

Propriétés d'intersection des marches aléatoires

II. Etude des cas critiques

J.-F. Le Gall

Laboratoire de Probabilités, Université Pierre et Marie Curie, 4, Place Jussieu, Tour 56,
F-75230 Paris Cedex 05, France

Abstract. Let I_n denote the number of common points to the paths, up to time n , of two independent random walks with values in $\mathbb{Z}^4$. The sequence $(\log n)^{-1} I_n$ is shown to converge in distribution towards the square of a normal variable. Limit theorems are also proved for some processes related to the sequence (I_n) , which lead to a better understanding of recent results obtained by G. F. Lawler. Similar statements are proved for the paths of three independent random walks with values in $\mathbb{Z}^3$.

1. Introduction

L'objet du présent travail est de continuer l'étude, entreprise dans [11], du nombre de points d'intersection des trajectoires de k marches aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. Nous ne considérerons que des marches aléatoires X vérifiant les deux hypothèses suivantes:

(H1) X est centrée et possède des moments d'ordre deux.

(H2) X est adaptée (apériodique au sens de Spitzer [12]).

L'hypothèse (H1) est essentielle pour nos applications, alors que l'hypothèse (H2) ne sert qu'à assurer que X ne vit pas sur un sous-groupe strict de $\mathbb{Z}^d$.

Soient $X^1, \dots, X^k$ ($k \geq 2$) marches aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, satisfaisant les hypothèses (H1) et (H2). Pour tout entier $n \geq 1$ on note I_n le nombre de points communs aux trajectoires de $X^1, \dots, X^k$ jusqu'à l'instant n . Nous cherchons à montrer la convergence en distribution de $(f(n))^{-1} I_n$ vers une loi non dégénérée, pour une certaine fonction déterministe $f(n)$. Ce problème est résolu dans [11] pour toutes les valeurs du couple (d, k) , à l'exception des deux cas «critiques» $d=4, k=2$ et $d=3, k=3$ (dans les cas $d=2, k \geq 4$ on n'obtient aussi qu'une réponse partielle, voir [11]). Comme le remarquent déjà Erdős et Taylor [2] ces valeurs du couple (d, k) correspondent à la situation où les trajectoires de k mouvements browniens indépendants en dimension d n'ont pas de points communs, alors que le contraire se produit si l'on remplace les mouvements browniens par des marches aléatoires. Dans les cas critiques la «bonne» fonction

de normalisation est $f(n) = \log n$, et on obtient les résultats suivants (théorèmes 2.1 et 2.6):

$$\text{— si } d=4, k=2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} I_n = CN^2, \quad (1.a)$$

$$\text{— si } d=3, k=3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} I_n = C'U, \quad (1.b)$$

où la convergence a lieu en distribution, C, C' sont des constantes dépendant des marches aléatoires considérées, enfin N désigne une variable normale centrée réduite et U suit une loi gamma de paramètre $1/4$. Il est intéressant de rapprocher les résultats limites (1.a) et (1.b) de ceux qui concernent le nombre de visites de 0 par une marche aléatoire, problème pour lequel la dimension $d=2$ est critique. Si X est une marche aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$, satisfaisant les hypothèses (H1) et (H2), et N_n désigne le nombre de visites de 0 par X avant l'instant n on obtient aisément, à l'aide de la méthode des moments et du théorème limite local,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} N_n = C''\bar{e}, \quad (1.c)$$

avec convergence en distribution, $\bar{e}$ désignant une variable exponentielle. Remarquons en particulier que les lois limites dans (1.a), (1.b) et (1.c) sont toutes des lois gamma.

L'étude des propriétés d'intersection des marches aléatoires dans les cas critiques a fait l'objet de travaux récents de Lawler [6, 7] pour le cas $d=4, k=2$ et [8] pour le cas $d=3, k=3$. Lawler a notamment cherché à estimer la probabilité que les trajectoires des k marches aléatoires considérées n'aient pas de point commun avant l'instant n . Par exemple si $d=4, k=2$, en supposant que X^1 et X^2 sont deux marches aléatoires simples et que $|X_0^1 - X_0^2| = 1$, Lawler obtient le résultat suivant:

$$P[I_n = 0] \approx (\log n)^{-1/2}, \quad (1.d)$$

le signe $\approx$ signifiant que les deux grandeurs considérées sont, en un certain sens, du même ordre quand n tend vers l'infini (voir [7] pour plus de détails).

Le lien existant entre (1.d) et les résultats limites (1.a) et (1.b) peut être mis en évidence à condition d'établir des résultats de type «convergence de processus» pour la suite (I_n) . Notons ici que Kasahara et Kotani [5] ont renforcé (1.c) en montrant la convergence de processus liés à la suite (N_n) (en fait Kasahara et Kotani ont traité l'analogue continu de l'étude de (N_n) , à savoir l'étude des fonctionnelles additives intégrables du mouvement brownien plan). De même on peut renforcer (1.a) en considérant la suite de processus (Γ^n) définis pour tout $t \geq 0$ par:

$$\Gamma_t^n = (\log n)^{-1} I_{[nt]},$$

où, pour $u \in \mathbb{R}$, $[u]$ désigne la partie entière de u . Nous montrons dans la partie 3 que la suite (Γ^n) converge vers le processus Γ , défini comme l'unique processus à accroissements indépendants tel que, pour tout $t \geq 0$, Γ_t suit la loi de CtN^2 [C est la constante intervenant dans (1.a)]. Il est alors tentant d'en déduire, pour $0 < a < b$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[I_{[nb]} - I_{[na]} = 0] = P[\Gamma(b) = \Gamma(a)] = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2}, \quad (1.e)$$

résultat qui est manifestement très proche de (1.d).

Bien que nous n'ayons pas été capables de montrer rigoureusement (1.e) il semble que l'étude de la suite de processus (I^n) permette de mieux comprendre certains des résultats obtenus par Lawler.

Dans la partie 4 nous établissons l'analogie des résultats limites (1.a) et (1.b) pour k mouvements browniens à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On doit remplacer le nombre de points d'intersection des trajectoires de marches aléatoires par la mesure de Lebesgue de l'intersection des saucisses de Wiener associées aux mouvements browniens considérés. Ces résultats avaient déjà été annoncés dans [10].

La preuve des principaux résultats de ce travail repose sur la méthode des moments. En particulier l'estimation des moments de la suite (I_n) est possible grâce au résultat suivant dû à Spitzer [12] (p. 308 et ex. 5, p. 339). Si X est une marche aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, pour $d=3$ ou 4 , satisfaisant (H1) et (H2), si M_X désigne la matrice de covariance de X et $X(0, \infty)$ est toute la trajectoire de X ,

$$P[x \in X(0, \infty)]_{|x| \rightarrow \infty} \sim C_d q (\det M_X)^{-1/2} (x M_X^{-1} x)^{1 - \frac{d}{2}}, \quad (1.f)$$

où $C_3 = (2\pi)^{-1}$, $C_4 = (2\pi^2)^{-1}$ et q est la probabilité que X ne revienne jamais à son point de départ. Remarquons que dans les cas critiques l'équivalence (1.f) suffit pour étudier les moments de I_n , alors que dans les autres cas le même problème demande des estimations plus précises (voir [11]). De façon générale nous n'aurons ici besoin d'aucun des résultats de [11].

Pour conclure soulignons que l'étude des propriétés d'intersection des marches aléatoires a souvent été motivée par des problèmes d'origine physique. Felder et Fröhlich [3] ont récemment utilisé les idées de la théorie du groupe de renormalisation pour traiter des questions proches de celles étudiées par Lawler. Les propriétés d'intersection des marches aléatoires jouent également un rôle important dans certains problèmes de mécanique statistique, comme en témoignent les travaux d'Aizenman [1].

2. Les théorèmes principaux

(2.1)

Soient X, Y deux marches aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^4$, satisfaisant les hypothèses (H1), (H2) de l'introduction. Pour tout entier $n \geq 1$, $X(0, n)$ désigne la trajectoire de X sur l'intervalle $[0, n]$, on note $\mathcal{I}_n = X(0, n) \cap Y(0, n)$ et $I_n = |\mathcal{I}_n|$. Si M_X , resp. M_Y , désigne la matrice de covariance de X , resp. de Y , on note $A = (M_X)^{1/2}$, $A' = (M_Y)^{1/2}$. Enfin q , resp. q' , désigne la probabilité que X , resp. Y , ne revienne jamais à son point de départ.

Théorème 2.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} I_n = (2\pi)^{-2} C(A, A') q q' N^2,$$

où la convergence a lieu en distribution, N désigne une variable normale centrée réduite et la constante $C(A, A')$ est définie par

$$C(A, A') = (2\pi^2 \det(A) \det(A'))^{-1} \int_{S^3} |A^{-1}\omega|^{-2} |A'^{-1}\omega|^{-2} d\omega,$$

où S^3 désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^4$. Dans le cas particulier (isotrope) où $A = \sigma \cdot \text{Id}$, $A' = \sigma' \cdot \text{Id}$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} I_n = (2\pi)^{-2} (\sigma\sigma')^{-2} qq' N^2.$$

Nous montrerons le théorème dans le cas particulier où $A = A' = \text{Id}$. L'extension de ce cas particulier au résultat du théorème est facile et laissée au lecteur. Sans perte de généralité on supposera aussi $X_0 = x_0$, $Y_0 = y_0$ p.s., pour $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}^4$. L'ingrédient principal de notre preuve est l'équivalence rappelée dans l'introduction :

$$P[y \in X(0, \infty)] \underset{|y| \rightarrow \infty}{\sim} (2\pi^2)^{-1} q|y|^{-2}. \quad (2.a)$$

Nous décomposerons la preuve du théorème 2.1 en plusieurs étapes intermédiaires. L'idée générale est d'appliquer la méthode des moments. Le premier lemme permet de ramener le comportement asymptotique de I_n à celui d'une variable dont les moments seront plus faciles à estimer.

Lemme 2.2. Pour tout $a \geq 0$ notons $B(0, a)$ la boule fermée de centre 0 de rayon a dans $\mathbb{R}^4$. Pour tout $n \geq 1$ soit $J_n = |\mathcal{J}_\infty \cap B(0, n^{1/2})|$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} (I_n - J_n) = 0,$$

avec convergence en probabilité.

Preuve. On commence par établir :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} (I_n - |\mathcal{J}_n \cap B(0, n^{1/2})|) = 0. \quad (2.b)$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Le théorème d'invariance de Donsker montre qu'on peut choisir $K > 1$ assez grand de façon que pour tout n assez grand :

$$P[\mathcal{J}_n \cap (\mathbb{Z}^4 - B(0, Kn^{1/2})) \neq \emptyset] < \varepsilon. \quad (2.c)$$

On remarque ensuite que :

$$E[|\mathcal{J}_n \cap (B(0, Kn^{1/2}) - B(0, n^{1/2}))|] \leq \sum_{n^{1/2} < |y| \leq Kn^{1/2}} P[y \in X(0, \infty)] P[y \in Y(0, \infty)],$$

d'où à l'aide de (2.a)

$$E[|\mathcal{J}_n \cap (B(0, Kn^{1/2}) - B(0, n^{1/2}))|] \leq C \quad (2.d)$$

pour une certaine constante C . (2.c) et (2.d) entraînent facilement (2.b). Montrons maintenant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} |(\mathcal{J}_\infty - \mathcal{J}_n) \cap B(0, n^{1/2})| = 0, \quad (2.e)$$

avec convergence en probabilité. Il suffit de montrer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} |X(n, \infty) \cap Y(0, \infty) \cap B(0, n^{1/2})| = 0. \quad (2.f)$$

Or, $\varepsilon > 0$ étant fixé, on peut choisir $\delta > 0$ assez petit de façon que, pour tout n assez grand,

$$P[|X_n| \leq \delta n^{1/2}] < \varepsilon.$$

Ensuite l'équivalence (2.a) montre que, pour tout $x_1 \in \mathbb{Z}^4$ tel que $|x_1| > \delta n^{1/2}$

$$E[X(n, \infty) \cap Y(0, \infty) \cap B(0, n^{1/2}) | X_n = x_1] \leq C' \sum_{|y| \leq n^{1/2}} |y|^{-2} |y - x_1|^{-2} \leq C_\delta$$

pour une certaine constante C_δ . (2.f), et donc (2.e) en découlent. Le résultat du lemme est une conséquence immédiate de (2.b) et (2.e). $\square$

Proposition 2.3. *Pour tout entier $p \geq 1$ soit Σ_p l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, p\}$. J_n étant défini comme dans le lemme 2.1 on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-p} \left(E[J_n^p] - H^p \int_{(B(0, n^{1/2}))^p} du_1 \dots du_p \right. \\ \left. \times \left(\sum_{\tau \in \Sigma_p} \prod_{i=1}^p (|u_{\tau(i)} - u_{\tau(i-1)}|^{-2} \wedge 1) \right)^2 \right) = 0,$$

où on a noté $H = (2\pi^2)^{-2} q q'$ et on fait la convention $u_{\tau(0)} = 0$.

Preuve. On écrit :

$$E[J_n^p] = E \left[\left(\sum_{y \in \mathbb{Z}^4 \cap B(0, n^{1/2})} 1_{\{y \in X(0, \infty) \cap Y(0, \infty)\}} \right)^p \right] \\ = \sum_{y_1, \dots, y_p \in \mathbb{Z}^4 \cap B(0, n^{1/2})} P \left[\bigcap_{i=1}^p \{y_i \in X(0, \infty)\} \right] P \left[\bigcap_{i=1}^p \{y_i \in Y(0, \infty)\} \right].$$

Soient $y_1, \dots, y_p$ p points distincts de $\mathbb{Z}^4$ et pour tout $i = 1, \dots, p$,

$$T_{y_i} = \inf \{k \geq 0; X_k = y_i\}.$$

Alors :

$$P \left[\bigcap_{i=1}^p \{y_i \in X(0, \infty)\} \right] = \sum_{\tau \in \Sigma_p} P[T_{y_{\tau(1)}} < \dots < T_{y_{\tau(p)}} < \infty].$$

L'idée de la preuve de la proposition est d'utiliser à la fois l'équivalence (2.a) et la propriété de Markov aux temps T_{y_i} pour remplacer chaque probabilité $P[T_{y_{\tau(1)}} < \dots < T_{y_{\tau(p)}} < \infty]$ par :

$$(2\pi^2)^{-p} q^p \prod_{i=1}^p |y_{\tau(i)} - y_{\tau(i-1)}|^{-2}.$$

Ensuite il ne reste plus qu'à remplacer la somme sur $y_1, \dots, y_p \in \mathbb{Z}^4 \cap B(0, n^{1/2})$ par une intégrale sur $u_1, \dots, u_p \in B(0, n^{1/2})$. La justification de ces approximations successives n'est pas difficile et est laissée au lecteur (voir [11] pour des raisonnements analogues). Le facteur $(\log n)^{-p}$ vient du fait qu'on peut, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, majorer l'intégrale en $du_1 \dots du_p$ par

$$(p!)^2 \int_{B(0, n^{1/2})^p} du_1 \dots du_p \prod_{i=1}^p (|u_i - u_{i-1}|^{-4} \wedge 1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (p!)^2 (\pi^2 \log n)^p. \quad \square \quad (2.g)$$

Pour tous $p \geq 1$ et $r > 0$ posons :

$$S_p(r) = \int_{(B(0, r))^p} du_1 \dots du_p \left(\sum_{\tau \in \Sigma_p} \prod_{i=1}^p (|u_{\tau(i)} - u_{\tau(i-1)}|^{-2} \wedge 1) \right)^2. \quad (2.h)$$

La proposition 2.3 montre que le comportement limite de $(\log n)^{-p} E[J_n^p]$ se ramène à l'étude asymptotique de $(\log r)^{-p} S_p(r)$, quand r tend vers $+\infty$.

Avant d'énoncer le prochain lemme nous devons introduire quelques nouvelles notations. Pour $\tau, \gamma \in \Sigma_p$ on pose, pour tout $1 \leq i \leq p$,

$$\phi_{\tau, \gamma}(i) = \sup \{ \gamma(j); j \in]\tau(i-1); \tau(i)] \}$$

avec la convention $\tau(0)=0$ et l'abus d'écriture consistant à noter $]a; b[= \{k; a \wedge b < k \leq a \vee b\}$ (cette notation sera utilisée fréquemment dans la suite). Soit Ω_p l'ensemble des couples $(\tau, \gamma) \in \Sigma_p \times \Sigma_p$ tels que $\phi_{\tau, \gamma}$ soit bijective.

Lemme 2.4. Pour tout $p \geq 1$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\log r)^{-p} S_p(r) = (2\pi^2)^p |\Omega_p|.$$

Preuve. On peut réécrire (2.h) sous la forme:

$$S_p(r) = p! \int_{(B(0, r))^p} du_1 \dots du_p \prod_{i=1}^p (|u_i - u_{i-1}|^{-2} \wedge 1) \sum_{\tau \in \Sigma_p} \prod_{i=1}^p (|u_{\tau(i)} - u_{\tau(i-1)}|^{-2} \wedge 1).$$

Le changement de variable $v_i = u_i - u_{i-1}$ conduit à:

$$S_p(r) = p! \int_{K_p(r)} dv_1 \dots dv_p \prod_{i=1}^p (|v_i|^{-2} \wedge 1) \sum_{\tau \in \Sigma_p} \prod_{i=1}^p \left(\left| \sum_{j \in]\tau(i-1); \tau(i)]} v_j \right|^{-2} \wedge 1 \right),$$

où $K_p(r)$ est un sous-ensemble de $(\mathbb{R}^4)^p$, vérifiant:

$$(B(0, r/p))^p \subset K_p(r) \subset (B(0, 2r))^p$$

(rappelons aussi que la notation $]\tau(i-1); \tau(i)[$ désigne, de façon un peu abusive, l'ensemble $\{k; \tau(i-1) \wedge \tau(i) < k \leq \tau(i-1) \vee \tau(i)\}$). Soit maintenant:

$$\bar{S}_p(r) = p! \int_{(B(0, r))^p} dv_1 \dots dv_p \prod_{i=1}^p (|v_i|^{-2} \wedge 1) \sum_{\tau \in \Sigma_p} \prod_{i=1}^p \left(\left| \sum_{j \in]\tau(i-1); \tau(i)]} v_j \right|^{-2} \wedge 1 \right).$$

Il suffit de montrer le résultat du lemme avec $S_p(r)$ remplacé par $\bar{S}_p(r)$. L'étape suivante de la preuve consiste à montrer qu'on peut remplacer $\bar{S}_p(r)$ par:

$$R_p(r) = p! \int_{(B(0, r))^p} dv_1 \dots dv_p \prod_{i=1}^p (|v_i|^{-2} \wedge 1) \sum_{\tau \in \Sigma_p} \prod_{i=1}^p \left(\left(\sup_{j \in]\tau(i-1); \tau(i)]} |v_j| \right)^{-2} \wedge 1 \right).$$

Pour justifier ce remplacement on choisit une constante $K > 0$ et on pose, pour tout $r > 0$,

$$B_K(r) = \{(v_1, \dots, v_p) \in (B(0, r))^p; K^{-1}v_1 \leq v_2 \leq Kv_1\},$$

puis:

$$R_p^*(r) = \int_{B_K(r)} dv_1 \dots dv_p \prod_{i=1}^p (|v_i|^{-2} \wedge 1) \sum_{\tau \in \Sigma_p} \prod_{i=1}^p \left(\left| \sum_{j \in]\tau(i-1); \tau(i)]} v_j \right|^{-2} \wedge 1 \right).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne:

$$\begin{aligned} R_p^*(r) &\leq \left(\int_{B_K(r)} dv_1 \dots dv_p \prod_{i=1}^p (|v_i|^{-4} \wedge 1) \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\int_{(B(0,r))^p} dv_1 \dots dv_p \left(\sum_{\tau \in \Sigma_p} \prod_{i=1}^p \left(\left| \sum_{j \in]\tau(i-1); \tau(i)]} v_j \right|^{-2} \wedge 1 \right) \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq (C^p (1 + \log_+ r)^{p-1} (2 \log K))^{1/2} \times (S_p(pr))^{1/2}, \end{aligned}$$

pour une certaine constante $C > 0$. D'autre part on vérifie aisément que $S_p(r) = O((\log r)^p)$. On trouve finalement:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\log r)^{-p} R_p^*(r) = 0. \quad (2.i)$$

A l'aide de (2.i) on voit qu'on peut, dans la définition de $\bar{S}_p(r)$, remplacer $(B(0, r))^p$ par:

$$(B(0, r))^p - \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{K^{-1}v_i < v_j < Kv_i\}.$$

Cette dernière remarque montre que pour tout $\varepsilon > 0$ on a, pour r assez grand:

$$(1 - \varepsilon) R_p(r) \leq \bar{S}_p(r) \leq (1 + \varepsilon) R_p(r). \quad (2.j)$$

Il reste à étudier le comportement asymptotique de $R_p(r)$. Un passage en coordonnées polaires conduit à:

$$\begin{aligned} R_p(r) &= p! (2\pi^2)^p \int_0^r \dots \int_0^r d\varrho_1 \dots d\varrho_p (\varrho_1 \dots \varrho_p)^3 \prod_{i=1}^p (\varrho_i^{-2} \wedge 1) \\ &\quad \times \left(\sum_{\tau \in \Sigma_p} \prod_{i=1}^p (\sup \{\varrho_j; j \in]\tau(i-1); \tau(i)]\})^{-2} \wedge 1 \right) \\ &\underset{r \rightarrow \infty}{\sim} p! (2\pi^2)^p \int_1^r \dots \int_1^r d\varrho_1 \dots d\varrho_p (\varrho_1 \dots \varrho_p) \\ &\quad \times \left(\sum_{\tau \in \Sigma_p} \prod_{i=1}^p (\sup \{\varrho_j; j \in]\tau(i-1); \tau(i)]\})^{-2} \wedge 1 \right) \\ &= p! (2\pi^2)^p (\log r)^p \int_0^1 \dots \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_p \\ &\quad \times \sum_{\tau \in \Sigma_p} \exp \left(2(\log r) \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{i=1}^p \sup \{\alpha_j; j \in]\tau(i-1); \tau(i)]\} \right) \right), \end{aligned}$$

où pour passer à la dernière égalité on a fait le changement de variables $\varrho_i = r^{\alpha_i}$. Maintenant le théorème de convergence dominée montre que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\log r)^{-p} R_p(r) = (2\pi^2)^p p! \sum_{\tau \in \Sigma_p} \int_0^1 \dots \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_p \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{i=1}^p \sup \{\alpha_j; j \in]\tau(i-1); \tau(i)]\} \right)}. \quad (2.k)$$

En rangeant les α_i par ordre croissant on trouve que le membre de droite de (2.k) s'identifie à $(2\pi^2)^p |\Omega_p|$, ce qui compte-tenu de (2.j) et des remarques précédentes termine la preuve du lemme. $\square$

Nous allons maintenant calculer $|\Omega_p|$ pour tout entier p . Nous procéderons par récurrence et nous aurons besoin de la définition suivante. Soit $(\tau, \gamma) \in (\Sigma_p)^2$. On dira que $(\tau', \gamma') \in (\Sigma_{p+1})^2$ est une extension de (τ, γ) s'il existe un couple d'entiers $(k, l) \in \{1, \dots, p+1\}^2$ tel que:

$$\begin{aligned} 1) \quad \tau'(i) &= \begin{cases} \tau(i) & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ p+1 & \text{si } i = k \\ \tau(i-1) & \text{si } k < i \leq p+1, \end{cases} \\ 2) \quad \gamma'(p+1) &= l \text{ et, pour tout } 1 \leq i \leq p, \\ \gamma'(i) &= \begin{cases} \gamma(i) & \text{si } \gamma(i) < l \\ \gamma(i)+1 & \text{si } \gamma(i) \geq l. \end{cases} \end{aligned}$$

Cette définition s'interprète de manière simple si l'on se rappelle que, pour un couple (τ, γ) donné, τ représente l'ordre dans lequel on visite p points $v_1, \dots, v_p$ de l'espace, tandis que γ correspond au classement par ordre croissant des distances de ces mêmes points à l'origine ($|v_i| < |v_j|$ si et seulement si $\gamma(i) < \gamma(j)$). Le passage de (τ, γ) à (τ', γ') s'interprète en disant qu'on a rajouté un point supplémentaire v_{p+1} qui est le $k^{\text{ième}}$ à être visité et occupe la $l^{\text{ième}}$ place dans le classement des $\{|v_i|; 1 \leq i \leq p+1\}$.

Lemme 2.5.

a) Soit $(\tau', \gamma') \in (\Sigma_{p+1})^2$. Supposons que (τ', γ') est une extension de (τ, γ) et que $(\tau', \gamma') \in \Omega_{p+1}$. Alors $(\tau, \gamma) \in \Omega_p$.

b) Soient $(\tau, \gamma) \in \Omega_p$ et $l \in \{1, \dots, p+1\}$. Le nombre d'extensions (τ', γ') de (τ, γ) telles que $(\tau', \gamma') \in \Omega_{p+1}$ et $\gamma'(p+1) = l$ est deux si $l \leq p$, un si $l = p+1$.

Remarque. On déduit immédiatement du lemme que $|\Omega_{p+1}| = (2p+1)|\Omega_p|$. On aurait pu obtenir ce résultat plus directement, sans passer par le lemme 2.5. Cependant le résultat plus précis du lemme nous servira dans la suite.

Preuve. La première assertion du lemme est facile et laissée au lecteur. Pour la seconde on se fixe $(\tau, \gamma) \in \Omega_p$ et $l \in \{1, \dots, p+1\}$. Pour toute valeur de $k \in \{1, \dots, p+1\}$ on peut considérer l'extension (τ', γ') de (τ, γ) définie par $\tau'(k) = p+1$ et $\gamma'(p+1) = l$. Nous devons déterminer le nombre de valeurs de k pour lesquelles l'application $\phi_{\tau', \gamma'}$ définie par:

$$\phi_{\tau', \gamma'}(i) = \sup \{ \gamma'(j); j \in]\tau'(i-1), \tau'(i)] \} \quad (1 \leq i \leq p+1),$$

est bijective. Dans le cas $l = p+1$ il est clair que le seul choix convenable de k est $k = p+1$.

Supposons maintenant $l \leq p$. En utilisant le fait que $\phi_{\tau, \gamma}$ est bijective (puisque $(\tau, \gamma) \in \Omega_p$), on voit que $\phi_{\tau', \gamma'}$ est bijective si et seulement si:

· soit $k \leq p$ et

$$\begin{aligned} & \{ \sup(\gamma'(i), i \in]\tau(k-1); p+1]), \sup(\gamma'(i), i \in]\tau(k); p+1]) \} \\ &= \{ \sup(\gamma'(i), i \in]\tau(k-1); \tau(k)], l \} \end{aligned} \quad (2.1)$$

· soit $k = p + 1$ et:

$$\sup(\gamma'(i), i \in]\tau(p); p + 1]) = l. \quad (2.m)$$

La condition (2.l) est encore équivalente à:

$$\begin{cases} \sup(\gamma(i), i \in]\tau(k-1); \tau(k)]) \geq l \\ \sup(\gamma(i), i \in]\tau(k-1) \vee \tau(k); l]) < l \end{cases} \quad (2.n)$$

cependant que (2.m) équivaut à:

$$\sup(\gamma(i), i \in]\tau(p); p]) < l. \quad (2.o)$$

En résumé les valeurs convenables de k sont les $k \leq p$ tels que (2.n) est vérifiée, et $k = p + 1$ si (2.o) est vérifiée. Nous devons montrer qu'il en existe exactement deux. Nous allons construire explicitement ces deux valeurs de k et nous laisserons au lecteur le soin de vérifier que ce sont les seules.

On pose d'abord:

$$h = \sup(i \leq p; \gamma(i) \geq l)$$

puis:

$$\begin{aligned} k_1 &= \inf(i \in \{1, \dots, p\}; \tau(i) \geq h) \\ k_2 &= \begin{cases} \inf(i > k_1; \tau(i) < h) & \text{si } \{i > k_1; \tau(i) < h\} \neq \emptyset \\ p + 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant la définition de h on vérifie aisément que k_1 et k_2 satisfont la condition (2.n) (ou (2.o) pour k_2 si $k_2 = p + 1$). Il resterait à établir qu'il n'existe pas d'autre valeur convenable de k , une façon de procéder consiste à raisonner par l'absurde: l'existence d'une troisième valeur convenable k_3 conduit à une contradiction avec l'hypothèse que $\phi_{\tau, \gamma}$ est bijective. $\square$

Preuve du théorème 2.1: Le lemme 2.2 permet de remplacer I_n par J_n . Pour montrer la convergence en distribution de $(\log n)^{-1} J_n$ on applique la méthode des moments. La proposition 2.3 et le lemme 2.4 montrent que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-p} E[J_n^p] &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-p} ((2\pi^2)^{-2} qq')^p S_p(n^{1/2}) \\ &= ((2\pi)^{-2} qq')^p |\Omega_p|. \end{aligned}$$

Enfin le lemme 2.5 entraîne, pour tout $p \geq 1$,

$$|\Omega_p| = \prod_{i=0}^{p-1} (2i+1) = E[N^{2p}],$$

où N est une variable normale centrée réduite. $\square$

Remarque. Dans le cas général (non isotrope) l'apparition de la constante $C(A, A')$ est due au fait qu'on doit remplacer l'équivalent (2.a) par:

$$P[y \in X(0, \infty)]|_{|y| \rightarrow \infty} \sim (2\pi^2)^{-1} q (\det A)^{-1} |A^{-1} y|^{-2}. \quad (2.p)$$

Des transformations simples montrent qu'on a aussi:

$$C(A, A') = (\det A')^{-1} K(A'^{-1} A) = (\det A)^{-1} K(A^{-1} A'),$$

où pour tout opérateur symétrique défini positif B la constante $K(B)$ est définie par :

$$K(B) = (2\pi^2)^{-1} \int_{S^3} |B\omega|^{-2} d\omega.$$

On voit en particulier que si $A' = \lambda A$ ($\lambda > 0$) on a

$$C(A, A') = \lambda^{-2} (\det A)^{-1} = (\det(A) \det(A'))^{-1/2}.$$

Dans le cas général il n'y a pas d'expression simple pour $K(B)$ ni donc pour $C(A, A')$. Par exemple, dans le cas particulier où l'opérateur B admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2$, on trouve, en notant E_i l'espace propre associé à λ_i ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} & \cdot \text{ si } \dim(E_1) = \dim(E_2) = 2, \\ & \quad K(B) = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)^{-1} \log(\lambda_2^2 / \lambda_1^2) \\ & \cdot \text{ si } \dim(E_1) = 3, \dim(E_2) = 1, \\ & \quad K(B) = 2(\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2))^{-1}. \end{aligned}$$

(2.2)

Soient maintenant X, Y, Z trois marches aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^3$ satisfaisant les hypothèses (H1), (H2) de l'introduction. On reprend les mêmes notations que ci-dessus. Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$\mathcal{J}_n = X(0, n) \cap Y(0, n) \cap Z(0, n) \quad \text{et} \quad I_n = |\mathcal{J}_n|.$$

On note $A = (M_X)^{1/2}$, $A' = (M_Y)^{1/2}$ et $A'' = (M_Z)^{1/2}$. Enfin q , resp. q' , q'' désigne la probabilité que X , resp. Y, Z ne revienne jamais à son point de départ.

Théorème 2.6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} I_n = (2\pi)^{-2} C(A, A', A'') qq'q'' U,$$

où la convergence a lieu en distribution, U suit une loi gamma de paramètre 1/4 de moyenne 1 dont la densité s'écrit :

$$4^{-1/4} (\Gamma(1/4))^{-1} x^{-3/4} \exp(-x/4),$$

enfin la constante $C(A, A', A'')$ est définie par :

$$C(A, A', A'') = (4\pi \det(A) \det(A') \det(A''))^{-1} \int_{S^2} |A^{-1}\omega|^{-1} |A'^{-1}\omega|^{-1} |A''^{-1}\omega|^{-1} d\omega.$$

Dans le cas particulier (isotrope) où $A = \sigma \cdot \text{Id}$, $A' = \sigma' \cdot \text{Id}$ et $A'' = \sigma'' \cdot \text{Id}$, on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} I_n = (2\pi)^{-2} (\sigma\sigma'\sigma'')^{-2} qq'q'' U.$$

Preuve. La preuve du théorème 2.6 est évidemment très semblable à celle du théorème 2.1. Pour cette raison nous indiquerons seulement les grandes lignes de la démonstration. L'analogie du lemme 2.2 montre qu'on peut d'abord remplacer I_n par :

$$J_n = |\mathcal{J}_\infty \cap B(0, n^{1/2})|,$$

où $B(0, r)$ désigne maintenant la boule de centre 0 de rayon r dans $\mathbb{R}^3$. Ensuite, en se limitant au cas particulier où $A = A' = A'' = \text{Id}$, on montre, comme pour la proposition 2.3, que, pour tout $p \geq 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-p} (E[J_n^p] - H^p S_p(n^{1/2})) = 0, \quad (2.q)$$

où on note $H = (2\pi)^{-3} qq'q''$ et pour tout $r > 0$,

$$S_p(r) = \int_{(B(0,r))^p} du_1 \dots du_p \left(\sum_{\tau \in \Sigma_p} \prod_{i=1}^p (|u_{\tau(i)} - u_{\tau(i-1)}|^{-1} \wedge 1) \right)^3.$$

Pour tout $p \geq 1$ notons:

$$\Delta_p = \{(\tau, \eta, \gamma) \in (\Sigma_p)^3, (\tau, \gamma) \in \Omega_p \text{ et } (\eta, \gamma) \in \Omega_p\}.$$

Les mêmes transformations que dans la preuve du lemme 2.4 conduisent à:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\log r)^{-p} S_p(r) = (4\pi)^p |\Delta_p|. \quad (2.r)$$

Enfin le lemme 2.5 entraîne aisément par récurrence

$$|\Delta_p| = \prod_{i=0}^{p-1} (4i+1) = E[U^p], \quad (2.s)$$

où U est comme dans l'énoncé du théorème.

Le résultat du théorème découle maintenant de (2.q), (2.r), (2.s) et d'une application de la méthode des moments. $\square$

Remarque. La variable limite U du théorème 2.5 possède la propriété caractéristique suivante: si U' est une seconde variable indépendante de U de même loi, $U + U'$ suit la loi de $2N^2$. De même si N et N' sont deux variables normales centrées réduites indépendantes $N^2 + N'^2$ suit une loi exponentielle de moyenne 2. Or la loi exponentielle intervient dans une autre situation critique, l'étude asymptotique du nombre de visites de 0 par une marche aléatoire plane [voir (1.c)]. Ceci suggère qu'il devrait être possible de trouver une explication probabiliste à l'apparition des variables limites N^2 et U dans les théorèmes 2.1 et 2.6. Une ébauche de réponse à cette question est donnée dans la partie suivante.

3. Convergence de processus liés au nombre de points d'intersection

(3.1)

Nous nous proposons dans cette partie de préciser les résultats de la partie 2 en montrant la convergence en loi de certains processus associés à la suite (I_n) . Les résultats ainsi obtenus permettront aussi de mieux comprendre la nature des lois limites qui interviennent dans les théorèmes 2.1 et 2.6. Nous considérons d'abord deux marches aléatoires X, Y indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^4$ satisfaisant les hypothèses de l'introduction. On reprend les notations de (2.1).

Théorème 3.1. Soient $\theta = (2\pi)^{-2} qq'C(A, A')$ et, pour tout $n \geq 1$, $\Gamma^n = (\Gamma_t^n, t \geq 0)$ le processus défini par:

$$\Gamma_t^n = (\theta \log n)^{-1} I_{[tn]},$$

où, pour $u \in \mathbb{R}$, $[u]$ désigne la partie entière de u .

Alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma^n = \Gamma,$$

au sens de la convergence des lois marginales fini-dimensionnelles, le processus Γ étant défini comme l'unique processus à accroissements indépendants (non stationnaires) tel que, pour tout $t \geq 0$, Γ_t suit la loi du carré d'une variable normale centrée de variance t .

Nous verrons plus loin qu'on peut décrire de manière simple les trajectoires du processus limite Γ , ce qui conduit à une interprétation probabiliste du résultat du théorème.

Preuve. Nous nous limiterons au cas où $A = A' = \text{Id}$, $X_0 = x_0$, $Y_0 = y_0$ p.s. De plus nous supposons que X et Y sont apériodiques (fortement apériodiques au sens de Spitzer [12]). Une fois le résultat du théorème établi sous cette dernière hypothèse on traite très facilement le cas général en utilisant l'astuce habituelle (voir par exemple [12, p. 310]) qui permet de se ramener au cas apériodique. Pour $m \leq n$, on note:

$$I(m, n) = |X(m, n) \cap Y(m, n)|.$$

L'argument essentiel de la preuve du théorème est le lemme suivant.

Lemme 3.2. Soient a, b, c trois nombres réels avec $0 < a \leq b \leq c$. Supposons que, pour une certaine suite (n_k) croissant vers l'infini et une certaine variable aléatoire U on ait:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\theta \log n_k)^{-1} I(n_k^b, n_k^c) = U,$$

avec convergence en distribution.

Alors:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\theta \log n_k)^{-1} (I(0, n_k^a), I(n_k^b, n_k^c)) = (aN^2, U),$$

avec convergence en distribution, N étant une variable normale centrée réduite indépendante de U .

Preuve du lemme. Le théorème 1.1, ou plus exactement la preuve de ce théorème, montre que:

$$\lim_{\substack{a \rightarrow b \\ a < b}} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{-1} (E[I(0, n^b) - I(0, n^a)]) \right) = 0.$$

En conséquence il suffit de montrer le résultat du lemme dans le cas où $a < b$. Pour alléger les notations on pose:

$$V_k = (\theta \log n_k)^{-1} I(0, n_k^a), \quad W_k = (\theta \log n_k)^{-1} I(n_k^b, n_k^c).$$

Soient f, g deux fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$. La propriété de Markov entraîne:

$$E[f(V_k)g(W_k)] = E[f(V_k) E[g(W_k)/X_{[n_k^b]}, Y_{[n_k^c]}]]. \quad (3.a)$$

Pour $u = (u_1, \dots, u_4) \in \mathbb{R}^4$, notons $[u] = ([u_1], \dots, [u_4])$. Nous allons montrer, pour tout couple $(u, v) \in (\mathbb{R}^4)^2$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[g(W_k)/X_{[nk]} = [un_k^{a/2}], Y_{[nk]} = [vn_k^{a/2}]] = E[g(U)] \quad (3.b)$$

avec convergence uniforme quand le couple (u, v) décrit un compact de $(\mathbb{R}^4)^2$. Si l'on admet (3.b) il est facile de déduire de (3.a) que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[f(V_k)g(W_k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} E[f(V_k)E[g(U)]] = E[f(aN^2)]E[g(U)],$$

d'où le lemme. Il reste à montrer (3.b). Notons $P_n(x, y)$, resp. $P'_n(x, y)$, les probabilités de transition de X , resp. de Y . Alors:

$$\begin{aligned} E[g(W_k)/X_{[nk]} = [un_k^{a/2}], Y_{[nk]} = [vn_k^{a/2}]] \\ = \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^4} P_{[nk] - [nk]}([un_k^{a/2}], x) P'_{[nk] - [nk]}([vn_k^{a/2}], y) E[g(W_k)/X_{[nk]} = x, Y_{[nk]} = y]. \end{aligned} \quad (3.c)$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} E[g(U)] &= \lim_{k \rightarrow \infty} E[g(W_k)] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{x, y \in \mathbb{Z}^4} P_{[nk]}(x_0, x) P'_{[nk]}(y_0, y) E[g(W_k)/X_{[nk]} = x, Y_{[nk]} = y] \right). \end{aligned} \quad (3.d)$$

Pour établir (3.b) il suffit maintenant de comparer (3.c) et (3.d) et d'utiliser le théorème limite local [12, p. 77] pour remarquer que, pour tous $\varepsilon > 0$, $K > 0$, on peut choisir k assez grand de façon que:

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) P_{[nk]}(x_0, x) &\leq P_{[nk] - [nk]}([un_k^{a/2}], x) \leq (1 + \varepsilon) P_{[nk]}(x_0, x), \\ (1 - \varepsilon) P'_{[nk]}(y_0, y) &\leq P'_{[nk] - [nk]}([vn_k^{a/2}], y) \leq (1 + \varepsilon) P'_{[nk]}(y_0, y), \end{aligned}$$

pour tous u, v, x, y avec $|u|, |v| \leq K$, $|x|, |y| \leq Kn_k^{b/2}$. $\square$

Nous revenons maintenant à la preuve du théorème. Nous devons montrer que, pour tout $p \geq 1$ et pour $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Gamma_{a_1}^n, \dots, \Gamma_{a_p}^n) = (\Gamma_{a_1}, \dots, \Gamma_{a_p})$$

avec convergence en distribution. Nous nous contenterons de traiter le cas $p = 2$. Les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 2.2 montrent que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Gamma_{a_2}^n - \Gamma_{a_1}^n - (\theta \log n)^{-1} I(n^{a_1}, n^{a_2})) = 0, \quad (3.e)$$

avec convergence en probabilité. D'autre part le théorème 2.1 entraîne que la suite des lois de $(\Gamma_{a_1}^n, \Gamma_{a_2}^n)$ est tendue; si (U, V) est un couple de variables aléatoires dont la loi est une valeur d'adhérence de cette suite, on a

$$U \stackrel{(d)}{=} a_1 N^2, V \stackrel{(d)}{=} a_2 N^2$$

et, d'après (3.e) et le lemme 3.2, $V - U$ est indépendante de U . Cela entraîne aussitôt que:

$$(U, V) \stackrel{(d)}{=} (\Gamma(a_1), \Gamma(a_2)). \quad \square$$

On peut donner une description simple du comportement de Γ après n'importe quel instant $a > 0$ (la description à partir de l'instant 0 est un peu plus complexe car la trajectoire de Γ possède presque sûrement une infinité de sauts au voisinage de 0). On suppose qu'on a choisi la version de Γ qui est croissante et càdlàg. Soit $a > 0$, pour tout $b \geq a$ et tout $\lambda > 0$,

$$E[\exp(-\lambda(\Gamma_b - \Gamma_a))] = \left(\frac{1 + 2\lambda a}{1 + 2\lambda b} \right)^{1/2},$$

d'où:

$$P[\Gamma_b = \Gamma_a] = \left(\frac{a}{b} \right)^{1/2}.$$

Posons $T_a^1 = \inf\{b > a; \Gamma_b \neq \Gamma_a\}$. La loi de T_a^1 est donnée par:

$$P[T_a^1 > b] = \left(\frac{a}{b} \right)^{1/2}. \quad (3.f)$$

On vérifie d'autre part que conditionnellement à $\{T_a^1 = b\}$, la loi de $\Gamma_b - \Gamma_a$ est une loi exponentielle d'espérance $2b$.

Plus généralement on peut définir par récurrence les temps de sauts successifs après a :

$$T_a^{p+1} = \inf\{s > T_a^p; \Gamma_s \neq \Gamma_{T_a^p}\} \quad (p \geq 1).$$

La propriété de Markov montre que, conditionnellement à $T_a^p = b$ la loi de T_a^{p+1} est donnée par:

$$P[T_a^{p+1} > c] = \left(\frac{b}{c} \right)^{1/2}.$$

De plus, conditionnellement à $\{T_a^{p+1} = c\}$ la loi de $\Gamma(T_a^{p+1}) - \Gamma(T_a^p)$ est une loi exponentielle d'espérance $2c$. On obtient ainsi une description complète de la trajectoire de Γ après l'instant a .

Cette description suggère l'interprétation probabiliste suivante du théorème 3.1 (soulignons ici qu'il ne s'agit que d'une interprétation et non de résultats rigoureux). En reprenant les notations de la preuve du théorème il semble plausible qu'on ait, pour $a < b$,

$$P[I(n^a, n^b) = 0] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b} \right)^{1/2}. \quad (3.g)$$

Soit $\sigma_a^{(n)} = \inf\{b > a; I(n^a, n^b) > 0\}$. La loi asymptotique de $\sigma_a^{(n)}$ est donnée par (3.g). D'autre part, conditionnellement à $\sigma_a^{(n)} = b$ on a, par exemple,

$$X_{n^b} \in Y(n^a, n^b).$$

Ecrivons $X_{n^b} = Y_{\alpha n^b}$, pour un $\alpha \leq 1$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on écrit, sans trop se soucier de rigueur:

$$\begin{aligned} I(n^a, (1+\varepsilon)n^b) &\simeq |X(n^b, (1+\varepsilon)n^b) \cap Y(\alpha n^b, (1+\varepsilon)n^b)| \\ &\quad + |X(n^b, (1+\varepsilon)n^b) \cap Y(n^a, \alpha n^b)|. \end{aligned}$$

Chacun des deux termes du membre de droite de la dernière égalité s'interprète comme le nombre de points d'intersection des trajectoires de deux marches aléatoires issues du même point, sur des intervalles de temps dont la longueur est de l'ordre de grandeur de n^b . En se rappelant le théorème 2.1 on peut alors écrire, toujours conditionnellement à $\sigma_a^{(n)} = b$:

$$(\theta \log n)^{-1} I(n^a, (1+\varepsilon)n^b) \simeq bN^2 + bN'^2,$$

avec N, N' deux variables normales centrées réduites indépendantes. Comme $N^2 + N'^2$ suit une loi exponentielle d'espérance deux on retrouve ainsi la loi des sauts du processus limite Γ .

Il semble difficile de justifier rigoureusement les raisonnements ci-dessus. Il serait pourtant intéressant de pouvoir établir (3.g), qui serait alors à rapprocher des résultats obtenus par Lawler [6, 7]: dans le cas particulier où X, Y sont deux marches aléatoires simples issues du même point, Lawler a montré que $P[I(1, n) = 0]$ est, en un certain sens, de l'ordre de $(\log n)^{-1/2}$. Remarquons que la preuve du théorème 3.1 entraîne seulement que, pour $a < b$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P[I(n^a, n^b) = 0] \leq \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2}.$$

Remarques.

1) Une autre approche, impliquant davantage de calculs, du théorème 3.1 aurait été d'utiliser la méthode des moments pour montrer la convergence en distribution de $(\theta \log n)^{-1} I(n^a, n^b)$ (si $a < b$). On remarque d'abord qu'on peut remplacer $I(n^a, n^b)$ par:

$$J(n^a, n^b) = |X(0, \infty) \cap Y(0, \infty) \cap \{y; n^{a/2} \leq |y| \leq n^{b/2}\}|.$$

Ensuite on s'inspire de la méthode de preuve du théorème 2.1 pour estimer les moments de $J(n^a, n^b)$. Les calculs sont un peu plus difficiles que pour le théorème 2.1 et on doit notamment utiliser l'identité suivante, qui découle du lemme 2.5: pour tout $p \geq 1$, et tout $l \in \{1, \dots, p\}$,

$$|\{(\tau, \gamma) \in \Omega_p; \gamma(1) = l\}| = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2l-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2l} 2^{p-1} (p-1)!$$

On trouve finalement, pour tout $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\theta \log n)^{-p} E[(J(n^a, n^b))^p] &= 2^p! \sum_{l=1}^p \frac{1 \times 3 \times \dots \times 2l-1}{2 \times 4 \times \dots \times 2l} \binom{p-1}{l-1} (b-a)^l a^{p-l} \\ &= E[(\Gamma(b) - \Gamma(a))^p]. \end{aligned}$$

2) Il est intéressant de rapprocher le théorème 3.1 d'un résultat obtenu par Kasahara et Kotani [5] dans une autre situation critique, l'étude asymptotique des fonctionnelles additives intégrables du mouvement brownien plan (ce problème conduit aux mêmes résultats que l'étude du nombre de passages en 0 d'une "bonne" marche aléatoire plane récurrente). Soit W un mouvement brownien plan et $A = (A_t, t \geq 0)$ une fonctionnelle additive intégrable de W , par exemple:

$$A_t = \int_0^t f(W_s) ds$$

pour une certaine fonction f intégrable. Supposons:

$$\bar{f} = \int f(x) dx \neq 0.$$

Pour tout $n \geq 1$ soit $\bar{\Gamma}^n$ le processus défini par:

$$\bar{\Gamma}_t^n = 2\pi(\bar{f} \cdot \log n)^{-1} A_{n^t} \quad (t \geq 0).$$

Kasahara et Kotani montrent que la suite $\bar{\Gamma}^n$ converge quand n tend vers l'infini vers $\bar{\Gamma}$, où $\bar{\Gamma}$ est l'unique processus à accroissements indépendants tel que, pour tout $t \geq 0$, $\bar{\Gamma}_t$ suit une loi exponentielle d'espérance t . On peut donner des trajectoires de $\bar{\Gamma}$ une description exactement analogue à celle que nous avons donnée plus haut pour Γ . Il suffit de remplacer (3.f) par:

$$P[\bar{\Gamma}(b) = \bar{\Gamma}(a)] = \frac{a}{b} \quad (a < b).$$

Remarquons enfin que Kasahara et Kotani montrent la convergence en loi de la suite $\bar{\Gamma}^n$ au sens de la topologie $M1$ de Skorokhod (voir Skorokhod [13] pour une définition), ce qui est légèrement plus fort que la convergence des lois marginales fini-dimensionnelles. En fait il n'est pas très difficile de montrer que dans la situation du théorème 3.1 on a aussi convergence en loi de la suite Γ^n au sens de la topologie $M1$ de Skorokhod.

(3.2)

Nous donnons maintenant le résultat analogue au théorème 3.1 dans l'autre situation critique pour les problèmes d'intersection: X, Y, Z désignent trois marches aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^3$, satisfaisant les hypothèses (H1), (H2) de l'introduction. On reprend les notations de (2.2).

Théorème 3.3. Soient $\theta = (2\pi)^{-2} qq'q'' C(A, A', A'')$ et, pour tout $n \geq 1$, $A^n = (A_t^n, t \geq 0)$ le processus défini par:

$$A_t^n = (\theta \log n)^{-1} I_{[n^t]}.$$

Alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = A,$$

au sens de la convergence des lois marginales fini-dimensionnelles, le processus A étant défini comme l'unique processus à accroissements indépendants (non stationnaires) tel que, pour tout $t \geq 0$, A_t suit une loi gamma de paramètre $1/4$ de moyenne t .

La preuve du théorème 3.3 est tout à fait semblable à celle du théorème 3.1 et sera laissée au lecteur.

Pour $m \leq n$, soit:

$$I(m, n) = |X(m, n) \cap Y(m, n) \cap Z(m, n)|.$$

On déduit du théorème 3.3 que, pour $a < b$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P[I(n^a, n^b) = 0] \leq P[A(b) = A(a)] = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/4}.$$

Il semble plausible qu'on ait, à l'instar de (3.g):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[I(n^a, n^b) = 0] = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/4}.$$

Ce résultat serait à nouveau à rapprocher des travaux de Lawler [8] qui montrent dans le cas où X, Y, Z sont trois marches aléatoires simples issues du même point que $P[I(1, n) = 0]$ est de l'ordre de $(\log n)^{-1/4}$.

4. Quelques résultats concernant le mouvement brownien

(4.1)

L'objet de cette partie est d'étendre certains résultats des parties précédentes lorsque les marches aléatoires sont remplacées par des mouvements browniens. Pour commencer soient B, B' deux mouvements browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^4$. On sait que les trajectoires de B et B' n'ont pas de point commun, sauf éventuellement leur point de départ. En revanche elles se rapprochent l'une de l'autre à des instants arbitrairement grands. De façon précise, pour tous $\varepsilon > 0$ et $N > 0$ on peut trouver des instants $s, t \geq N$ tels que $|B_s - B'_t| \leq \varepsilon$.

Une façon d'étudier ce phénomène consiste à introduire les saucisses de Wiener S_t^ε et $S'_t{}^\varepsilon$ associées respectivement à B et B' . Pour tout $t \geq 0$, la saucisse de Wiener de rayon ε associée à B est définie par:

$$S_t^\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^4; \inf(|B_s - y|; s \leq t) \leq \varepsilon\}.$$

On étudie ensuite le comportement asymptotique de $m(S_t^\varepsilon \cap S'_t{}^\varepsilon)$ quand t tend vers l'infini (m désigne la mesure de Lebesgue). Un changement d'échelle permet de se ramener au cas $\varepsilon = 1$.

Une autre approche, qui sera développée en (4.2), consiste à considérer une fonction continue à support compact g sur $\mathbb{R}^4$ et à étudier le comportement asymptotique de:

$$\int_0^t \int_0^t g(B_u - B'_v) du dv.$$

Théorème 4.1. *Si B, B' sont deux mouvements browniens indépendants dans $\mathbb{R}^4$, et S_t, S'_t les saucisses de Wiener de rayon 1 associées respectivement à B et B' ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\log t)^{-1} m(S_t \cap S'_t) = \pi^2 N^2,$$

avec convergence en distribution, N désignant une variable normale centrée réduite.

Nous ne démontrerons pas ici le théorème 4.1, car sa preuve est analogue à celle du théorème 2.1. Indiquons seulement comment on se ramène aux calculs de la preuve de ce dernier théorème. On remarque d'abord qu'on peut remplacer $m(S_t \cap S'_t)$ par $m(S_\infty \cap S'_\infty \cap B(0, t^{1/2}))$. Ensuite on utilise la méthode des moments et on écrit, pour tout $p \geq 1$:

$$E[(m(S_\infty \cap S'_\infty \cap B(0, t^{1/2})))^p] = \int_{(B(0, t^{1/2}))^p} dy_1 \dots dy_p P\left[\bigcap_{i=1}^p \{y_i \in S_\infty \cap S'_\infty\}\right].$$

Pour se ramener aux calculs de la partie 2 il suffit alors d'utiliser l'identité, pour $x, y \in \mathbb{R}^4$,

$$P[y \in S_\infty / B_0 = x] = |y - x|^{-2} \wedge 1.$$

Remarquons que, bien que les preuves des théorèmes 2.1 et 4.1 soient très semblables, il ne semble pas facile de déduire l'un de ces deux résultats de l'autre. Le théorème suivant correspond à l'autre situation critique pour les problèmes d'intersection et est l'analogue du théorème 2.6.

Théorème 4.2. *Si B, B', B'' sont trois mouvements browniens indépendants dans $\mathbb{R}^3$ et S_t, S'_t, S''_t les saucisses de Wiener de rayon 1 associées respectivement à B, B', B'' ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\log t)^{-1} m(S_t \cap S'_t \cap S''_t) = 2\pi U,$$

où la convergence a lieu en distribution et U suit une loi gamma de paramètre $1/4$, de moyenne 1.

(4.2)

Soient à nouveau B, B' deux mouvements browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^4$. Nous nous proposons maintenant d'étudier le comportement asymptotique, quand $t \rightarrow \infty$, des intégrales doubles

$$\int_0^t \int_0^t g(B_u - B'_v) du dv,$$

où g est une fonction continue à support compact.

D'une certaine façon ce problème généralise celui de l'étude asymptotique des fonctionnelles additives du mouvement brownien, pour lequel la dimension critique était 2 (voir la remarque 2 de la partie 3). En dimension $d \neq 4$ on obtient aisément les résultats suivants:

· si $d = 1, 2, 3$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{d/2-2} \int_0^t \int_0^t g(B_u - B'_v) du dv = \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \right) \alpha([0; 1]^2),$$

où la convergence a lieu en distribution et $\alpha([0; 1]^2)$ désigne le temps local d'intersection sur $[0; 1]^2$ de deux mouvements browniens indépendants dans $\mathbb{R}^d$ issus du même point (voir [4] pour une définition précise).

· si $d \geq 5$,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |g(B_u - B'_v)| du dv < \infty, \quad P\text{-p.s.}$$

Théorème 4.3. *Si g est continue à support compact sur $\mathbb{R}^4$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\log t)^{-1} \int_0^t \int_0^t g(B_u - B'_v) du dv = (4\pi^2)^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^4} g(x) dx \right) N^2,$$

avec convergence en distribution, N désignant une variable normale centrée réduite.

La preuve du théorème 4.3 suit encore le même schéma que celle du théorème 2.1. On utilise à nouveau la méthode des moments et on commence par écrire, pour tout entier $p \geq 1$,

$$E \left[\left(\int_0^t \int_0^t g(B_u - B'_v) du dv \right)^p \right] = \int_0^t \dots \int_0^t du_1 \dots du_p dv_1 \dots dv_p E \left[\prod_{i=1}^p g(B_{u_i} - B'_{v_i}) \right].$$

Cette dernière intégrale peut être réécrite en faisant intervenir la densité de transition gaussienne. Ensuite, au moyen de quelques estimations techniques on se ramène à des calculs similaires à ceux de la preuve du théorème 2.1.

Remarque. Il est aussi intéressant d'étudier le comportement asymptotique des intégrales doubles

$$\int_0^t \int_0^t g(B_u - B_v) du dv,$$

où B est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et g est continue à support compact. Nous renvoyons à Yor [14], [15] et Le Gall [9] (cas $d=2$) pour une étude approfondie de ce problème. Les résultats obtenus en dimension deux et trois sont liés à l'existence d'une "bonne renormalisation" pour les intersections de la trajectoire brownienne avec elle-même.

Nous terminerons en donnant l'analogie du théorème 4.3 dans l'autre situation critique: B, B', B'' sont maintenant trois mouvements browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 4.4. *Si g est continue à support compact sur $(\mathbb{R}^3)^2$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\log t)^{-1} \int_0^t \int_0^t \int_0^t g(B_u - B'_v, B'_v - B''_w) du dv dw = (4\pi^2)^{-1} \left(\int_{(\mathbb{R}^3)^2} g(x, y) dx dy \right) U,$$

où la convergence a lieu en distribution et U suit une loi gamma de paramètre $1/4$ de moyenne 1.

Bibliographie

1. Aizenman, M.: Geometric analysis of ϕ^4 fields and Ising models. Commun. Math. Phys. **86**, 1–48 (1982)
2. Erdős, P., Taylor, S.J.: Some intersection properties of random walk paths. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **11**, 231–248 (1960)
3. Felder, G., Fröhlich, J.: Intersection properties of simple random walks: a renormalization group approach. Commun. Math. Phys. **97**, 111–124 (1985)
4. Geman, D., Horowitz, J., Rosen, J.: A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. Ann. Probab. **12**, 86–107 (1984)
5. Kasahara, Y., Kotani, S.: On limit processes for a class of additive functionals of recurrent diffusion processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **49**, 133–153 (1979)
6. Lawler, G.F.: The probability of intersection of independent random walks in four dimensions. Commun. Math. Phys. **86**, 539–554 (1982)
7. Lawler, G.F.: Intersections of random walks in four dimensions. II. Commun. Math. Phys. **97**, 583–594 (1985)
8. Lawler, G.F.: The probability of intersection of three independent random walks in three dimensions (preprint)

9. Le Gall, J.-F.: Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. Séminaire de Probab. XIX. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1123. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1985, pp. 314–331
10. Le Gall, J.-F.: Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien (preprint, à paraître dans Ann. Probab.)
11. Le Gall, J.-F.: Propriétés d'intersection des marches aléatoires. I. Convergence vers le temps local d'intersection. Commun. Math. Phys. **104**, 467–503 (1986)
12. Spitzer, F.: Principles of random walk. Princeton, NJ: Van Nostrand 1964
13. Skorokhod, A.V.: Limit theorems for stochastic processes. Theory Probab. Appl. **1**, 261–290 (1956)
14. Yor, M.: Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. Séminaire de Probab. XIX. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1123. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1985, pp. 350–365
15. Yor, M.: Renormalisation et convergence en loi pour certaines intégrales multiples associées au mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$ (à paraître)

Communicated by J. Fröhlich

Reçu le 27 septembre 1985