THORALF SKOLEM IN MEMORIAM

PAR

TRYGVE NAGELL

Uppsala, Sweden

La mort subite et inattendue de Thoralf Skolem a frappé les mathématiciens scandinaves d'une douleur profonde. Il est décédé à Oslo le 23 mars 1963 dans sa 76[e] année, en train de préparer sa quatrième visite dans les États-Unis.

Thoralf Albert Skolem naquit le 23 mai 1887 à Sandsvaer, canton situé dans le département Buskerud dans le sud de Norvège. Son père, descendant d'une famille de paysans, était instituteur dans l'école primaire. Après avoir passé son baccalauréat à l'École Cathédrale de Kristiania (dès 1925 Oslo), dans le printemps 1905, Thoralf Skolem com-

1 — 632932 *Acta mathematica*. 110. Imprimé le 14 octobre 1963.

mença ses études à la Faculté des Sciences de l'Université de Kristiania. Il y passa des examens partiels dans les disciplines suivantes : mathématiques (sujet principal), mécanique rationnelle, astronomie, physique, chimie, zoologie et botanique, pour obtenir (en 1913) le degré de licencié ès sciences; son examen complet, ayant reçu la plus haute distinction possible, fut rapporté au Roi de Norvège. Pendant la période 1909–1914 il était mathématicien assistant chez l'éminent physicien Kristian Birkeland, professeur à l'Université de Kristiania. Il participa à l'expédition de Birkeland à Khartoum, au Soudan, pour étudier la lumière zodiacale 1913–1914.

Voici les faits les plus importants de son *curriculum vitae* depuis 1914. Pendant la période 1914–16 : études à l'Université de Göttingen. 1916–18 : chargé de cours en mathématiques à l'Université de Kristiania. 1918–1930 : maître de conférences (docent) à la même université. Pendant la période 1924–26 : chargé de cours à l'école supérieure de commerce à Oslo. 1926 docteur ès sciences à l'Université d' Oslo; sa thèse, « Einige Sätze über ganzzahlige Lösungen gewisser Gleichungen und Ungleichungen », fut publiée dans les Mathem. Annalen, t. 95 (1925). En 1930 il fut attaché à l'Institut Christian Michelsen, Bergen, en qualité de professeur de recherche en mathématiques. Étant, dans cette position, libéré de toutes les charges d'enseignement, d'examens et d'administration, il a pu se livrer entièrement à ses recherches scientifiques. Il y resta jusqu' à 1938 quand il retourna à l'Université d'Oslo, appelé à une chaire ordinaire de mathématiques. Il prit sa retraite en 1959.

Skolem a été un des rédacteurs des Acta Mathematica depuis 1938. Il a rédigé le Norsk Matematisk Tidsskrift (Oslo) de 1930 à 1952. Il a aussi été membre de la rédaction des journaux suivants : The Journal of Symbolic Logic (depuis 1949) et Mathematica Scandinavica (depuis 1953).

La mort prématurée de Skolem signifie une perte très sensible pour les sciences mathématiques. A l'âge de 75 ans, Skolem était encore plein de vitalité et d'activité. On sait qu'il avait alors en préparation un bon nombre de travaux.

La production mathématique de Skolem a une extension imposante quoiqu'il ait commencé de publier relativement tard. Celle-ci embrasse plus de 170 travaux dont la plupart traite des sujets appartenant aux disciplines suivantes : algèbre, théorie des nombres, logique mathématique et fondement des mathématiques. Dans cette dernière discipline il fut un des grands pionniers. C'est surtout à cause de ses remarquables travaux dans ce domaine qu'il s'était acquis une réputation de savant d'élite.

D'ailleurs il a aussi donné de belles contributions à la géométrie algébrique, à la mécanique rationnelle, à la théorie des ensembles, à la topologie algébrique, à la théorie des groupes, à la théorie des treillis, à la combinatorique, à la théorie des séries de Dirichlet.

Dans ses œuvres il donne des preuves extra-ordinaires d'originalité et de fantaisie fertile. Il était doué d'une intelligence pénétrante et d'une clarté d'esprit qu'on ne trouve pas souvent. Il avait l'esprit critique et à la fois constructif et possédait une capacité souveraine à maîtriser et utiliser des ressources variées.

Il ne saurait être question en quelques lignes de décrire l'œuvre scientifique de Skolem, celle-ci étant trop étendue. Nous nous bornerons à faire quelques réflexions sur les tendances de ses recherches principales.

La moitié des travaux de Skolem traite des questions de la théorie des nombres, en premier lieu des problèmes concernant les équations diophantiennes. Skolem a donné des contributions remarquables à plusieurs branches de ce domaine. Nous nous contenterons d'une courte déscription de son résultat le plus important. En généralisant un procédé que j'avais appliqué dans plusieurs mémoires, il a développé une méthode ingénieuse pour traiter des classes très étendues d'équations diophantiennes. Il considère des systèmes d'équations du type

$$\left.\begin{aligned} &N(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = h, \\ &f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ signifient des nombres d'un corps algébrique $\mathbf{K}$ et N la norme dans ce corps; h est un nombre entier rationnel; les f_i sont des polynomes à coefficients entiers rationnels. Il s'agit de résoudre ce système en nombres entiers rationnels $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En vertu de la théorie des unités algébriques il est évident que le problème équivaut à résoudre un certain système d'équations exponentielles, où les inconnues sont les exposants $u_1, u_2, \ldots, u_r$ des puissances $\varepsilon_1^{u_1}, \varepsilon_2^{u_2}, \ldots, \varepsilon_r^{u_r}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ signifiant un système fondamental fixe d'unités dans $\mathbf{K}$; $u_1, u_2, \ldots, u_r$ doivent être des entiers rationnels. Si p est un nombre premier, on montre aisément que les fonctions $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ peuvent être développées dans des séries de puissances p-adiques de la forme

$$\sum a^{(i)}_{s_1, \ldots, s_r} u_1^{s_1} u_2^{s_2} \ldots u_r^{s_r}$$

qui sont convergentes pour toutes les valeurs entières p-adiques de $u_1, u_2, \ldots, u_r$; à cause de la symétrie par rapport aux conjugués, les coefficients $a^{(i)}$ sont ici nécessairement rationnels. Maintenant, si les équations

$$\sum a^{(i)}_{s_1, \ldots, s_r} u_1^{s_1} u_2^{s_2} \ldots u_r^{s_r} = 0 \ (p), \tag{2}$$

pour $1 \leqslant i \leqslant m$, $m \geqslant r$, sont indépendantes entre elles, on peut montrer que le système (2) n'admet qu'un nombre fini de solutions $u_1, u_2, \ldots, u_r$ en nombres p-adiques. Par conséquent, dans ce cas le nombre de solutions du système (1) est aussi limité. La méthode permet dans un assez grand nombre de cas de reconnaître s'il y a des solutions ou non, et, dans le cas affirmatif, de déterminer effectivement toutes les solutions par un nombre fini d'opérations. Skolem a ensuite proposé des généralisations dans plusieurs directions. Il a illustré sa méthode par de nombreux résultats particuliers. Cependant il n'a pas poursuivi ses recherches, et ainsi il reste un domaine vaste à explorer.

Il a aussi publié une monographie très appréciée sur la théorie des équations diophantiennes.

Aucune discipline mathématique n'est aussi difficile que celle qui s'occupe des fondements; elle exige une extra-ordinaire puissance d'abstraction. Skolem a joué un rôle très important dans le développement de cette branche des mathématiques. Déjà avant 1915 il avait obtenu des résultats remarquables; entre autres, il a établi les faits suivants : 1° la relativité des notions et des théorèmes de la théorie des ensembles et 2° l'impossibilité de caractériser complètement les notions mathématiques par un nombre fini ou nombre infini dénombrable d'axiomes. Dans ses raisonnements le célèbre théorème de Löwenheim–Skolem joue un rôle essentiel.

Les points de vue de Skolem sur les sciences mathématiques s'accordent avec ceux de Poincaré. Les mathématiques n'existent pas au delà de l'homme, pas indépendamment de l'homme. Nous les créons et nous ne les découvrons pas. Les définitions et les classifications non-prédicatives doivent être défendues. La définition d'un objet mathématique doit être faite par un nombre fini de mots. L'infini est virtuel et non pas actuel.

Après la découverte des antinomies dans la théorie des ensembles, la question suivante s'imposait aux mathématiciens : Comment faire pour établir les mathématiques d'une manière qu'on fût sûr qu'aucun paradoxe ne pût apparaître? On sait que cela a donné lieu à plusieurs essais pour « sauver » les mathématiques. L'essai de Zermelo, tout aussi peu que ceux de Fraenkel, v. Neumann etc., ne donnent aucune assurance. Le programme de Hilbert n'aboutit pas non plus. La théorie de Russell et Whitehead souffre de certaines faiblesses qu'on ne sait pas comment éloigner. Dans l'intuitionisme de Brouwer on a la certitude d'avoir exclu l'apparition de paradoxes; cette théorie est, cependant, si radicale qu'elle ne peut pas être réalisée sans la perte d'une grande partie de l'analyse ordinaire.

L'essai qui promet le plus est sans doute celui de Skolem. Dans un mémoire publié en 1923 il a montré que l'arithmétique ordinaire peut être établie d'une manière finitiste en employant exclusivement des définitions par récurrence et des démonstrations par induction complète sans se servir de quantificateurs. Cela élimine *a priori* toute possibilité d'un paradoxe. L'application du *tertium non datur* peut être évitée. Tous les ensembles seront dénombrables; la théorie des nombres transfinis deviendra une fiction. De plus, Skolem indique comment les fonctions arithmétiques arbitraires peuvent être traitées de la même manière.

L'extension de la théorie de Skolem à l'analyse est possible, mais n'a pas encore été réalisée. La question est seulement de savoir si nous aurons une forme d'analyse qui est plus pauvre et moins effective que l'analyse classique. Skolem était personnellement convaincu que cela n'était pas nécessaire. Des recherches futures vont éclaircir cette question.

Skolem était très deçu du manque d'intérêt parmi les mathématiciens pour les idées finitistes, manque dépendant d'un respect exagéré de l'analyse classique. On se rappelle sa déclaration au Congrès international des mathématiciens dans les U.S.A. en 1950 : «We ought not to regard all that's written in the traditional textbooks as something sacred.» Cependant, ces temps derniers l'intérêt pour « l'arithmétique récursive de Skolem » a sensiblement augmenté.

Comme la plupart des mathématiciens norvégiens Skolem était autodidacte. C'est l'éminent algébriste Ludvig Sylow (1832–1918) qui a eu la plus grande influence sur l'orientation scientifique de Skolem. Les célèbres travaux d'Axel Thue (1863–1922) ont éveillé son intérêt pour les équations diophantiennes.

Skolem s'adonna complètement à sa science qui était pratiquement son seul intérêt. Il ne s'intéressait pas beaucoup à l'enseignement. Pourtant, ses cours, solides et exacts, furent très appréciés par ses élèves. Il n'appartenait pas à ceux qui aiment à briller par l'éloquence dans les conférences.

Personnellement, c'était un homme paisible et modeste qui dédaignait de faire de la réclame pour lui-même. Il était doué d'un naturel très gai et d'un humour rayonnant. La droiture et la noblesse de son caractère et son amabilité naturelle avaient conquis la sympathie de tous ceux qui l'approchaient.

Table des travaux mathématiques de Thoralf Skolem

1. Une méthode énumérative de la géometrie. *Kristiania Vid. Selsk. Skr.* I, 1914 no. 12 (en collab. avec Kr. Birkeland).
2. Om konstitutionen av den identiske kalkuls grupper (Sur la constitution des groupes du calcul identique). *C. R. 3. Skand. Mat. Kongress*, 1913, *Kristiania.*
3. Untersuchungen über einige Klassen kombinatorischer Probleme. *Kristiania Vid. Selsk. Skr.* I, 1917 no. 6.
4. Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalkuls und über Produktations- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen. *Kristiania Vid. Selsk. Skr.* I, 1919 no. 3.
5. Ludvig Sylow og hans videnskabelige arbeider (L.S. et son œuvre scientifique). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 1, Kristiania 1919.
6. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen. *Kristiania Vid. Selsk. Skr.* I, 1920 no. 4.
7. Untersuchungen über die möglichen Verteilungen ganzzahliger Lösungen gewisser Gleichungen. *Kristiania Vid. Selsk. Skr.* I, 1921 no. 17.

8. Bericht über die nachgelassenen Schriften L. Sylows. *Kristiania Vid. Selsk. Skr.* I, 1921 no. 18.
9. Über ganzzahlige Lösungen einer Klasse unbestimmter Gleichungen. *Norsk Mat. Forenings Skrifter*, serie I, nr. 10, Kristiania 1922.
10. Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. *C.R. 5. Skand. Mat. Kongress* 1922, *Helsingfors*.
11. Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich. *Kristiania Vid. Selsk. Skr.* I, 1923 no. 6.
12. Integritätsbereiche in algebraischen Zahlkörpern. *Kristiania Vid. Selsk. Skr.* I, 1923 no. 21.
13. Ein Verfahren zu beliebig angenäherter Bestimmung einer Wurzel einer beliebigen algebraischen Gleichung. *Norsk Mat. Forenings Skrifter*, serie I, nr. 15, Kristiania 1924.
14. Einige Sätze über ganzzahlige Lösungen gewisser Gleichungen und Ungleichungen. *Math. Ann.*, 95, 1925.
15. Über die Dichte der Gitterpunkte in asymptotischen Umgebungen gewisser unendlicher Kurvenzweige. *C.R. 6. Skand. Mat. Kongress* 1925, København.
16. Litt om de viktigste diskussioner i den senere tid angaaende matematikkens grundlag (Discussions recentes sur les fondements de la mathématique). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 8, Oslo 1926.
17. Elliptiske funktioners komplekse multiplikation (La multiplication complexe des fonctions elliptiques.) *Norsk Mat. Tidsskr.*, 8, Oslo 1926.
18. Om en del kombinatoriske problemer (Sur quelques problèmes combinatoriques). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 9, Oslo 1927.
19. Addenda à la seconde édition de Netto : *Lehrbuch der Combinatorik*, Leipzig & Berlin 1927.
20. Zur Theorie der assoziativen Zahlensysteme. *Oslo Vid. Akad. Skr.* I, 1927 no. 12.
21. Über die mathematische Logik. *Norsk Mat. Tidsskr.*, 10, Oslo 1928.
22. Über die Lösung der unbestimmten Gleichung $ax^2+by^2+cz^2=0$ in einigen einfachen Rationalitätsbereichen. *Norsk Mat. Tidsskr.*, 10, Oslo 1928.
23. Geschlechter und Reziprozitätssätze. *Norsk Mat. Forenings Skrifter*, serie I, nr. 18, Oslo 1928.
24. Über einige Grundlagenfragen der Mathematik. *Oslo Vid. Akad. Skr.* I, 1929 no. 4.
25. Über die Grundlagendiskussionen in der Mathematik. *C.R. 7. Skand. Mat. Kongress* 1929, Oslo.
26. Lösung der Gleichung $f(x,y)=0$ in ganzen Zahlen x und y mit beschränktem gemeimsamem Teiler, wenn das Konstantglied fehlt. *Festskrift för A. Wiman*, Uppsala 1930.
27. Lösung gewisser Gleichungssysteme in ganzen Zahlen oder ganzzahligen Polynomen mit beschränktem gemeinschaftlichem Teiler. *Oslo Vid. Akad. Skr.* I, 1929 no. 12.
28. Einige Bemerkungen zu der Abhandlung von E. Zermelo : « Über die Definitheit in der Axiomatik». *Fund. Math.*, 15, Warszawa 1930.
29. Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik. *Oslo Vid. Akad. Skr.* I, 1930 no. 7.
30. Den matematiske logikk og aritmetikken (La logique mathématique et l'arithmétique). *C.R. Chr. Michelsens Inst.* I, no. 2, Bergen 1931.
31. Über einige besondere Tripelsysteme mit Anwendung auf die Reproduktion gewisser Quadratsummen bei Multiplikation. *Norsk Mat. Tidsskr.*, 13, Oslo 1931.
32. Über die symmetrisch allgemeinen Lösungen im Klassenkalkul. *Fund. Math.*, 18, Warszawa 1932.
33. Über die symmetrisch allgemeinen Lösungen im identischen Kalkul. *Oslo Vid. Akad. Skr.* I, 1931 no. 6.
34. En del kombinatoriske undersøkelser samt en enkel bevismetode for kvadratiske resiprositetssatser. (Recherches combinatoriques et démonstration simple de la loi de réciprocité quadratique). *C.R. Chr. Michelsens Inst.* II, no. 2, Bergen 1932.
35. Ein elementares Verfahren zur Herleitung der quadratischen Reziprozitätsgesetze in algebraischen Zahlkörpern. *Oslo Vid. Akad. Skr.* I, 1932 no. 2.
36. Ein einfacher Beweis der sogenannten Zählertransformationsformel der Jacobischen Symbole. *Oslo Vid. Akad. Avh.* I, 1932 no. 11.

37. Ludvig Sylow og hans betydning for matematikken (L. S. et la portée de son œuvre mathématique). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 14, Oslo 1932.
38. Ludvig Sylow und seine wissenschaftlichen Arbeiten. *Norsk Mat. Forenings Skrifter*, serie II, nr. 2, Oslo 1933.
39. Ein allgemeines quadratisches Reziprozitätsgesetz in denjenigen algebraischen Zahlkörpern, worin 2 voll zerfällt. *Comment. Math. Helv.*, 5, 1933.
40. Undersøkelser over potensrester og over logisk karakterisering av tallrekken (Résidus de puissances. L'impossibilité d'une caractérisation de la suite des nombres naturels). *C.R. Chr. Michelsens Inst.* III, no. 4, Bergen 1933.
41. Ein kombinatorischer Satz mit Anwendung auf ein logisches Entscheidungsproblem. *Fund. Math.*, 20, Warszawa 1933.
42. Einige Sätze über gewisse Reihenentwicklungen und exponentiale Beziehungen mit Anwendung auf Diophantische Gleichungen. *Oslo Vid. Akad. Skr.* I, 1933 nr. 6.
43. Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems. *Norsk Mat. Forenings Skrifter*, serie II, nr. 10, Oslo 1933.
44. En metode til behandling av ubestemte ligninger (Une méthode pour traiter les équations indéterminées). *C.R. Chr. Michelsens Inst.* IV, no. 6, Bergen 1934.
45. Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariabeln. *Fund. Math.*, 23, Warszawa 1934.
46. Den matematiske grunnlagforskning (Les recherches sur les fondements des mathématiques). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 16, Oslo 1934.
47. Über die ganzzahlige Lösbarkeit einiger diophantischer Gleichungen. *Oslo Vid. Akad. Skr.* I, 1934 no. 6.
48. Lösung gewisser Gleichungen in ganzen algebraischen Zahlen, insbesondere in Einheiten. *Oslo Vid. Akad. Skr.* I, 1934 no. 10.
49. Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen und diophantischer Gleichungen. *C.R. 8. Skand. Mat. Kongress* 1934, Stockholm.
50. Om heltallig løsbarhet av visse ligninger og ligningssystemer (Résolubilité en nombres entiers de certaines équations et de systèmes d'équations). *C.R. Chr. Michelsens Inst.* V., no. 2, Bergen 1935.
51. Einige Sätze über p-adische Potenzreihen mit Anwendung auf gewisse exponentielle Gleichungen. *Math. Ann.*, 111, 1935.
52. Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke. *Oslo Vid. Akad. Skr.* I, 1935 no. 6.
53. Ein Satz über Zählausdrücke. *Acta Sci. Math. Szeged*, 7, 1935.
54. Ein Satz über die Erfüllbarkeit von einigen Zählausdrücken der Form $(x)(Ey_1, \ldots, y_n)K_1(x, y_1, \ldots, y_n)$ & $(x_1, x_2, x_3)K_2(x_1, x_2, x_3)$. *Oslo Vid. Akad. Avh.* I, 1935 no. 8.
55. Nogen additiv-tallteoretiske betraktninger (Considérations sur la théorie additive des nombres entiers). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 17, Oslo 1935.
56. Über die Zurückführbarkeit einiger durch Rekursionen definierter Relationen auf « arithmetische ». *Acta Sci. Math. Szeged*, 8, 1937.
57. Utvalgte kapitler av den matematiske logikk (Parties choisies de la logique mathématique). *C.R. Chr. Michelsens Inst.* VI, no. 6, Bergen 1936.
58. Eine Bemerkung zum Entscheidungsproblem. *C.R. 8. Congrès Internat. Math.* 1936, Oslo.
59. Einige Reduktionen des Entscheidungsproblems. *Oslo Vid. Akad. Avh.* I, 1936 no. 6.
60. Über gewisse Verbände oder « lattices ». *Oslo Vid. Akad. Avh.* I, 1936 no. 7.
61. Ein Satz über ganzwertige Polynome. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 9, no. 28, Trondheim 1936.
62. Über die Lösbarkeit gewisser linearer Gleichungen im Bereiche der ganzwertigen Polynome. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 9, no. 34, Trondheim 1936.
63. Sätze über ganzwertige Polynome. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 10, no. 4, Trondheim 1937.
64. Ubestemte lineære ligninger og ligningssystemer (Equations linéaires indéterminées et systèmes de telles équations). *C.R. Chr. Michelsens Inst.* VII, no. 3, Bergen 1937.

65. Über die ganzzahlige Lösbarkeit einiger inhomogener quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten. *Oslo Vid. Akad. Avh.* I, 1937 no. 9.
66. Zwei Sätze über kubische Kongruenzen. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 10, no. 24, Trondheim 1937.
67. Anwendung exponentieller Kongruenzen zum Beweis der Unlösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen. *Norske Vid. Akad. Avh. I,* 1936 no. 12, Oslo.
68. Forklaring til foranstående avhandling av L. Kalmár (Commentaire à la note précédente de L. Kalmár). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 19, Oslo 1937.
69. Polynomers aritmetiske egenskaper (Sur les propriétés arithmétiques des polynomes). *C.R. Chr. Michelsens Inst.* VIII, Bergen 1938.
70. Über eine Eigenschaft der Menge aller grössten gemeinsamen Teiler von Polynomen für ganze Werte der Variablen. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 11, no. 16, Trondheim 1938.
71. *Diophantische Gleichungen*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 5, Heft 4, Berlin 1938.
72. Litt om de naturlige talls opspaltning i summen av to kvadrater (Sur la décomposition d'un nombre naturel dans la somme de deux carrés). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 21, Oslo 1939.
73. Litt om polynomers opspaltning i summen av to kvadrater (Sur la décomposition d'un polynome dans la somme de deux carrés). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 21, Oslo 1939.
74. Eine Bemerkung über die Induktionsschemata in der rekursiven Zahlentheorie. *Monatsh. Math. Phys.*, 48, Leipzig und Wien 1939.
75. Eine Bemerkung über gewisse Ringe mit Anwendung auf die Produktzerlegung von Polynomen. *Norsk Mat. Tidsskr.*, 21, Oslo 1939.
76. Über die Lösbarkeit der Gleichung $f_1(x)F_1(x) + \ldots + f_n(x)F_n(x) = 1$, wo $f_1, \ldots, f_n$ gegebene ganzzahlige Polynome sind, in ganzzahligen Polynomen $F_1, \ldots, F_n$. *Norske Vidensk. Selsk. Forh.*, 12, no. 1, Trondheim 1939.
77. Om funksjonene av formen $\sum_{i=0}^{m-1} f_i(x)P_m(x-i)$ hvor alle $f_i(x)$ er polynomer og $P_m(x) = 1$ eller 0 eftersom $x \equiv 0$ eller $\not\equiv 0 \pmod{m}$ (Sur les fonctions de la forme ... où les $f_i(x)$ sont des polynomes et où $P_m(x) = 1$ ou selon que $x \equiv 0$ ou $\not\equiv 0 \pmod{m}$). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 22, Oslo 1940.
78. En liten studie i transfinit mekanikk (Remarque sur une mécanique transfinite). *Norsk Mat. Tidskr.*, 22, Oslo 1940.
79. Einige Sätze über Polynome. *Norske Vid. Akad. Avh.* I, 1940 no. 4, Oslo .
80. Nogen bemerkninger til L. Reitans artikler (Sur un problème de la théorie des nombres). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 22, Oslo 1940.
81. Verallgemeinerungen der Betti–Guidiceschen Formel. *Norske Vid. Akad. Avh.* I, 1940 no. 1, Oslo.
82. Einfacher Beweis der Unmöglichkeit eines allgemeinen Lösungsverfahrens für arithmetische Probleme. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 13, Trondheim 1940.
83. Sur la portée du théorème de Löwenheim–Skolem. *Les Entretiens de Zürich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6–8 Déc. 1938,* Zürich 1941.
84. Om ortogonalt beliggende gitterpunkter på kuleflater (Les résaux orthogonaux sur la surface d'une sphère). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 23, Oslo 1941.
85. Die Anzal der Wurzeln der Kongruenz $x^3 + ax + b \equiv 0 \pmod{p}$ für die verschiedenen Paare (a, b). *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 15, no. 43, Trondheim 1942.
86. Über die ganzen x, für welche ein Polynom $P(u_x, u_{x+1}, \ldots, u_{x+n}) = 0$ ist, wenn u_x eine gegebene lineare rekurrente Gleichung befriedigt. *Norske Vid. Akad. Avh.* I, 1941 no. 15, Oslo.
87. Unlösbarkeit von Gleichungen, deren entsprechende Kongruenz für jeden Modul lösbar ist. *Norske Vid. Akad. Avh.* I, 1942 no. 4, Oslo.
88. En sammenheng mellom kongruensen $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \equiv 0 \pmod{m}$ og likningen $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = m$ (La relation entre la congruence $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \equiv 0 \pmod{m}$ et l'équation $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = m$). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 25, Oslo 1943.
89. Noen bemerkninger til foranstående artikkel av E. Hoff-Hansen (Remarques à la note précédente de E. Hoff-Hansen). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 25, Oslo 1943.
90. Über Nebenkörper und Nebenringe. *Norske Vid. Akad. Skr.* I, 1944 no. 6, Oslo.

91. Utvidelser av et par setninger av C. Störmer (Extensions de quelques théorèmes de C. Störmer). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 26, Oslo 1944.
92. Remarks on recursive functions and relations. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 17, no. 22, Trondheim 1944.
93. Some remarks on recursive arithmetic. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 17, no. 26, Trondheim 1944.
94. A note on recursive arithmetic. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 17, no. 27, Trondheim 1944.
95. Some remarks on the comparison between recursive functions. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 17, nr. 32, Trondheim 1944.
96. A theorem on the equation $\zeta^2 - \delta\eta^2 = 1$ where δ, ζ, η are integers in an imaginary quadratic field. *Norske Vid. Akad. Avh.* I, 1945 no. 1, Oslo.
97. A remark on the equation $\zeta^2 - \delta\eta^2 = 1$, where δ, ζ, η belong to a total real number field. *Norske Vid. Akad. Avh.* I, 1945 no. 12, Oslo.
98. En løsningsmetode for den eksponentielle likning $A_1^{x_1} \dots A_m^{x_m} - B_1^{y_1} \dots B_n^{y_n} = C$. (Une méthode pour résoudre l'équation exponentielle ...). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 27, Oslo 1945.
99. On certain exponential equations. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 18, no. 18, Trondheim 1945.
100. On the prime divisors of the values of certain functions. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 18, no. 19, Trondheim 1945.
101. Den rekursive aritmetik (L'arithmétique récursive). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 28, Oslo 1946.
102. The development of recursive arithmetic. *C.R. 10. Skand. Mat. Kongress*, 1946, København.
103. A proof of the algebraic independence of e and $e^{\sqrt{-d}}$, d positive integer, with another proof of the irrationality of log x and arctg x for rational x. *Norsk Mat. Tidsskr.*, 28, Oslo 1946.
104. On the existence of a multiplicative basis for an arbitrary algebraic field. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 20, no. 2, Trondheim 1947.
105. A proof of the algebraic independence of certain values of the exponential function. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 19, no. 12, Trondheim 1947.
106. De ikke-symmetriske funksjoner i algebraen (Les fonctions non-symétriques dans l'Algèbre). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 29, Oslo 1947.
107. Solutions of the equation $axy + bx + cy + d = 0$ in algebraic integers. *Norske Vid. Akad. Avh.* I, 1946 no. 3, Oslo.
108. En egenskap ved de ternære kvadratiske former og dens sammenheng med den kvadratiske resiprositetssats (Une propriété des formes ternaires quadratiques et sa liaison avec la loi de réciprocité quadratique). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 30, Oslo 1948.
109. Two generalizations of a well-known theorem on polynomials. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 20, no. 19 & 20, Trondheim 1948.
110. A proof of the irreducibility of the cyclotomic equation. *Norsk Mat. Tidsskr.*, 31, Oslo 1949.
111. Remarks on the representation of natural numbers as sums of three or four squares. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 21, no. 39, Trondheim 1949.
112. Proof of a theorem on 3-lattices. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 21, no. 44, Trondheim 1949.
113. On the diophantine equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = 0$. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 21, no. 19, Trondheim 1949.
114. Some theorems on irrationality and linear independence. *C.R. 11. Skand. Mat. Kongress* 1949, Trondheim.
115. De logiske paradokser og botemidlene mot dem (Les paradoxes logiques et les remèdes contre ceux-ci). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 32, Oslo 1950.
116. Some remarks on the foundation of set theory. *Proc. Internat. Congress Math.* 1950, Cambridge, Mass.
117. A remark on the induction scheme. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 22, no. 36, Trondheim 1950.
118. An arithmetical property of the function $\Sigma \dots$ where the p_i are natural primes and the $\varkappa(n)$ polynomials with integral coefficients. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 22, no. 39, Trondheim 1950.
119. Bemerkninger angående den ubestemte ligning $xy + yz + zx = k$, k hel positiv, samt de analoge med

flere ukjente (Remarques sur l'équation indéterminée $xy+yz+zx=k$, k nombre naturel et sur des équations analogues à plusieurs inconnues). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 33, Oslo 1951.

120. On the abscissa of convergence for some Dirichlet's series. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 24, no. 11, Trondheim 1952.
121. On the proof of independence of the axioms of the classical sentential calculus. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 24, no. 6, Trondheim 1952.
122. Some remarks on semi-groups. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 24 no. 9, Trondheim 1952.
123. Theorems of divisibility in some semi-groups. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 24, no. 10, Trondheim 1952.
124. A simple proof on the condition of solvability of the diophantine equation $ax^2+by^2+cz^2=0$. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 24, no. 23, Trondheim 1952.
125. Theory of divisibility in some commutative semi-groups. *Norsk Mat. Tidsskr.*, 33, Oslo 1951.
126. Eksistensen av en n^{te} ikke-potensrest mod p mindre enn p (Sur l'existence d'un non-résidu n-ième $<p$ modulo p). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 33, Oslo 1951.
127. Et enkelt bevis for løsbarhetsbetingelsen for den diofantiske ligning $ax^2+by^2+cz^2=0$ (Démonstration simple de la condition pour la résolubilité de l'équation diophantienne $ax^2+by^2+cz^2=0$). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 33, Oslo 1951.
128. The general congruence of the 4th degree modulo p, p prime. *Norsk Mat. Tidsskr.*, 34, Oslo 1952.
129. On a certain connection between the discriminent of a polynomial and the number of its irreducible factors mod p. *Norsk Mat. Tidsskr.*, 34, Oslo 1952.
130. A remark on a set theory based on positive logic. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 25, no. 22, Trondheim 1953.
131. Anvendelse av 3-adisk analyse og « bikropper » til bevis for noen satser angående visse kubiske ubestemte ligninger (Appliquation de l'analyse 3-adique à la démonstration de quelques théorèmes sur les équations cubiques indéterminées). *Norsk Mat. Tidsskr.*, 34, Oslo 1952.
132. A theorem on some semi-groups. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 25, no. 18, Trondheim 1953.
133. Sobre la naturaleza del razonaniento matematico. *Publ. del Instituto de mat. « Jorge Juan », Gaceta Matemática* I, 4, Madrid 1952.
134. Considerationes sobre los fundamentos de la matematica. *Rev. Mat. Hisp.-Amer.* (4), 12 (1952) et 13 (1953), Madrid.
135. On the diophantine equation $ax^2+by^2+cz^2=0$. *Rend. Mat. e Appl.* V, 11, Roma 1952.
136. The logical background of arithmetic. *Bull. Soc. Math. Belg.*, 6, 1953.
137. Resultater i grundlagsforskningen (Résultats dans les recherches sur les fondements de la mathématique). *C.R. 12. Skand. Matem. Kongress* 1953, Lund.
138. Some considerations concerning recursive functions. *Math. Scand.*, 1, København 1953.
139. Einige Bemerkungen über die Auffindung der rationalen Punkte auf gewissen algebraischen Gebilden. *Math. Z.*, 63, 1955.
140. Una exposicion de la teoria de los numeros algebraicos. *Mem. Mat. Inst. « Jorge Juan »*, 14, Madrid 1954.
141. Remarks on « Elementary » arithmetic functions. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 27, no. 6, Trondheim 1954.
142. On the least odd positive quadratic non-residue modulo p. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 27, no. 20, Trondheim 1954.
143. A critical remark on foundational research. *Proc. Internat. Congress Math.* 1954, Amsterdam.
144. Some considerations concerning recursive arithmetic. *Bull. Soc. Math. Belg.*, 6, 1954.
145. Peano's axioms and models of arithmetic. Studies in logic and the foundations of mathematics. Part of the publication « *Mathematical interpretation of formal systems* », Amsterdam 1955.
146. A critical remark on foundational research. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 28, no. 20, Trondheim 1955.
147. On the number of solutions of some algebraic congruences modulo p, p prime. *Festskrift til B. Helland-Hansen*, Bergen 1955.
148. The use of p-adic method in the theory of diophantine equations. *Bull. Soc. Math. Belg.*, 7, 1955.
149. On relative Pell's equation. *Bull. Soc. Math. Belg.*, 7, 1955.

150. The logical nature of arithmetic. *Synthese, 9*, Bussum 1955.
151. The abundance of arithmetic functions satisfying some simple functional equation. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 29, no. 11, Trondheim 1956.
152. A version of the proof of equivalence between complete induction and the uniquences of primitive recursion. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 29, no. 3, Trondheim 1956.
153. An ordered set of arithmetic functions representing the least ε-number. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 29, no. 12, Trondheim 1956.
154. Two remarks on set theory. *Math. Scand.*, 5, København 1957.
155. On certain distributions of integers in pairs with given differences. *Math. Scand.*, 5, København 1957.
156. Über einige Eigenschaften der Zahlenmengen $[\alpha n+\beta]$ bei irrationalem α mit einleitenden Bemerkungen über einige kombinatorische Probleme. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 30, no. 19, Trondheim 1957.
157. Bemerkungen zum Komprehensionsaxiom. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 3, Berlin 1957.
158. Une relativisation des notions mathématiques fondamentales. *Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, 70, Paris 1958.
159. Some remarks on the construction of functions by substitution. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 32, no. 8, Trondheim 1959.
160. A simple proof of a theorem concerning diophantine approximations. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 32, no. 24, Trondheim 1959.
161. The Diophantine equation $2^{n+2}-7=x^2$ and related problems (together with Chowla and Lewis). *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10, 1959.
162. A proof of the quadratic law of reciprocity with proofs of two so-called Ergänzungssätze. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 34, no. 4, Trondheim 1961.
163. On some combinatorial problems. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, 34, no. 12, Trondheim 1961.
164. Remarks on the connection between intuitionistic logic and a certain class of lattices. *Math. Scand.*, 6, København 1958.
165. Some remarks on the triple systems of Steiner. *Math. Scand.*, 6, København 1958.
166. A new version of some considerations of A. Thue. *Math. Scand.*, 8, København 1960.
167. A set theory based on a certain 3-valued logic. *Math. Scand.*, 8, København 1960.
168. Remarks on proofs by cyclotomic formulas of reciprocity laws for power residues. *Math. Scand.*, 9, København 1961.
169. Reduction of axiom systems with axiom schemes to systems with only simple axioms. *Dialectica*, 12, Neuchâtel 1958.
170. Interpretation of mathematical theories in the first order predicate calculus. *Public. in honour of A. Fraenkel*, 1961.
171. Investigations on a comprehensionaxiom without negation in the defining propositional functions. *Notre Dame Journal of formal logic*, 1, South Bend 1960.
172. Proof of some theorems on recursively enumerable sets. *Notre Dame Journal of formal logic*, 3, South Bend 1962.

Il faut y ajouter que Skolem a redigé la partie mathématique du livre de Kristian Birkeland: *The norwegian Aurora Polaris Expedition* 1902–1903, Vol. I, Section 2, Kristiania 1914.

Encore, il a publié, en collab. avec Kristian Birkeland, deux notes sur la lumière zodiacale dans le tome 159 (p. 464 et p. 495) des *Comptes Rendus de l'Acad. d. Sciences*, Paris 1914.