\tau} \\ \Delta_{\gamma\rho} & \Delta_{\gamma\sigma} & \Delta_{\gamma\tau} \end{vmatrix} = 0.$$

Der Satz braucht nur unter der Voraussetzung bewiesen zu werden, dass nicht alle $\Delta_{\varkappa\lambda} \equiv 0$ sind. Wir verstehen unter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ unbestimmte Grössen und betrachten das Gleichungssystem

$$(2) \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0,$$

$$(3) \qquad c_{\varkappa 1}x_1 + c_{\varkappa 2}x_2 + \ldots + c_{\varkappa n}x_n = 0. \qquad (\varkappa=3,4,\ldots,n)$$

Daraus folgt

$$(4) \qquad (-1)^\alpha x_\alpha = \begin{vmatrix} a_1 & \ldots & a_{\alpha-1} & a_{\alpha+1} & \ldots & a_n \\ c_{\varkappa 1} & \ldots & c_{\varkappa,\alpha-1} & c_{\varkappa,\alpha+1} & \ldots & c_{\varkappa n} \end{vmatrix}. \qquad (\alpha=1,2,\ldots,n)$$

Betrachtet man in (2) die a als völlig willkürliche Veränderliche, so giebt (4) die allgemeinen Lösungen von (3)

$$(4') \qquad (-1)^{\alpha} x_{\alpha} = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \Delta_{\alpha\lambda}. \qquad (\alpha, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

Andererseits weiss man, dass jede Lösung von (3) aus zwei von einander unabhängigen Sonderlösungen linear zusammengesetzt werden kann, also etwa

$$(-1)^{\alpha} x_{\alpha} = \mu \Delta_{\alpha\rho} + \nu \Delta_{\alpha\sigma}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

so dass die Vergleichung der beiden letzten Resultate ergiebt:

$$\sum_{\lambda} a_{\lambda} \Delta_{\alpha\lambda} = \mu \Delta_{\alpha\rho} + \nu \Delta_{\alpha\sigma}. \qquad (\alpha, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

Wenn man hierin $a_{\tau} = 1$ und die übrigen $a_{\lambda} = 0$ setzt, dann erhält man für $\alpha = \alpha, \beta, \gamma$ das in (1) ausgesprochene Resultat.

Es ist klar, in welcher Art der Satz sich erweitern lässt, sobald man das System $c_{\varkappa\lambda}$ für $\varkappa = 4, 5, \ldots, n$; $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ betrachtet.

2.

Der aufgestellte Satz kann auch direct bewiesen werden; es scheint aber, dass der Beweis sich umständlicher gestaltet, als wenn man auf die linearen Gleichungen zurückgeht. Das hier angewendete Hülfsmittel hat auch Herr K. Hensel (Acta mathematica, Bd. 14, S. 317—319) zum Beweise eines Kronecker'schen Determinantensatzes benutzt. Aber gerade in diesem Falle kann man den Nachweis auch unmittelbar liefern, indem man sich auf den Laplace'schen Determinanten-Zerlegungs-Satz stützt.

Das Theorem und sein Beweis nehmen dann die folgende Gestalt an:

Aus den beiden Systemen variabler Elemente

$$a_{hi}, \; b_{kl} \qquad \binom{h, i, = 1, 2, \ldots, m}{k, l, = 1, 2, \ldots, n}$$

bilden wir ein drittes System

$$c_{p,q} = a_{hi} b_{kl}, \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, m.n)$$

$$p = (h-1)n + k, \qquad q = (i-1)n + l, \qquad \binom{h, i = 1, \ldots, m}{k, l = 1, \ldots, n}$$

welches so beschaffen ist, dass zu jeder Combination a_{hi}, b_{kl} nur ein c_{pq} aber offenbar auch umgekehrt zu jedem c_{pq} nur eine Combination a_{hi}, b_{kl} gehört. Nun bezeichnen wir

$$\Delta_a = |a_{hi}|, \qquad \Delta_b = |b_{kl}|, \qquad \Delta_c = |c_{pq}|$$

und versuchen Δ_c durch Δ_a, Δ_b auszudrücken. Wir teilen durch Horizontalstriche die Determinante Δ_c von mn Zeilen in m Systeme von je n Zeilen. In jedem solchen steht in den Gliedern jeder einzelnen Colonne dasselbe a_{hi}, da in ihr q ungeändert bleibt und p von $(h-1)n+1$ bis $(h-1)n+n$ läuft. Greift man also zur Bildung einer LAPLACE'schen Subdeterminante n Colonnen heraus, dann kann man die a_{hi} herausziehen und behält eine Determinante aus den b_{kl} zurück, in der k von 1 bis n läuft. Diese Determinante ist also 0 oder Δ_b. Die LAPLACE'sche Satz zeigt also, dass Δ_c durch Δ_b^m teilbar ist. Vertauscht man die a mit den b, dann folgt ebenso die Teilbarkeit von Δ_c durch Δ_a^n und berücksichtigt man die Dimensionen der drei Determinanten in den a, b dann erkennt man, dass

$$\Delta_c = cst\Delta_a^n\Delta_b^m$$

sein wird, wo cst eine Constante bedeutet. Der Wert derselben ergiebt sich gleich 1, sobald man alle a, b mit von einander verschiedenen Indices gleich Null setzt.

3.

Die Methode des Überganges von Determinanten-Relationen zu linearen Gleichungen bewährt sich auch beim Beweise des folgenden Satzes.

Es sei

$$\underset{(i,k=1,\ldots,n)}{|c_{ik}| = C}, \qquad \underset{(i,k=1,\ldots,m;\,m<n)}{|c_{ik}| = D},$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1,m} & c_{1,\beta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m,1} & \ldots & c_{m,m} & c_{m,\beta} \\ c_{\alpha,1} & \ldots & c_{\alpha,m} & c_{\alpha,\beta} \end{vmatrix} = E(\alpha,\beta) \qquad (\alpha,\beta=m+1,\ldots,n)$$

dann ist

(1)
$$|E(\alpha, \beta)|_{(\alpha,\beta=m+1,\ldots,n)} = D^{n-m-1}C.$$

Um dies zu beweisen, gehen wir von dem Systeme der Gleichungen aus

(2)
$$\sum_\beta E(\alpha, \beta) x_\beta = 0 \qquad (\alpha,\beta=m+1,\ldots,n)$$

und nehmen an, die Determinante auf der linken Seite von (1) sei 0;[1] dann können die x so gewählt werden, dass sie, ohne sämmtlich zu verschwinden, (2) befriedigen. Zugleich ist (2) identisch mit

(3)
$$\sum_k \frac{\partial E(\alpha, m+1)}{\partial c_{k,m+1}} \sum_\beta c_{k,\beta} x_\beta + D \sum_\beta c_{\alpha,\beta} x_\beta = 0. \qquad \binom{k=1,2,\ldots,m}{\alpha,\beta=m+1,\ldots,n}$$

Addirt man zu (3) die für alle $x_1, x_2, \ldots, x_m$ identisch erfüllten Gleichungen

$$\sum_k \frac{\partial E(\alpha, m+1)}{\partial c_{k,m+1}} \sum_\gamma c_{k,\gamma} x_\gamma + D \sum_\gamma c_{\alpha,\gamma} x_\gamma = 0 \qquad \begin{pmatrix} k=1,\ldots,m \\ \alpha=m+1,\ldots,n \\ \gamma=1,\ldots,m \end{pmatrix}$$

so entsteht

(4)
$$\sum_k \frac{\partial E(\alpha, m+1)}{\partial c_{k,m+1}} \sum_i c_{k,i} x_i + D \sum_i c_{\alpha,i} x_i = 0. \qquad \begin{pmatrix} k=1,\ldots,m \\ i=1,\ldots,n \\ \alpha=m+1,\ldots,n \end{pmatrix}$$

Wählt man nun die noch unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ so, dass

(5)
$$\sum_i c_{k,i} x_i = 0 \qquad \binom{k=1,\ldots,m}{i=1,\ldots,n}$$

wird, dann folgt aus (4) dass auch alle

(6)
$$\sum_i c_{\alpha,i} x_i = 0 \qquad \binom{\alpha=m+1,\ldots,n}{i=1,\ldots,n}$$

werden. Bei den letzten Schlüssen war vorausgesetzt, dass D nicht verschwinde. Kann man nun (5), (6) befriedigen, dann folgt, dass auch C verschwindet; d. h. *ist die Determinante* $|E(\alpha, \beta)|$ *Null, so ist entweder* C *oder* D *Null.*

---

[1] Mit solchen Determinanten beschäftigt sich KRONECKER, Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 72, S. 152, 153

Umgekehrt ruft $C = 0$, $D \neq 0$ das Verschwinden von $|E(\alpha, \beta)|$ hervor. Denn wenn $C = 0$ ist, kann man die $x_1, \ldots, x_n$ so wählen, dass (5), (6) erfüllt sind, ohne dass die x sämmtlich Null werden. Dabei kann man annehmen, dass eins der $x_{m+1}, \ldots, x_n$ nicht verschwindet, weil sonst wegen $D \neq 0$ unter Berüchsichtigung von (5) auch alle $x_1, \ldots, x_m$ Null würden. Eliminirt man jetzt aus (5) und je einer Gleichung von (6) $x_1, x_2, \ldots, x_m$, so kommt man geradezu auf (2) zurück. Die Determinante von (2) ist also auch gleich Null.

Es sei ferner $D = 0$. Wäre nun der Satz, dass $|E(\alpha, \beta)|$ dann auch verschwindet, schon für einen Wert von n bewiesen, so gälte er auch für $n + 1$. Denn für diesen Fall brauchte man nur $|E(\alpha, \beta)|$ nach den Elementen der letzten Colonne zu entwickeln; die Adjuncten sind sämmtlich ähnliche Determinanten von einer um Eins niedrigeren Ordnung. Es reicht also aus, den Beweis für $n = m + 2$ zu liefern, d. h. zu zeigen, dass mit D auch

$$\begin{vmatrix} E(m+1, m+1) & E(m+1, m+2) \\ E(m+2, m+1) & E(m+2, m+2) \end{vmatrix}$$

verschwindet. Entwickelt man die E nach Elementen der letzten Zeile und der letzten Colonne, und beachtet dabei $D = 0$, so entsteht die Form

$$\begin{vmatrix} \sum_{i,k} c_{m+1,i} c_{k,m+1} P_{ik}\,, & \sum_{i,k} c_{m+1,i} c_{k,m+2} P_{ik} \\ \sum_{i,k} c_{m+2,i} c_{k,m+1} P_{ik}\,, & \sum_{i,k} c_{m+2,i} c_{k,m+2} P_{ik} \end{vmatrix},$$

wo die Summation sich auf alle $i, k = 1, \ldots, m$ bezieht und die P_{ik} Subdeterminanten von D sind. Die Determinante zerfällt in eine Summe

$$\sum_{i,k;\,i',k'} \begin{vmatrix} c_{m+1,i} c_{k,m+1} P_{ik}\,, & c_{m+1,i'} c_{k',m+2} P_{i'k'} \\ c_{m+2,i} c_{k,m+1} P_{ik}\,, & c_{m+2,i'} c_{k',m+2} P_{i'k'} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i,k;\,i',k'} c_{k,m+1} c_{k',m+2} P_{ik} P_{i'k'} \begin{vmatrix} c_{m+1,i} & c_{m+1,i'} \\ c_{m+2,i} & c_{m+2,i'} \end{vmatrix} = 0,$$

da die letzte Determinante entweder Null ist, oder durch eine andere zerstört wird, bei welcher i, i' vertauscht sind.

So ist gezeigt: *Ist* $C = 0$, *oder ist* $D = 0$, *so ist auch* $|E(\alpha, \beta)|$ *gleich Null.*

Da die Determinante der E homogen in den c ist, so kann man schon nach dem ersten der beiden erhaltenen Resultaten (vgl. HENSEL, Acta mathematica, Bd. 14, S. 319)

$$|E(\alpha, \beta)| = \Sigma q_{\mu\nu} C^{\mu} D^{\nu}$$

setzen, wobei die q von den c unabhängig sind, und stets

$$n\mu + m\nu = (m + 1)(n - m)$$

sein muss. Nimmt man alle ausserhalb der Hauptdiagonale in C stehenden Elemente gleich 0, so wird die Determinante der E gleich

$$(c_{11} c_{22} \dots c_{m,m})^{n-m} c_{m+1,m+1} c_{m+2,m+2} \dots c_{nn};$$

daraus geht sofort hervor, dass nur ein Wertepaar $\mu = 1$, $\nu = n - m - 1$ den Bedingungen genügt.

Hierdurch ist der zu Anfang des Paragrafen aufgestellte Satz bewiesen.