

RELEVEMENTS DES STRUCTURES SYMPLECTIQUES ET PSEUDO-RIEMANNIENNES À DES VARIÉTÉS DE POINTS PROCHES

EUGÈNE OKASSA

On considère une variété différentielle M , paracompacte de classe C^∞ . Etant donné une algèbre locale A (algèbre commutative unitaire de dimension finie sur $\mathbb{R}$ dont l'idéal maximal m est de codimension 1 sur $\mathbb{R}$), on rappelle qu'un point proche de $x \in M$ d'espèce A est un homomorphisme d'algèbres ξ de $C^\infty(M)$ [algèbre des fonctions numériques de classe C^∞ sur M] dans A tel que $\xi(f) \equiv f(x) \pmod{m}$ pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ [9]. En notant M_x^A l'ensemble des points proches de x d'espèce A , $M^A = \bigcup_{x \in M} M_x^A$ est une variété différentielle de dimension $n \times \dim A$ où $n = \dim M$. Si $A = \mathbb{R}[T_1, \dots, T_s]/(T_1, \dots, T_s)^{k+1}$, la variété M^A s'identifie à la variété des jets, $J_0^k(\mathbb{R}^s, M)$, des applications différentiables de classe C^∞ de $\mathbb{R}^s$ dans M ayant $0 \in \mathbb{R}^s$ pour source.

Si f est une fonction de classe C^∞ sur M , $f^A: M^A \rightarrow A$ est définie par $f^A(\xi) = \xi(f)$ pour tout $\xi \in M^A$.

§ 1. Relèvement des formes différentielles

On désigne par $\Omega(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega^p(M)$ le $C^\infty(M)$ -module gradué des formes différentielles sur M et $\mathfrak{X}(M)$ le $C^\infty(M)$ -module des champs de vecteurs sur M .

PROPOSITION 1. *Etant donné une forme différentielle ω de degré p sur M , il existe une forme différentielle de degré p et une seule ω^A sur M^A à valeurs dans A telle que*

$$\omega^A(a_1 X_1^A, a_2 X_2^A, \dots, a_p X_p^A) = a_1 \cdots a_p [\omega(X_1, \dots, X_p)]^A$$

pour tous $a_1, \dots, a_p$ dans A et $X_1, \dots, X_p$ dans $\mathfrak{X}(M)$; X^A désigne le prolongement à M^A du champ de vecteurs X sur M .

Démonstration. En chaque point $\xi \in M^A$, les $a.X^A(\xi)$, où $a \in A$ et

Received March 29, 1988.

$X \in \mathfrak{X}(M)$, engendrent l'espace $T_i M^A$. Il s'ensuit donc que ω^A est unique. Quant à l'existence, elle est immédiate.

Lorsque $\varphi \in A^*$ est une forme linéaire sur A et ω une forme différentielle sur M , on dira que la forme scalaire $\varphi \circ \omega^A$ est une relevée de ω à M^A . Si ω est une forme différentielle de degré p sur M , si $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une base de A et $(F_\alpha^*)_{\alpha \in I}$ la base duale, on a :

$$(\varphi \circ \omega^A)(a_1 X_1^A, a_2 X_2^A, \dots, a_p X_p^A) = \sum_{\alpha \in I} \varphi(a_1 \dots a_p F_\alpha) F_\alpha^* \circ [\omega(X_1, \dots, X_p)]^A.$$

EXEMPLE. $M = \mathbb{R}^n$; $A = \mathbb{D}$ l'algèbre des nombres duaux. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ le système de coordonnées canonique sur $\mathbb{R}^n$, $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées sur la fibre de $M^D = T\mathbb{R} = \mathbb{R}^{2n}$. Soit $(1, \varepsilon)$ une base de $\mathbb{D}$ avec $\varepsilon^2 = 0$ et $(1^*, \varepsilon^*)$ la base duale. Si $\omega = \sum_{i=1}^n P_i dx_i$ est une forme différentielle de degré 1 sur $\mathbb{R}^n$, alors on a ;

$$\omega^D = 1 \otimes \left(\sum_{i=1}^n P_i dx_i \right) + \varepsilon \otimes \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \right) dx_i + \sum_{i=1}^n P_i dy_i \right]$$

$$1^* \circ \omega^D = \sum_{i=1}^n P_i dx_i$$

$$\varepsilon^* \circ \omega^D = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \right) dx_i + \sum_{i=1}^n P_i dy_i$$

Propriétés.

- i) $(\omega_1 + \omega_2)^A = \omega_1^A + \omega_2^A$ pour tous ω_1 et ω_2 dans $\Omega(M)$
- ii) $(\omega_1 \wedge \omega_2)^A = \omega_1^A \wedge \omega_2^A$ pour tous ω_1 et ω_2 dans $\Omega(M)$
- iii) $d(\omega^A) = (d\omega)^A$ pour tout $\omega \in \Omega(M)$: d est l'opérateur de différentiation extérieure.

iv) Pour tout champ de vecteurs X sur M , pour tout $\omega \in \Omega(M)$, et pour tout $a \in A$, on a: $\theta_{aX^A}(\omega^A) = a(\theta_X \omega)^A$ où θ_X est la dérivée de Lie par rapport au champ de vecteurs X .

v) Pour toute dérivation δ de A et pour tout $\omega \in \Omega(M)$, on a: $\theta_{\delta_M} \omega^A = -\delta \circ \omega^A$ où δ_M est le champ de vecteurs sur M^A associé à la dérivation δ [5].

On désigne par $\mu_A: A \times A \rightarrow A$ la multiplication dans A .

PROPOSITION 2. Soit (M, ω) une variété symplectique. Etant donné $\varphi \in A^*$, on a $\text{rang}(\varphi \circ \omega^A) = \text{rang}(\varphi \circ \mu_A) \times \dim M$.

Démonstration. En chaque point $\xi \in M^A$, montrons que le noyau de $(\varphi \circ \omega^A)(\xi)$ est $\ker(\varphi \circ \mu_A) \cdot T_\xi M^A$.

Soit ξ un point proche de $x_0 \in M$ d'espèce A . On suppose $\dim M = 2n$. Soit $(x_1, \dots, x_{2n})$ un système de coordonnées locales dans un voisinage U de x_0 tel que $\omega/U(\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_{i+n}) = 1$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ et $\omega/U(\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j) = 0$ pour $j \neq i + n$. On considère $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ une base de A et $(a_\alpha^*)_{\alpha \in I}$ la base duale. Soit $X = \sum_{\substack{i=1,2,\dots,2n \\ \alpha \in I}} \lambda_{i\alpha} a_\alpha (\partial/\partial x_i)^A(\xi)$ un vecteur de $T_\xi M^A$ tel que $(\varphi \circ \omega^A)(\xi)(X, Y) = 0$ pour tout $Y \in T_\xi M^A$. On a donc

$$\sum_{\substack{i=1,2,\dots,2n \\ \alpha \in I}} \lambda_{i\alpha} (\varphi \circ \omega^A)(\xi) \left(a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^A(\xi), b \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^A(\xi) \right) = 0$$

pour tout $b \in A$ et pour tout $j = 1, 2, \dots, 2n$. On déduit que

$$\sum_{\substack{i=1,2,\dots,2n \\ \alpha \in I; \beta \in I}} \lambda_{i\alpha} \varphi(a_\alpha a_\beta b) a_\beta^* \left[\xi \left(\frac{\omega}{U} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right) \right] = 0 \text{ pour tout } j = 1, 2, \dots, 2n.$$

Pour $j = 1, 2, \dots, n$ on a $\sum_{\alpha \in I} \lambda_{j+n} \varphi(a_\alpha b) = 0$ pour tout $b \in A$. D'où $\sum_{\alpha \in I} \lambda_{j+n} a_\alpha$ est un élément de $\ker(\varphi \circ \mu_A)$. Pour $j = n+1, n+2, \dots, 2n$, $\sum_{\alpha \in I} \lambda_{i\alpha} a_\alpha$ est un élément de $\ker(\varphi \circ \mu_A)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. On conclut donc que $\sum_{\alpha \in I} \lambda_{k\alpha} a_\alpha$ appartient à $\ker(\varphi \circ \mu_A)$ pour $k = 1, 2, \dots, 2n$. On déduit donc que $X \in \ker(\varphi \circ \mu_A) \cdot T_\xi M^A$.

Inversement, soit Z un élément de $\ker(\varphi \circ \mu_A) \cdot T_\xi M^A$. On écrit

$$Z = \sum_{\sigma \in \text{fini}} f_\sigma V_\sigma \text{ où } f_\sigma \in \ker(\varphi \circ \mu_A) \text{ et } V_\sigma \in T_\xi M^A.$$

On a donc

$$Z = \sum_{\substack{i=1,2,\dots,2n \\ \alpha \in I; \sigma \in \text{fini}}} \lambda_{i\alpha}^\sigma f_\sigma a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^A(\xi).$$

Pour tout β dans I et pour $j = 1, 2, \dots, n$ alors

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \omega^A)(\xi) \left(Z, a_\beta \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^A(\xi) \right) &= \sum_{\substack{i=1,2,\dots,2n \\ \alpha, \gamma \in I; \sigma \in \text{fini}}} \lambda_{i\alpha}^\sigma \varphi(f_\sigma a_\alpha a_\beta a_\gamma^*) a_\gamma^* \left[\xi \left(\omega/U \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right) \right] \\ &= \sum_{\substack{\alpha, \gamma \\ \sigma \in \text{fini}}} \lambda_{j+n, \alpha}^\sigma \varphi(f_\sigma a_\alpha a_\beta). \end{aligned}$$

Comme $f_\sigma \in \ker(\varphi \circ \mu_A)$, on a

$$(\varphi \circ \omega^A)(\xi) \left(Z, a_\beta \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^A(\xi) \right) = 0 \text{ pour } j = 1, 2, \dots, n.$$

De la même façon, on a

$$(\varphi \circ \omega^A)(\xi) \left(Z, a_\beta \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^A(\xi) \right) = 0 \text{ pour } j = n+1, n+2, \dots, 2n.$$

On conclut que $(\varphi \circ \omega^A)(\xi)(Z, Y) = 0$ pour tout $Y \in T_\xi M^A$. Etant donné un idéal I de A , on a $\dim(I \cdot T_\xi M^A) = \dim(I) \times \dim M$ [6]. Comme $\ker(\varphi \circ \mu_A)$ est un idéal de A , alors $\text{rang}(\varphi \circ \omega^A) = \text{rang}(\varphi \circ \mu_A) \times \dim M$. $\square$

LEMME. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal de A et $\text{ann}(\mathfrak{m})$ l'annulateur de $\mathfrak{m}$. Il existe une forme linéaire φ sur A telle que la forme bilinéaire symétrique $\varphi \circ \mu_A: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ soit non-dégénérée si et seulement si $\dim[\text{ann}(\mathfrak{m})] = 1$.

Démonstration.

Condition nécessaire. Désignons par $\pi: A \rightarrow \mathbb{R}$ l'augmentation. Soit $\varphi \in A^*$ une forme linéaire sur A telle que $\varphi \circ \mu_A$ soit non-dégénérée et $a \in \text{ann}(\mathfrak{m})$. Supposons $\varphi(a) = 0$. Pour tout $b \in A$, $ab = a \cdot \pi(b)$. D'où $\varphi(ab) = \pi(b)\varphi(a) = 0$ pour tout $b \in A$. Comme $\varphi \circ \mu_A$ est non-dégénérée alors $a = 0$. Ainsi la restriction de φ à $\text{ann}(\mathfrak{m})$ est injective: d'où $\dim[\text{ann}(\mathfrak{m})] = 1$.

Condition suffisante. On suppose $\dim[\text{ann}(\mathfrak{m})] = 1$. Soit ε une base de $\text{ann}(\mathfrak{m})$ et $\varphi \in A^*$ une forme linéaire sur A telle que $\varphi[\text{ann}(\mathfrak{m})] \neq 0$. On note h la hauteur de A : ($\mathfrak{m}^h \neq (0)$ et $\mathfrak{m}^{h+1} = (0)$). La suite croissante d'idéaux

$$\mathfrak{m}^h \subset \mathfrak{m}^{h-1} \subset \mathfrak{m}^{h-2} \subset \dots \subset \mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{m}$$

induit la suite décroissante

$$\mathfrak{m} = \text{ann}(\mathfrak{m}^h) \supset \text{ann}(\mathfrak{m}^{h-1}) \supset \text{ann}(\mathfrak{m}^{h-2}) \supset \dots \supset \text{ann}(\mathfrak{m}^2) \supset \text{ann}(\mathfrak{m}).$$

Soit $a \in A$ tel que $\varphi(ab) = 0$ pour tout b dans A .

1er cas: $b = \varepsilon$ base de $\text{ann}(\mathfrak{m})$.

On a $0 = \varphi(a\varepsilon) = \varphi(\pi(a) \cdot \varepsilon) = \pi(a)\varphi(\varepsilon)$. Comme $\varphi(\varepsilon) \neq 0$, alors $\pi(a) = 0$. Donc $a \in \mathfrak{m}$.

2e cas: $b \in \mathfrak{m}^{h-1}$ avec $a \in \mathfrak{m}$.

Ainsi $ab \in \mathfrak{m}^h = \text{ann}(\mathfrak{m})$. On déduit que $ab = \lambda\varepsilon$. Comme $\varphi(ab) = 0$, alors $ab = 0$ pour tout $b \in \mathfrak{m}^{h-1}$. Donc $a \in \text{ann}(\mathfrak{m}^{h-1})$.

3e cas: $b \in \mathfrak{m}^{h-2}$ avec $a \in \text{ann}(\mathfrak{m}^{h-1})$.

Pour tout $c \in \mathfrak{m}$, $(ab)c = a(bc)$. Puisque $b \in \mathfrak{m}^{h-2}$ et $c \in \mathfrak{m}$, alors $bc \in \mathfrak{m}^{h-1}$. Comme $a \in \text{ann}(\mathfrak{m}^{h-1})$, on conclut que $(ab)c = 0$ pour tout $c \in \mathfrak{m}$; donc $ab \in \text{ann}(\mathfrak{m})$. Ainsi, $ab = \lambda\varepsilon$ et $\varphi(ab) = 0$ pour tout $b \in \mathfrak{m}^{h-2}$. On a

donc $ab = 0$ pour tout $b \in \mathfrak{m}^{h-2}$. D'où $a \in \text{ann}(\mathfrak{m}^{h-2})$.

Supposons $b \in \mathfrak{m}^{h-i-1}$ avec $a \in \text{ann}(\mathfrak{m}^{h-i})$. Pour tout $c \in \mathfrak{m}$, $(ab)c = a(bc) = 0$. Ainsi $ab \in \text{ann}(\mathfrak{m})$. Comme $\varphi(ab) = 0$ alors $ab = 0$ pour tout $b \in \mathfrak{m}^{h-i-1}$. D'où $a \in \text{ann}(\mathfrak{m}^{h-i-1})$. Lorsque $i = h - 2$, on a $a \in \text{ann}(\mathfrak{m})$. Puisque $\varphi(a) = 0$ alors $a = 0$. La forme bilinéaire symétrique $\varphi \circ \mu_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ est donc non-dégénérée. $\square$

Remarque. Lorsque $\dim[\text{ann}(\mathfrak{m})] = 1$, les seules formes $\varphi \in A^*$ telles que $\varphi \circ \mu_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ soient non-dégénérées sont celles qui ne s'annulent pas sur $\text{ann}(\mathfrak{m})$.

EXEMPLE. Les algèbres locales

$$\mathbb{R}[T]/(T^k); \mathbb{R}[T_1, \dots, T_s]/(T_1^{k_1}, T_2^{k_2}, \dots, T_s^{k_s})$$

avec $k \geq 1$, $k_1 \geq 1$, $\dots$, $k_s \geq 1$ sont telles que $\dim[\text{ann}(\mathfrak{m})] = 1$.

COROLLAIRE. Soit (M, ω) une variété symplectique. Etant donné une forme linéaire $\varphi \in A^*$, la forme scalaire $\varphi \circ \omega^A$ est une forme symplectique sur M^A si et seulement si $\dim[\text{ann}(\mathfrak{m})] = 1$ et $\varphi[\text{ann}(\mathfrak{m})] \neq 0$.

Soit I un idéal de A . La distribution $\xi \rightarrow I \cdot T_\xi M^A$ est un système différentiel de dimension $\dim(I) \times \dim M$ [6].

PROPOSITION 3. Soit (M, ω) une variété symplectique. Etant donné $\varphi \in A^*$, l'orthogonal de $I \cdot T_\xi M^A$ par rapport à $\varphi \circ \omega^A$ est $I_{\varphi \circ \mu_A}^\perp \cdot T_\xi M^A$ où $I_{\varphi \circ \mu_A}^\perp$ est l'orthogonal de I par rapport à $\varphi \circ \mu_A$.

Démonstration. Soit ξ un point proche de x_0 d'espèce A , $(x_1, \dots, x_{2n})$ un système de coordonnées locales dans un voisinage U de x_0 tel que

$$\omega/U\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_{i+n}}\right) = 1 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n$$

et

$$\omega/U\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = 0 \text{ pour } j \neq i + n.$$

Soit $X = \sum_{\substack{i=1,2,\dots,2n \\ \alpha \in I}} \lambda_{i\alpha} a_\alpha (\partial/\partial x_i)^A(\xi)$ un vecteur de $T_\xi M^A$ qui appartient à l'orthogonal de $I \cdot T_\xi M^A$ par rapport à $\varphi \circ \omega^A$. Ainsi $(\varphi \circ \omega^A)(\xi)(X, Y) = 0$ pour tout $Y \in I \cdot T_\xi M^A$. On a donc

$$\sum_{\substack{i=1,2,\dots,2n \\ \alpha \in I; \beta \in I}} \lambda_\alpha \varphi(a_\alpha a_\beta b) a_\beta^* \left[\xi \left(\omega/U \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right) \right] = 0 \text{ pour tout } j = 1, 2, \dots, 2n.$$

On vérifie que $\sum_{a \in I} \lambda_{ia} \varphi(a_a b) = 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, 2n$ et pour tout $b \in I$. On conclut que $(\varphi \circ \mu_A)(\sum_{a \in I} \lambda_{ia} a_a, b) = 0$ pour tout $b \in I$, c'est-à-dire que $\sum_{a \in I} \lambda_{ia} a_a$ appartient à l'orthogonal de I par rapport à $\varphi \circ \mu_A$. Le vecteur X appartient ainsi à $I_{\varphi \circ \mu_A}^\perp \cdot T_\xi M^A$. La réciproque se vérifie facilement. $\square$

COROLLAIRE 1. *Soit (M, ω) une variété symplectique. Si A est une algèbre locale telle que $\dim[\text{ann}(\mathfrak{m})] = 1$, alors pour toute forme linéaire $\varphi \in A^*$ qui ne s'annule pas sur $\text{ann}(\mathfrak{m})$, l'orthogonal de $I \cdot T_\xi M^A$ par rapport à $\varphi \circ \omega^A$ est $\text{ann}(I) \cdot T_\xi M^A$.*

COROLLAIRE 2. *Soit (M, ω) une variété symplectique, A une algèbre locale telle que $\dim[\text{ann}(\mathfrak{m})] = 1$ et $\varphi \in A^*$ une forme linéaire qui ne s'annule pas sur $\text{ann}(\mathfrak{m})$. Il n'existe pas sur M^A de champ d'éléments de contact lagrangien de la forme $\xi \rightarrow I \cdot T_\xi M^A$ pour $\varphi \circ \omega^A$ lorsque A est de dimension impaire.*

Démonstration. En effet, si A est telle que $\dim \text{ann}(\mathfrak{m}) = 1$, on a : $\dim I + \dim \text{ann}(I) = \dim A$ pour tout idéal I de A . Si le champ d'éléments de contact $\xi \rightarrow I \cdot T_\xi M^A$ est lagrangien, alors $\text{ann}(I) = I$. Ce qui implique que $\dim A = 2 \dim I$. Ce qui signifie que A est de dimension paire.

§ 2. Relèvements des tenseurs symétriques de type $\binom{0}{2}$

PROPOSITION 4. *Soit $g: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ un tenseur symétrique de type $\binom{0}{2}$ sur M . Il existe un tenseur symétrique de type $\binom{0}{2}$ et un seul g^A sur M^A à valeurs dans A tel que : $g^A(aX^A, bY^A) = ab[g(X, Y)]^A$ pour tous a, b dans A et X, Y dans $\mathfrak{X}(M)$.*

La démonstration se fait de la même façon que pour la proposition 1.

Si $\varphi \in A^*$ est une forme linéaire sur A , on dira que $\varphi \circ g^A$ est un relevé de g à M^A .

PROPOSITION 5. *Soit g un tenseur symétrique sur M de type $\binom{0}{2}$ et de rang constant. Pour toute forme linéaire φ sur A , on a : $\text{rang}(\varphi \circ g^A) = \text{rang}(\varphi \circ \mu_A) \times \text{rang}(g)$.*

Ceci découle du lemme suivant :

LEMME. *Soit g un tenseur symétrique de type $\binom{0}{2}$ sur M , de rang constant et de signature (p, q) . Soit $\varphi \in A^*$ une forme linéaire sur A et (s, t)*

la signature de $\varphi \circ \mu_A$. Alors la signature de $\varphi \circ g^A$ est $(sp + tq, sq + tp)$.

Démonstration. Soit ξ un point proche de x_0 et g_{x_0} la forme bilinéaire symétrique sur $T_{x_0}M$ induite par g et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base orthogonale de $T_{x_0}M$ pour g_{x_0} . Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ une base de A orthogonale pour $\varphi \circ \mu_A$ et $(a_\alpha^*)_{\alpha \in I}$ la base duale. D'où:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ g^A)(\xi)(a_\alpha v_i, a_\beta v_j) &= \sum_{\gamma \in I} \varphi(a_\alpha a_\beta a_\gamma) a_\gamma^* [\xi(g_{x_0}(v_i, v_j))] \\ &= 0 \text{ pour } i \neq j \text{ ou } \alpha \neq \beta \\ (\varphi \circ g^A)(\xi)(a_\alpha v_i, a_\alpha v_i) &= \sum_{\gamma \in I} \varphi(a_\alpha^2 a_\gamma) a_\gamma^* [\xi(g_{x_0}(v_i, v_i))] \\ &= \varphi(a_\alpha^2) g_{x_0}(v_i, v_i) \\ &= (\varphi \circ \mu_A)(a_\alpha, a_\alpha) g_{x_0}(v_i, v_i). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la signature de $\varphi \circ \mu_A$ est $(sp + tq, sq + tp)$.

COROLLAIRE. Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et $\varphi \in A^*$ une forme linéaire sur A . Le tenseur symétrique de type $(\mathfrak{g})$, $\varphi \circ g^A$, est une pseudo-métrique sur M^A si et seulement si $\dim[\text{ann}(\mathfrak{m})] = 1$ et $\varphi[\text{ann}(\mathfrak{m})] \neq 0$.

EXEMPLE. Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n . Soit $A = \mathbb{D}$, l'algèbre des nombres duaux, et $(1, \varepsilon)$ une base de $\mathbb{D}$ avec $\varepsilon^2 = 0$, $(1^*, \varepsilon^*)$ la base duale. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est un système de coordonnées locales de M et $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées sur la fibre de $M^D = TM$ et si $g(\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j) = g_{ij}$, alors

$$\varepsilon^* \circ g^D = \left[\begin{array}{c|c} \sum_{k=1}^n y_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} & g_{ij} \\ \hline g_{ij} & 0 \end{array} \right].$$

Remarques.

- 1) La relevée d'une métrique n'est jamais une métrique.
- 2) Si (M, g) est une variété pseudo-riemannienne, pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathbb{D}^*$ qui ne s'annule pas sur l'idéal maximal de $\mathbb{D}$, la signature de $\varphi \circ g^D$ ne dépend pas de la signature de g .

PROPOSITION 6 [4]. Etant donné une connexion linéaire ∇ sur M , il existe une connexion linéaire ∇^A et une seule sur M^A telle que: $\nabla_{aX^A}^A bY^A = ab(\nabla_X Y)^A$ pour tous a, b dans A et X, Y dans $\mathfrak{X}(M)$.

PROPOSITION 7. Soit ∇ une connexion linéaire sur M . Pour tout

tenseur symétrique g de type $\binom{0}{2}$ sur M , on a: $\nabla^A g^A = (\nabla g)^A$. De plus, $\nabla^A(\varphi \circ g^A) = \varphi \circ (\nabla g)^A$ pour toute forme linéaire φ sur A .

La démonstration ne présente aucune difficulté.

COROLLAIRE. Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et ∇_g la connexion linéaire sur M déduite de g . Si A est une algèbre locale telle que $\dim[\text{ann}(\mathfrak{m})] = 1$, alors pour toute forme linéaire $\varphi \in A^*$ qui ne s'annule pas sur $\text{ann}(\mathfrak{m})$, $(\nabla_g)^A$ est la connexion linéaire sur M^A déduite de $\varphi \circ g^A$.

Remarque. Soit $\text{ann}(\mathfrak{m})^\perp$ l'espace des formes linéaires sur A qui s'annulent sur $\text{ann}(\mathfrak{m})$ et $\mathbb{P}(A^*/\text{ann}(\mathfrak{m})^\perp)$ l'espace projectif de $A^*/\text{ann}(\mathfrak{m})^\perp$. Soit (M, ω) une variété symplectique (respectivement soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne). Si $\dim[\text{ann}(\mathfrak{m})] = 1$ et si $\varphi \in A^*$, le fait que $\varphi \circ \omega^A$ ou $\varphi \circ g^A$ soit non-dégénérée ne dépend pas de φ mais de la classe de φ dans $\mathbb{P}(A^*/\text{ann}(\mathfrak{m})^\perp)$. De même si $\varphi \circ g^A$ est une pseudo-métrique sur M^A , la connexion linéaire sur M^A déduite de $\varphi \circ g^A$ ne dépend pas de φ mais de la classe de φ dans $\mathbb{P}(A^*/\text{ann}(\mathfrak{m})^\perp)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Morimoto, A., Prolongations of G -structures to tangent bundles of higher order, Nagoya Math. J., **38** (1970), 153-179.
- [2] —, Liftings of some types of tensor fields and connections to tangent bundles of p^r -velocities, Nagoya Math. J., **40** (1970), 13-31.
- [3] —, Liftings of tensor fields and connections to tangent bundles of higher order, Nagoya Math. J., **40** (1970), 99-120.
- [4] —, Prolongation of connections to bundles of infinitely near points, J. Diff. Geom., **11** (1976), 479-498.
- [5] Okassa, E., Prolongement des champs de vecteurs à des variétés de points proches, C. R. Acad. Sci. Paris, série I Math. t. 300, **6** (1985), 173-176.
- [6] —, Prolongement des champs de vecteurs à des variétés de points proches, Pré-publication de l'Institut Fourier, Grenoble, 1987.
- [7] Yano, K. and Ishihara, S., Tangent and cotangent bundles, Diff. Geom. Marcel Dekker, New-York, 1973.
- [8] Yano, K. and Patterson, E. M., Vertical and complete lifts from a manifold to its cotangent bundles, Jour. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 91-113.
- [9] Weil, A., Théorie des points proches sur les variétés différentiables, Colloque Geom. Diff. Strasbourg, 111-117, 1953.

Université de Grenoble I

Institut Fourier

Laboratoire de Mathématiques

B.P. 74

38402 ST-MARTIN-D'HÈRES (France)

Université Marien Ngouabi
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
B.P. 69
BRAZZAVILLE (Congo)

