

# UN THEOREME SUR LES GROUPES D'HOLONOMIE\*

KATSUMI NOMIZU

1. MM. Ozeki et Hano ont récemment démontré [3] que tout sous-groupe connexe de Lie du groupe linéaire  $GL(n, R)$ ,  $n \geq 2$ , peut être réalisé comme groupe d'holonomie d'une certaine connexion linéaire dans un espace affine de dimension  $n$ .

On se propose ici de donner une généralisation de ce résultat au cas de connexions infinitésimales dans une variété fibrée différentiable. On établit :

**THÉORÈME.** *Soit  $P(B, G)$  une variété fibrée principale à base  $B$  de dimension  $\geq 2$  et à groupe structural de Lie  $G$ . Si le groupe structural  $G$  peut être réduit à un sous-groupe connexe de Lie  $H$ , alors il existe dans  $P$  une connexion infinitésimale dont le groupe d'holonomie restreint est exactement  $H$  (au choix convenable d'un point de référence dans  $P$ ).*

Ce théorème complète aussi le résultat suivant : si  $H$  est le groupe d'holonomie d'une connexion infinitésimale dans  $P(B, G)$ , alors le groupe structural  $G$  peut être réduit à  $H$  (Proposition, p. 37 [1], voir aussi [2]).

**COROLLAIRE.** *Tout groupe connexe de Lie  $G$  peut être réalisé comme groupe d'holonomie restreint d'une certaine connexion infinitésimale dans une variété fibrée principale à base variété quelconque de dimension  $\geq 2$ .*

En effet, étant donnée une variété différentiable quelconque  $B$ , il suffit de considérer la variété fibrée principale  $P = B \times G$ , produit direct.

2. Avant d'entrer dans la démonstration du théorème, il est utile de faire deux remarques suivantes sur les connexions infinitésimales dans une variété fibrée principale  $P(B, G)$ .

**Réduction du groupe structural.** On dit que le groupe structural  $G$  peut être réduit à un sous-groupe de Lie  $H$ , s'il existe une variété fibrée principale

---

Received December 20, 1955.

\* Ce travail a été accompli pendant que l'auteur était boursier de la Fondation Yukawa.

$Q(B, H)$ , à base  $B$  et à groupe structural  $H$ , munie d'un isomorphisme différentiable  $f$  de  $Q$  dans  $P$ , c'est-à-dire, une application différentiable biunivoque  $f$  de  $Q$  dans  $P$  telle que l'on ait  $f(xa) = f(x)a$  et  $\pi(f(x)) = \pi(x)$  pour tout  $x \in B$  et pour tout  $a \in H$  ( $\pi$  désignant la projection canonique de  $Q$  sur  $B$  et celle de  $P$  sur  $B$ ).

*On sait [2] que, dans ce cas-là, une connexion infinitésimale quelconque  $\Gamma$  dans  $Q$  induit une connexion infinitésimale dans  $P$  dont le groupe d'holonomie est égal à celui de  $\Gamma$ .*

**Prolongement d'une connexion infinitésimale locale.** Soit  $U$  un ouvert de  $B$ . Une connexion infinitésimale locale sur  $U$  est, par définition, une connexion infinitésimale dans  $\pi^{-1}(U)$ , partie de  $P$  sur  $U$ , qui est une variété fibrée principale d'une façon naturelle.

En tenant compte de la démonstration (p. 40, [1]) de l'existence de connexions infinitésimales et en utilisant le théorème bien connu (p. 25, [4]) sur le prolongement de sections locales dans une variété fibrée différentiable dont la fibre est homéomorphe à un espace numérique, on obtiendra : *Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $B$  tels que  $\bar{V} \subset U$ . Etant donnée une connexion infinitésimale locale  $\Gamma$  sur  $U$ , il existe dans  $P$  une connexion infinitésimale qui coïncide avec  $\Gamma$  dans  $\pi^{-1}(V)$ .*

**3.** La démonstration du théorème s'achève comme suit. En vertu de la première remarque dans **2**, il suffit d'établir l'existence d'une connexion infinitésimale dans  $P$  dont le groupe d'holonomie restreint est égal à  $G$ .

Pour cela, soit  $U$  un ouvert de  $B$  tel que  $\pi^{-1}(U)$  soit isomorphe au produit direct  $U \times G$ . On supposera que  $U$  est un voisinage d'un point  $p$  avec un système de coordonnées  $x^1, x^2, \dots, x^n, n \geq 2$ , pour lesquelles  $U = \{(x^i) ; |x^i| < \alpha\}$ ,  $\alpha > 0$ , et  $x^i(p) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ . Soit  $V = \{(x^i) ; |x^i| < \beta\}$ , où  $0 < \beta < \alpha$ . On va construire une connexion infinitésimale locale  $\Gamma$  sur  $U$  telle que le groupe d'holonomie de la connexion induite sur  $V$  soit égal à  $G$ ; cela fait, on n'a qu'à prolonger  $\Gamma$  de la manière indiquée dans **2**.

Enfin, on se trouve dans le cas suivant :  $P$  est le produit direct  $U \times G$ , où  $U = \{(x^i) ; |x^i| < \alpha\}$ . Pour  $V = \{(x^i) ; |x^i| < \beta\}$ , où  $\beta < \alpha$ , il s'agit de construire une connexion infinitésimale dans  $P$  telle que le groupe d'holonomie de la connexion induite dans  $V \times G$  soit égal à  $G$ . C'est là la question essentiellement

résolue dans [3]. Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie du groupe  $G$  et soit  $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$  une base de  $\mathfrak{g}$ . Pour  $r$  nombres  $a_1, \dots, a_r$  tels que  $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_r < \beta$ , soient  $f_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , des fonctions différentiables dans  $-\alpha - \varepsilon < t < \alpha + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , qui satisfont aux conditions

$$df_i/dt \begin{cases} = 0 & \text{pour } t = a_j, j \neq i \\ = c_i \neq 0 & \text{pour } t = a_i. \end{cases}$$

On définit une connexion infinitésimale dans  $P = U \times G$  au moyen de la forme de connexion  $\omega$  qui est complètement déterminée par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \omega_{(x,e)}(X_1) &= \sum_{k=1}^r f_k(x^2) A_k \\ \omega_{(x,e)}(X_i) &= 0, \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

où  $X_i$  sont les champs de vecteurs sur  $U \times G$  qui sont la différentiation partielle par rapport à  $x^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

En choisissant le point  $(p, e) \in V \in G$ ,  $p = (0, 0, \dots, 0)$ , comme point de référence, on voit, tout à fait à la même manière que [3], que le groupe d'holonmie de la connexion induite sur  $V \times G$  est égal à  $G$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Ehresmann, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950.
- [2] K. Nomizu, Reduction theorem for connections and its application to the problem of isotropy and holonomy groups of a Riemannian manifold, Nagoya Math. Journ. **9** (1955), pp. 57-66.
- [3] H. Ozeki et J. Hano, On the holonomy groups of linear connections, à ce journal.
- [4] N. Steenrod, The topology of fiber bundles, Princeton, 1951.

*Institut de Mathématiques*  
*Université de Nagoya*

