

Das allgemeine Exponential-Verbundgraphentheorem

PAUL ZIESCHE

Abteilung für Theoretische Physik
Pädagogisches Institut Dresden

Eingegangen am 1. Februar 1967

Abstract. General theorems concerning reordering of products of exponential functionals are formulated and proved. Their applicability in different fields of many particle theory is mentioned.

Einleitung

In der Vielteilchentheorie kommt bei der (störungstheoretischen) Behandlung der Teilchenwechselwirkung wiederholt die rein mathematische Aufgabe vor, in Ausdrücken vom Typ

$$e^{g\left(\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)} e^{f(\varphi)}, \quad e^{g\left(\frac{\delta}{\delta\psi}, \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right)} e^{f(\bar{\psi}, \psi)}, \quad e^{g\left(\frac{\delta}{\delta\psi}, \frac{\delta}{\delta\bar{\varphi}}, \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\right)} e^{f(\bar{\psi}, \varphi, \psi)}$$

die Differentionen auszuführen, d. h. die Differentialoperatoren nach rechts zu tauschen. Erstmals traten solche Aufgaben bei der Entwicklung relativistischer Quantenfeldtheorien im Zusammenhang mit dem von HORI, ANDERSON und MATSUBARA kompakt formulierten Wickschen Theorem [1—5] auf, später auch bei der formalen Lösung von Funktionaldifferentialgleichungen für die zuerst von BOGOLJUBOW und SCHWINGER [6—8] eingeführten erzeugenden Funktionale [9—14]. Mit der Übertragung quantenfeldtheoretischer Methoden auf nicht-relativistische Vielteilchensysteme sowie auf Probleme der quantenmechanischen und klassischen¹ Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichts²-Statistik wurden auch in diesen Gebieten Spezialfälle der genannten Aufgaben immer wieder behandelt. Jedesmal traten als Ergebnis sog. Verbundgraphentheoreme auf, nach denen sich die aus den Bauelementen von $g(\dots)$ bzw. $f(\dots)$ aufgebauten, aber nicht faktorisierten Terme

¹ In der klassischen Gleichgewichts-Statistik wird dies durch Anwendung und Ausbau des zuerst von SCHÖNBERG entwickelten klassischen Besetzungszahl-Formalismus ermöglicht [15, 16].

² In der quantenmechanischen und klassischen Nichtgleichgewichts-Statistik wird dies durch Überführung der von-Neumann- bzw. Liouville-Gleichung in die Bewegungsgleichungen für die erzeugenden Funktionale der reduzierten Dichtematrizen bzw. Verteilungsfunktionen erreicht [17—19].

wieder in Exponentialform ansammeln. Im folgenden wird ein alle diese Spezialfälle enthaltendes allgemeines Exponential-Verbundgraphentheorem bewiesen, wobei der Beweis überraschenderweise formal auf entsprechende Aufgaben der Mayerschen Clustertheorie [20, 21] zurückgeführt werden kann, die in der klassischen Gleichgewichts-Statistik entwickelt wurde, lange bevor die quantenfeldtheoretischen Methoden zur Verfügung standen und ihre Anwendbarkeit auch auf die klassische Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichts-Statistik bekannt war [15—19]. Übrigens sind auch die Operatorenumordnungen vom obengenannten Typ, die beim klassischen Grenzübergang entweder mit den (in der Kohärenztheorie der Laser auftretenden) Zuständen maximaler Bestimmtheit oder mit der Weyl-Korrespondenz und der Wigner-Transformation zusammenhängen.

Die Formeln sind abschnittsweise durchnummeriert und werden zusammen mit den Abschnittsnummern zitiert. Zur formalen Vereinfachung wird in Anlehnung an SYMANZIK [10] für Mehrfachintegrale eine abkürzende Schreibweise benutzt.

1. Allgemeine Kontraktionsaufgabe mit einem Operator

1.1. Formulierung der Aufgabe

Hier wird die Aufgabe

$$e^{g\left(\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)} e^{f(\varphi)} = e^{\sum_s \frac{1}{s!} g_s \frac{\delta^s}{\delta\varphi^s}} e^{\sum_r \frac{1}{r!} \varphi^r f_r} \tag{1}$$

behandelt. In den Taylor/Volterra-Reihen der Funktionale $g(\dots)$ und $f(\dots)$ wird in Anlehnung an die Einsteinsche Summenregel konsequent die Abkürzung

$$\begin{aligned} \varphi^r f_r &\equiv \int dx_1 \varphi(x_1) \dots \int dx_r \varphi(x_r) f_r(x_1, \dots, x_r) \\ &= \int dx_1 \dots \int dx_r f_r(x_1, \dots, x_r) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_r) \equiv f_r \varphi^r \end{aligned} \tag{2}$$

benutzt, wobei x gegebenenfalls einen ganzen Satz von Variablen z. B. (r, t) oder (r, p) usw. bedeutet. Die Koeffizientenfunktionen $f_r(\dots)$ und $g_s(\dots)$ mögen entsprechend den physikalischen Aufgabenstellungen so beschaffen sein, daß sie nicht in Faktoren mit voneinander unabhängigen Variablengruppen zerfallen (Verbundeigenschaft). Die Entwicklung von $g(\dots)$ legt ein *schrittweises Vorgehen* nahe:

$$e^{g\left(\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)} e^{f(\varphi)} = \dots e^{\frac{1}{3!} g_3 \frac{\delta^3}{\delta\varphi^3}} e^{\frac{1}{2!} g_2 \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}} e^{g_1 \frac{\delta}{\delta\varphi}} e^{f(\varphi)} \equiv \dots e^L e^K e^J e^{f(\varphi)}. \tag{3}$$

Auf diese Weise werden nacheinander die „Einer“- , „Zweier“- , „Dreier“- Kontraktionen usw. hergestellt.

1.2. Herstellung der Einer- und Zweier-Kontraktionen

Der erste Schritt ist mit der Taylor/Volterra-Entwicklung trivial:

$$e^J e^{f(\varphi)} = e^{g_1 \frac{\delta}{\delta \varphi}} e^{f(\varphi)} = e^{f(\varphi + g_1)}. \tag{1}$$

In diesem so entstandenen Ausdruck verknüpft der *Operator der Zweier-Kontraktionen* $K \equiv (1/2!) g_2 \delta^2 / \delta \varphi^2$ beim nächsten Schritt in (11.3) alle möglichen Paare $\varphi_1 \equiv \varphi(x_1)$, $\varphi_2 \equiv \varphi(x_2)$:

$$\overline{\varphi_1 \varphi_2} \equiv K \varphi_1 \varphi_2 = \frac{1}{2!} g_2 \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2} \varphi_1 \varphi_2 = g_2(1, 2), \tag{2}$$

$$\text{da } \left[\frac{\delta}{\delta \varphi(x_1)}, \varphi(x_2) \right] = \delta(x_1 - x_2).$$

Daß in (11.3) jede Potenz K^n entsprechend der Exponentialform $\exp K$ mit einem Faktor $1/n!$ versehen ist, bedeutet, daß jede Kontraktion eines Operatorprodukts, d. h. jede Verteilung von Haken genau einmal vorkommt.

Zweckmäßig stellt man nun zunächst nur innerhalb von $f(\varphi + g_1)$ alle Zweierkontraktionen her

$$e^K f(\varphi + g_1) \equiv \overline{f}(\varphi) \tag{3}$$

und benutzt das dabei entstehende, von $f(\varphi + g_1)$ natürlich verschiedene und hier mit $\overline{f}(\varphi)$ bezeichnete Funktional von φ für die weiteren Kontraktionen als Bauelement. Beim vollständigen Kontrahieren eines Produkts von zwei verschiedenen Funktionalen $f_1(\varphi)$ und $f_2(\varphi)$

$$e^K f_1 f_2 = e^{i, j \sum_{i=1}^2 K_{ij}} f_1 f_2 = e^{K_{12} + K_{21}} \overline{f_1} \overline{f_2} \tag{4}$$

wird der Kontraktionsoperator durch die *Produktregel der Differentialrechnung* automatisch in eine Summe zerlegt

$$K = \frac{1}{2} \overline{\varphi} \overline{\varphi} \frac{\delta^2}{\delta \varphi \delta \varphi} = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \overline{\varphi} \overline{\varphi} \frac{\delta}{\delta \varphi_i} \frac{\delta}{\delta \varphi_j}$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} \overline{\varphi} \overline{\varphi} \frac{\delta}{\delta \varphi_i} \frac{\delta}{\delta \varphi_i} + \sum_{i < j} \overline{\varphi} \overline{\varphi} \frac{\delta}{\delta \varphi_i} \frac{\delta}{\delta \varphi_j} \equiv \sum_i K_{ii} + \sum_{i < j} K_{ij}, \tag{5}$$

wobei die mit einem Index i bzw. j versehenen Differentialoperatoren nur auf den zugehörigen Faktor f_i bzw. f_j wirken. Daher stellt K_{11} nur die Kontraktionen innerhalb f_1 her, K_{22} nur innerhalb f_2 . Zwischen den so entstehenden Termen $\overline{f_1}$, $\overline{f_2}$ stellt dann weiter K_{12} alle möglichen Verknüpfungen von Operatorenpaaren her, von denen ein Operator zu $\overline{f_1}$ und der andere zu $\overline{f_2}$ gehört. Je nachdem wieviele Kontraktionspartner in $\overline{f_1}$ und $\overline{f_2}$ noch zur Verfügung stehen, können zwischen $\overline{f_1}$ und $\overline{f_2}$ eine Kontraktion, zwei Kontraktionen usw. hergestellt werden, für die zusammenfassend die folgende Kennzeichnung durch eine dick gezeichnete

trien jeweils g gleiche numerierte Cluster entstehen, z. B.

$$\begin{array}{c} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \\ \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \\ \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \end{array} & \begin{array}{c} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \\ \text{3} \quad \text{2} \quad \text{1} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \\ \text{3} \quad \text{1} \quad \text{2} \end{array} & \begin{array}{c} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \\ \text{2} \quad \text{1} \quad \text{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \\ \text{2} \quad \text{3} \quad \text{1} \end{array} & \begin{array}{c} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \\ \text{1} \quad \text{3} \quad \text{2} \end{array} \end{array} \right\} z (\text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○}) = 3. \quad (11)$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{g(\text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○}) = 2}$$

Daher gilt ganz allgemein $zg = n!$ für jede Cluster-Struktur mit n Punkten. In der Tabelle sind weitere Beispiele für die *Symmetriefaktoren* von Clustern angegeben. Übrigens stellt z für jeden Cluster zugleich die Zahl derjenigen Zerschneidemöglichkeiten des zugehörigen symmetriereichsten Cluster gleicher „Ordnung“ n (in dem jeder mit jedem Punkt verbunden ist und der daher den Symmetriefaktor $g = n!$ besitzt) dar, die zu dem betreffenden Cluster führen. Überhaupt entstehen wie bei allen Cluster- und Graphen-Entwicklungen aus den

Tabelle 1. Clusterstrukturen und ihre Symmetriefaktoren

Cluster-Struktur	g	z
○	1	1
○—○	2	1
	3!	1
○—○—○	2	3
	4!	1
	4	3!
	4 · 2	3
	2	12
	3!	4
○—○—○—○	2	12

symmetriereichsten Verbundclustern bzw. -graphen alle übrigen Cluster bzw. Graphen durch sukzessives Zerschneiden. Wie die in der Tabelle

angegebenen Beispiele zeigen, entstehen offenbar genau die von der klassischen Gleichgewichtstatistik her bekannten Mayerschen Cluster [20, 21]. Das ist auch nicht weiter verwunderlich, da die Konstruktion der Cluster gemäß (7) in beiden Fällen genau die gleiche ist.

Bei dem in $\exp K \exp f$ benötigten Übergang zu identischen (sozusagen ununterscheidbaren) Funktionalen $f_1 = f_2 = \dots$ werden die jeweils z verschiedenen numerierten Cluster gleicher Struktur identisch, d. h. erhalten gleiche mathematische Bedeutung. Um den Beitrag der z_γ numerierten Cluster gleicher Struktur γ wiederzugeben, genügt es daher, den zugehörigen unnummerierten Cluster mit z_γ zu multiplizieren:

$$z_\gamma \mathbb{Z}_\gamma = z_\gamma (\overline{f \dots f})_\gamma \equiv n_\gamma! \gamma \curvearrowright \gamma = \frac{1}{g_\gamma} \mathbb{Z}_\gamma = \frac{1}{g_\gamma} (\overline{f \dots f})_\gamma, z_\gamma g_\gamma = n_\gamma!. \quad (12)$$

Das schraffierte Viereck steht symbolisch für irgendeine Clusterstruktur γ der \overline{f} . Im allgemeinen besteht nun ein beliebiger zu $(\exp K) f^n$ beitragender Cluster aus einem *Produkt der Verbundcluster* γ_i , nämlich aus n_1 Verbundclustern γ_1 , aus n_2 Verbundclustern γ_2 usw., so daß sich der Symmetriefaktor $g_{n_1 n_2 n_3 \dots}$ dieses Produktclusters $\gamma_{n_1 n_2 \dots}$ in einfacher Weise auf die Symmetriefaktoren g_i der konstituierenden Verbundcluster γ_i zurückführen läßt:

$$g_{n_1 n_2 \dots} = n_1! n_2! \dots g_1^{n_1} g_2^{n_2} \dots \curvearrowright \gamma_{n_1 n_2 \dots} = \frac{\gamma_1^{n_1}}{n_1!} \frac{\gamma_2^{n_2}}{n_2!} \dots \quad (13)$$

Damit liefern nun die Zweier-Kontraktionen insgesamt

$$e^K e^f = e^K \sum_n \frac{f^n}{n!} = \sum_{n_1, n_2, \dots} \frac{\gamma_1^{n_1}}{n_1!} \frac{\gamma_2^{n_2}}{n_2!} \dots = e^{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots} = e^\gamma$$

$$K = \frac{1}{2!} g_2 \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2}$$

(14)

mit

$$\begin{aligned} \gamma(\varphi) &= \sum_i \gamma_i(\varphi) = \sum_i \frac{1}{g_i} (\overline{f \dots f})_i \\ &= \sum_i \frac{1}{g_i} \text{[diagram]}_i = \circ + \frac{1}{2} \text{[diagram]} + \frac{1}{3!} \text{[diagram]} + \frac{1}{2} \text{[diagram]} + \frac{1}{4!} \text{[diagram]} + \\ &+ \frac{1}{4} \text{[diagram]} + \frac{1}{8} \text{[diagram]} + \frac{1}{2} \text{[diagram]} + \frac{1}{3!} \text{[diagram]} + \frac{1}{2} \text{[diagram]} + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

als Summe aller durch Zweier-Kontraktionen entstehenden Verbundcluster.

Bei dem in $\exp L \exp \gamma$ benötigten Übergang zu identischen Funktionalen $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$ vereinfacht sich (5) wieder, da dann alle Cluster gleicher Struktur auch die gleiche mathematische Bedeutung aufweisen. Alle topologischen Überlegungen von Abschnitt 12 können sinngemäß übernommen werden, woraus sofort das Verbundclustertheorem auch für die Dreier-Kontraktionen folgt:

$$e^L e^\gamma = e^{\odot} + \frac{1}{2} \text{⊖} + \frac{1}{3!} \text{⊗} + \frac{1}{2} \text{⊗} + \frac{1}{2} \text{⊗} + \frac{1}{3!} \text{⊗} + \frac{1}{2} \text{⊗} + \frac{1}{3!} \text{⊗} + \dots \quad (6)$$

Die dabei auftretende Verbundcluster-Summe spielt dann als Funktional von φ bei dem im nächsten Schritt herzustellenden Vierer-Kontraktionen die Rolle des elementaren Bausteins.

Die systematische Fortführung des geschilderten Vorgehens führt zu immer komplizierter werdenden Clustern und liefert schließlich das *allgemeine Exponential-Verbundcluster-Theorem*

$$\boxed{e^{g\left(\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)} e^f(\varphi) = e^{\underline{gf}(\varphi)} \quad (7)}$$

$$\underline{gf}(\varphi) = \left(e^{g\left(\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)} e^f(\varphi) \right)_{\text{Verbund}}$$

$$= \sum_{r_1, r_2, \dots} \left(e^{g\left(\frac{\delta}{\delta\varphi}\right)} \frac{\left(\frac{\varphi}{1!} f_1\right)^{r_1}}{r_1!} \frac{\left(\frac{\varphi^2}{2!} f_2\right)^{r_2}}{r_2!} \dots \right)_{\text{Verbund}}$$

mit $\underline{gf}(\varphi)$ als der Summe aller aus den Koeffizientenfunktionen g_s, f_r konstruierten Verbundterme. Dabei werden also in dem Produkt $(\varphi f)^{r_1} (\varphi^2 f_2)^{r_2} \dots$ durch den Differentialoperator $\exp g(\delta/\delta\varphi)$ sukzessive einzelne, an allen möglichen Stellen stehende Feldgrößen, alle möglichen Paare, Tripel, Quadrupel von Feldgrößen usw. durch g_1, g_2, g_3, g_4 usw. ersetzt, aber so, daß nur verbundene Terme entstehen. Die Aussagen des Exponential-Verbundcluster-Theorems bestehen also darin, daß aus der Verbundeigenschaft der Funktionale $g(\dots)$ und $f(\dots)$ die Verbundeigenschaft des Funktionals $\underline{gf}(\dots)$ folgt und daß sich die Koeffizientenfunktionen von $\underline{gf}(\dots)$ in ganz bestimmter Weise aus denen von $g(\dots)$ und $f(\dots)$ aufbauen³. Gibt man die in (11.1) angegebenen Taylor/Volterra-Reihenfolge von g und f durch Graphen wieder

$$(\leftarrow \equiv \delta/\delta\varphi, \leftarrow \equiv \varphi),$$

³ Die letztere Aussage gilt übrigens auch dann, wenn $g(\dots)$ und $f(\dots)$ und damit auch $\underline{gf}(\dots)$ die Verbundeigenschaft nicht besitzen.

so lautet (7)

$$\begin{aligned} \exp \left[\leftarrow + \frac{1}{2!} \left[\leftarrow \right] + \frac{1}{3!} \left[\left[\leftarrow \right] + \dots \right] \right] \exp \left[\leftarrow + \frac{1}{2!} \left[\leftarrow \right] + \frac{1}{3!} \left[\left[\leftarrow \right] + \dots \right] \right] \\ = \exp \left[\left(\leftarrow + \frac{1}{2!} \left[\leftarrow \right] + \frac{1}{2!} \left[\leftarrow \right] + \frac{1}{2!} \left[\leftarrow \right] + \left[\leftarrow \right] + \dots \right) + \right. \\ \left. + \left(\leftarrow + \left[\leftarrow \right] + \left[\leftarrow \right] + \dots \right) + \left(\left[\leftarrow \right] + \frac{1}{2!} \left[\leftarrow \right] + \dots \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Eine mathematische Verallgemeinerung, die aber für physikalische Anwendungen bislang keine Rolle spielt, entsteht dadurch, daß man den Differentialoperator $\delta/\delta\varphi$ nicht nur auf $f(\varphi)$, sondern weiter nach rechts wirken läßt. Schließlich könnte g noch Feldgrößen φ und f noch Differentialoperatoren $\delta/\delta\varphi$ enthalten:

$$\boxed{N e^{g(\varphi, \frac{\delta}{\delta\varphi})} \left[N e^{f(\varphi, \frac{\delta}{\delta\varphi})} \right] = N e^{gf(\varphi, \frac{\delta}{\delta\varphi})}, \quad N \equiv N_{\varphi, \delta/\delta\varphi}} \quad (8)^4$$

Auch dann besitzt das so definierte Funktional $gf(\dots)$ ebenfalls die Verbundeigenschaft. Bei all diesen Manipulationen ist natürlich angenommen, daß die Funktionale $g(\dots)$ und $f(\dots)$ hinreichend „vernünftig“ sind, so daß die hier vorgenommenen Reihennummern nicht durch mangelnde Konvergenzeigenschaften behindert werden.

Einfachstes, nicht-triviales *Beispiel* für (7) ist die identische Umformung (mit $g_2 = a, f_2 = b$)

$$\begin{aligned} F(\varphi) = e^{\frac{1}{2} a \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2}} e^{\frac{1}{2} \varphi^2 b} = e^{\frac{1}{2} \text{Sp} \left[ab + \frac{1}{2} (ab)^2 + \frac{1}{3} (ab)^3 + \dots \right] + \frac{1}{2} \varphi^2 [b + bab + \dots]} \\ = e^{-\frac{1}{2} \text{Sp} \ln(1-ab) + \frac{1}{2} \varphi^2 (1-ba)^{-1} b}, \end{aligned} \quad (9)$$

die man übrigens in diesem einfachen Fall auch unabhängig vom Verbundcluster-Theorem mit seinen Reihenentwicklungen sofort in geschlossener Form durch Lösung der Funktionaldifferentialgleichungen

$$\left[(1 - ba) \frac{\delta}{\delta\varphi} \right]_x F = (b\varphi)_x F \quad a \frac{\delta}{\delta a} F = \frac{1}{2} a \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2} F \quad (10)^5$$

erhält [12–14].

⁴ Hier ordnet $N_{\varphi, \delta/\delta\varphi}$ alle φ nach links und alle $\delta/\delta\varphi$ nach rechts.

⁵ Hier wird ergänzend zu (11.2) die Schreibung eingeführt:

$$\begin{aligned} (b\varphi)_x = \int dx' b(x, x') \varphi(x'), \quad \left(\frac{\delta}{\delta\varphi} \right)_x = \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}, \\ \left(b a \frac{\delta}{\delta\varphi} \right)_x = \int dx' dx'' b(x, x') a(x', x'') \frac{\delta}{\delta\varphi(x'')}. \end{aligned}$$

Anwendung findet das Verbundcluster-Theorem (7) in der Quantenelektrodynamik, in der klassischen [15, 16] und quantenmechanischen Gleichgewichts-Statistik und bei der Behandlung von Elektron-Phonon-Systemen sowie von Fermisystemen im Grundzustand, aber auch in der klassischen und quantenmechanischen Nichtgleichgewichts-Statistik bei der Entwicklung einer allgemeinen Korrelationsdynamik [17–19].

2. Allgemeine Kontraktionsaufgabe mit mehreren Operatoren

2.1. Formulierung der Aufgabe und schrittweise Lösung

Hier wird die *Aufgabe*

$$e^{g\left(\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}, \frac{\delta}{\delta\psi}\right)} e^{f(\bar{\psi}, \psi)} = e^{\sum_s \frac{1}{s!} \frac{\delta^s}{\delta\bar{\psi}^s} g_s \frac{\delta^s}{\delta\psi^s} e^{\sum_r \frac{1}{r!} \bar{\psi}^r f_r \psi^r}} \quad (1)$$

behandelt. Dabei wird wieder konsequent die Abkürzung

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^r f_r \psi^r &\equiv \int dx_1 dx'_1 \dots \int dx_r dx'_r \bar{\psi}(x_1) \dots \bar{\psi}(x_r) \times \\ &\quad \times f_r(x_1, \dots, x_r; x'_1, \dots, x'_r) \psi(x'_1) \dots \psi(x'_r) \end{aligned} \quad (2)$$

verwendet. Je nachdem, ob mit $\bar{\psi}$, ψ Fermionen oder Bosonen beschrieben werden, treten beim Vertauschen von Feldgrößen Vorzeichenwechsel auf oder nicht. Diese Regel überträgt sich übrigens auch auf die zugehörigen Funktionaldifferentialoperatoren. Bis auf etwaige Vorzeichenwechsel sind die Feldgrößen vertauschbar, da sie, wie hier nicht weiter angeben, hinter entsprechenden Ordnungsoperatoren stehen. Aus Vorzeichenrunden sind auch die Operatoren in (2) „paarweise“ angeordnet.

Auch hier kann die Aufgabe wieder schrittweise behandelt werden:

$$e^{g\left(\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}, \frac{\delta}{\delta\psi}\right)} e^{f(\bar{\psi}, \psi)} = \dots e^{\frac{1}{2!} \frac{\delta^2}{\delta\bar{\psi}^2} g_2 \frac{\delta^2}{\delta\psi^2} e^{\frac{\delta}{\delta\psi} g_1 \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}} e^{f(\bar{\psi}, \psi)}} = \dots e^{L e^K} e^{f(\bar{\psi}, \psi)}. \quad (3)$$

Zunächst verknüpft der bilineare Differentialoperator

$$K \equiv \frac{\delta}{\delta\psi} g_1 \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}} = \pm \text{Sp} g_1 \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}} \frac{\delta}{\delta\psi} \quad (4)^6$$

in $\exp f(\bar{\psi}, \psi)$ alle möglichen Paare $\psi_1 \equiv \psi(x_1)$, $\bar{\psi}_2 \equiv \bar{\psi}(x_2)$

$$\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 = K \psi_1 \bar{\psi}_2 = \pm g_1(1; 2). \quad (5)$$

Dabei liefern die Kontraktionen innerhalb eines Funktionals $f(\bar{\psi}, \psi)$

$$e^K f(\bar{\psi}, \psi) \equiv \bar{f}(\bar{\psi}, \psi) \equiv \circ \quad (6)$$

das Funktional $\bar{f}(\bar{\psi}, \psi)$ als Bauelement für die Kontraktionen in einem Produkt $f_1 f_2 \dots$, für das wieder wegen der Produktregel für Differential-

⁶ Das obere Vorzeichen bezieht sich stets auf Bosonen, das untere auf Fermionen.

operatoren das verallgemeinerte Wick'sche Theorem

$$e^K f_1 \dots f_n = e^{i \sum_j (K_{ij} + K_{ji})} \bar{f}_1 \dots \bar{f}_n$$

$$= \prod_{i < j} (1 + \bar{ij}) \bar{f}_1 \dots \bar{f}_n = \sum_{\underline{\Gamma}} \bar{f}_1 \dots \bar{f}_n \quad K_{ij} = \overline{\psi \psi} \frac{\delta^2}{\delta \bar{\psi}_i \delta \psi_j} \quad (7)$$

entsteht. Daher können auch alle topologischen Überlegungen von Abschnitt 12 sofort übernommen werden, so daß wiederum

$$e^K e^f = e^{\gamma} \quad \gamma = \gamma(\bar{\psi}, \psi) = \circ + \frac{1}{2} \text{---} \circ + \frac{1}{3!} \text{---} \triangle + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \circ + \dots \quad (8)$$

gilt mit $\gamma(\bar{\psi}, \psi)$ als Summe aller aus Paarkontraktionen (5) aufgebauten Cluster. Beim nächsten Schritt dient $\gamma(\bar{\psi}, \psi)$ als Bauelement. Das Vorgehen ist ganz analog zu Abschnitt 12 und liefert auch hier das *Exponential-Verbundcluster-Theorem*

$$e^{g\left(\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}, \frac{\delta}{\delta \psi}\right)} e^{f(\bar{\psi}, \psi)} = e^{gf(\bar{\psi}, \psi)}$$

$$gf(\bar{\psi}, \psi) = \left(e^{g\left(\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}, \frac{\delta}{\delta \psi}\right)} e^{f(\bar{\psi}, \psi)} \right)_{\text{Verbund}} \quad (9)$$

$$= \sum_{r_1, r_2, \dots} \left(e^{g\left(\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}}, \frac{\delta}{\delta \psi}\right)} \frac{\left(\frac{1}{1!} \bar{\psi} f_1 \psi\right)^{r_1}}{r_1!} \frac{\left(\frac{1}{2!} \bar{\psi}^2 f_2 \psi^2\right)^{r_2}}{r_2!} \dots \right)_{\text{Verbund}}$$

Dieses Theorem gilt ebenfalls für die zu (12.8) analoge Verallgemeinerung sowie für den Fall, daß die Funktionale $g(\dots)$ und $f(\dots)$ bei ihrer Taylor/Volterra-Entwicklung auch „nichtdiagonale“ Terme $\bar{\psi}^r f_r \psi^{r'}$ mit $r \neq r'$ enthalten.

Einfachstes *Beispiel* für (9) ist die Beziehung ($g_1 = a, f_1 = b$)

$$F(\bar{\psi}, \psi) = e^{\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} a \frac{\delta}{\delta \psi}} e^{\bar{\psi} b \psi} = e^{\mp \text{Sp} \ln(1 \mp a b) + \bar{\psi}(1 \mp b a)^{-1} b \psi}, \quad (10)$$

die ebenfalls durch Lösung der Funktional-Differentialgleichungen

$$\left[(1 \mp b a) \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} \right]_x F = (b \psi)_x F \quad a \frac{\delta}{\delta a} F = \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} a \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} F \quad (11)$$

gewonnen werden kann [12–14].

Von dem Verbundcluster-Theorem (9) wird in der Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichts-Statistik [15–19] sowie in der relativistischen und nichtrelativistischen Quantenfeldtheorie ausgiebig Gebrauch gemacht.

Schließlich sei noch die *Verallgemeinerung* von (9) bzw. (12.8) auf mehrere Differentialoperatoren angegeben:

$$\boxed{\begin{aligned} & \left[N e^{g\left(\alpha, \beta, \gamma, \dots; \dots \frac{\delta}{\delta \gamma}, \frac{\delta}{\delta \beta}, \frac{\delta}{\delta \alpha}\right)} \right] \left[N e^{f\left(\alpha, \beta, \gamma, \dots; \dots \frac{\delta}{\delta \gamma}, \frac{\delta}{\delta \beta}, \frac{\delta}{\delta \alpha}\right)} \right] \\ & = N e^{gf\left(\alpha, \beta, \gamma, \dots; \dots \frac{\delta}{\delta \gamma}, \frac{\delta}{\delta \beta}, \frac{\delta}{\delta \alpha}\right)} \end{aligned}} \quad (12)$$

$$N \equiv N_{\alpha, \beta, \gamma, \dots; \dots \delta/\delta \gamma, \delta/\delta \beta, \delta/\delta \alpha}.$$

Das Verbundgraphentheorem besagt nun, daß aus der Verbundeigenschaft von $g(\dots)$ und $f(\dots)$ diejenige von $gf(\dots)$ folgt.

2.2. Wicksches Theorem

Häufigste Anwendung finden die in den vorangehenden Abschnitten angegebenen Verbundgraphen-Theoreme im Zusammenhang mit dem Wickschen Theorem. Letzteres macht eine Aussage über *Umordnungen von Operatorenprodukten*. Meist gilt es, die Zeitordnung $T \equiv N_{t>}$, durch die alle Feldoperatoren $\bar{\psi}, \psi, \varphi$ mit nach links zunehmender Zeit geordnet werden, in die sog. Normalordnung $N \equiv N_{+-}$ zu überführen, bei der alle Feldoperatoren $\bar{\psi}, \psi, \varphi$ in einen Positiv- und einen Negativ-Frequenzteil zerlegt und diese Anteile entsprechend geordnet werden. Diese Normalordnung ist stets an einen bestimmten Zustand $> <$ angepaßt, mit dem alle Erwartungswerte gebildet werden und für den die daher nützliche Vakuumeigenschaft $\varphi^{->} = \bar{\varphi}^{->} = \varphi^{-<} = 0$ und $\langle \varphi^{+<} = \langle \bar{\varphi}^{+<} = \langle \varphi^{+>} = 0$ gilt. Bei dieser Umordnung entsteht durch jedes Operatorenpaar $\psi_1, \bar{\psi}_2$ bzw. φ_1, φ_2 ein c -Zahl-Beitrag

$$\begin{aligned} \overline{\psi_1 \bar{\psi}_2} &= (T - N) \psi_1 \bar{\psi}_2 = \theta_{12} [\bar{\psi}_1^-, \bar{\psi}_2^+]_+ - \theta_{21} [\bar{\psi}_2^-, \psi_1^+]_+ = \langle T \psi_1 \bar{\psi}_2 \rangle \\ \overline{\varphi_1 \varphi_2} &= (T - N) \varphi_1 \varphi_2 = \theta_{12} [\varphi_1^-, \varphi_2^+]_- + \theta_{21} [\varphi_2^-, \varphi_1^+]_- = \langle T \varphi_1 \varphi_2 \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Dieser als Wicksches Theorem bezeichnete Sachverhalt wird nach HORI, ANDERSON und MATSUBARA kompakt mit Funktionalableitungen wiedergegeben [2-4]; für die T - N -Umordnung lautet es

$$\boxed{\begin{aligned} T &= N e^{\overline{\psi \bar{\psi}} \frac{\delta^2}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} + \frac{1}{2} \overline{\varphi \varphi} \frac{\delta^2}{\delta \varphi \delta \varphi}} \\ \overline{\psi_1 \bar{\psi}_2} &= (T - N) \psi_1 \bar{\psi}_2, \quad \overline{\varphi_1 \varphi_2} = (T - N) \varphi_1 \varphi_2, \quad \langle N F(\bar{\psi}, \psi, \varphi) \rangle = F(0, 0, 0). \end{aligned}} \quad (2)$$

In der Gleichgewichts-Statistik gilt es oft, die Temperaturordnung $N_{\beta>}$, durch die alle Feldoperatoren mit nach links zunehmender reziproker Temperatur $\beta = 1/kT$ geordnet werden, in eine Ordnung N_{+-} zu überführen, die nach MATSUBARA [4] im Sinne von $\text{Sp} \varrho^0 N_{+-} F(\bar{\psi}, \psi, \varphi) = 0$ an die Spurbildung mit dem ungestörten statistischen Operator ϱ^0 angepaßt ist; weiter spielen die Umordnungen $N_{\beta>} \rightarrow N_{\bar{\psi}, \psi}$ und $N_{\psi, \bar{\psi}} \rightarrow N_{\bar{\psi}, \psi}$

eine Rolle. Für sie gelten zu (2) ganz analoge Theoreme, aus denen bei Anwendung auf Exponentialfunktionale der Zusammenhang mit den vorangehenden Abschnitten unmittelbar hervorgeht.

Gelegentlich interessiert nicht wie in (2) die $T - N$ -Umordnung, sondern die $1 - N$ -Umordnung, d. h. die Herstellung der Normalordnung $N = N_{+-}$ in einfachen (statt zeitgeordneten) Produkten. Dann tritt — bei Anwendung auf Exponential-Funktionale — an die Stelle von (2) die von (11.1) und (21.1) etwas verschiedene Aufgabe

$$\begin{aligned}
 e^f(\bar{\psi}, \psi) &= N e^{\underline{\psi} \bar{\psi} \frac{\delta^2}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} P_+ + \bar{\psi} \psi \frac{\delta^2}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} P_-} e^f(\bar{\psi}, \psi) \\
 \underline{\psi}_1 \bar{\psi}_2 &= (1 - N) \psi_1 \bar{\psi}_2, \quad \bar{\psi}_2 \psi_1 = (1 - N) \bar{\psi}_2 \psi_1, \quad \langle NF(\bar{\psi}, \psi) \rangle = F(0, 0),
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

wobei Projektionsoperatoren P_{\pm}

$$P_{\pm} \bar{\psi} \psi = \begin{cases} 0 \\ \bar{\psi} \psi \end{cases} \quad P_{\pm} \psi \bar{\psi} = \begin{cases} \psi \bar{\psi} \\ 0 \end{cases}
 \tag{4}$$

dafür sorgen, daß je nach der Anordnung der Operatoren die richtigen Kontraktionen entstehen. Auch für (3) gilt ein Exponential-Verbundcluster-Theorem, was im folgenden für den in der Gleichgewichts-Statistik häufig benötigten Sonderfall von (3), nämlich $N = N_{\bar{\psi}, \psi}$, also $\underline{\psi} \bar{\psi} = 0$ abschließend noch bewiesen werden soll:

$$\begin{aligned}
 e^f(\bar{\psi}, \psi) &= N e^{\underline{\psi} \bar{\psi} \frac{\delta^2}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} P_+} e^f(\bar{\psi}, \psi) \\
 \underline{\psi}_1 \bar{\psi}_2 &= (1 - N) \psi_1 \bar{\psi}_2 = [\psi_1, \bar{\psi}_2]_{\mp} \quad \langle NF(\bar{\psi}, \psi) \rangle = F(0, 0).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Da $f(\bar{\psi}, \psi)$ schon normalgeordnet ist, treten Kontraktionen nur zwischen verschiedenen Faktoren auf. Dabei entstehen jedoch Cluster

$$\begin{aligned}
 N e^K f_1 f_2 &= N (f_1 f_2 + \underline{f_1 f_2}) = N \left(\begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ 1 \quad 2 \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) \quad K = \underline{\psi} \bar{\psi} \frac{\delta^2}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} P_{\pm} \\
 N e^K f_1 f_2 f_3 &= N \left(\begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right),
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

die von (12.9) deswegen etwas verschieden sind, weil die hier zu ordnenden Ausdrücke nicht zeitgeordnete Produkte $T f_1 f_2 \dots$, in denen die Faktoren $f_1, f_2 \dots$ vertauschbar sind, sondern einfache Produkte $f_1 f_2 \dots$ darstellen, in denen die Faktoren f_1, f_2, \dots natürlich nicht vertauschbar sind, so daß bei der Clusterbildung an der einmal gewählten Faktoren-Reihenfolge $f_1 f_2 \dots$ starr festzuhalten ist. Beim Übergang zu identischen

Funktionalen $f_1 = f_2 = \dots$ entstehen daher auch im Vergleich zu (12.10) mehr voneinander verschiedene Cluster, die sich von (12.10) durch die Anordnung der Punkte etwas unterscheiden

$$Ne^K f^3 = N \left(\circ \circ \circ + 3 \text{---} \circ \circ + \text{---} \circ \text{---} \circ \right). \quad (7)$$

Die an (12.10) anschließenden kombinatorischen Überlegungen können aber wieder sofort übernommen werden, so daß auch hier ein Exponential-Verbundcluster-Theorem

$$\begin{aligned}
 & N e^{\underline{\psi} \overline{\psi} \frac{\delta^2}{\delta \overline{\psi} \delta \underline{\psi}} P^+} e^{f(\overline{\psi}, \underline{\psi})} = N e^{\gamma(\overline{\psi}, \underline{\psi})} \\
 \gamma(\overline{\psi}, \underline{\psi}) = & \circ + \frac{1}{2} \text{---} \circ + \\
 & + \frac{1}{3!} \left(\text{---} \circ \text{---} \circ + \text{---} \circ \text{---} \circ + \text{---} \circ \text{---} \circ + \text{---} \circ \text{---} \circ \right) + \dots
 \end{aligned} \quad (8)$$

gilt mit $\gamma(\overline{\psi}, \underline{\psi})$ als der Summe aller zu $f(\overline{\psi}, \underline{\psi})$ gehörigen Verbundcluster der $1 - N_{\overline{\psi}, \underline{\psi}}$ -Umordnung.

Speziell für *Einteilchen-Exponential-Funktionale* $f = \psi^\dagger u \psi$ läßt sich die Verbundcluster-Summe in (8) explizit und geschlossen angeben⁷. Mit $[\psi_1, \psi_2]_{\mp} = \delta(x_1 - x_2)$ ergibt sich nämlich $\gamma(\psi^\dagger, \psi)$ sofort zu

$$\begin{aligned}
 \gamma(\psi^\dagger, \psi) &= \psi^\dagger u \psi + \frac{1}{2!} \psi^\dagger u \underline{\psi} \psi^\dagger u \psi + \frac{1}{3!} \psi^\dagger u \underline{\psi} \psi^\dagger u \underline{\psi} \psi^\dagger u \psi + \dots \\
 &= \psi^\dagger (e^u - 1) \psi = \int dx dx' \psi^\dagger(x) (e^u - 1)_{xx'} \psi(x'), \quad \underline{\psi}_1 \underline{\psi}_2 = \delta(x_1 - x_2),
 \end{aligned} \quad (9)$$

da n hintereinanderstehende Bauelemente $\psi^\dagger u \psi$ nur genau eine Verbund-Kontraktion ermöglichen, so daß die zugehörigen Symmetriefaktoren $z = 1$ und $g = n!$ lauten. Es gelten daher die in der Gleichgewichts-Statistik wiederholt benötigten Beziehungen

$$e^{\psi^\dagger u \psi} = N_{\psi^\dagger, \psi} e^{\psi^\dagger (e^u - 1) \psi} \quad N_{\psi^\dagger, \psi} e^{\psi^\dagger v \psi} = e^{\psi^\dagger \ln(1+v) \psi}. \quad (10)$$

Die zweite Gleichung folgt mit $v = (\exp u) - 1$, also $u = \ln(1 + v)$ sofort aus der ersten. Ein Potenzvergleich in (10) liefert ($\delta_{s_1, -s}$ bezeichnet das Kroneckersymbol)

$$\begin{aligned}
 \frac{(\psi^\dagger u \psi)^s}{s!} &= N_{\psi^\dagger, \psi} \sum_{s_1, s_2, \dots} \delta_{s_1 + 2s_2 + \dots - s} \times \\
 &\quad \times \frac{\left(\frac{1}{1!} \psi^\dagger u \psi\right)^{s_1}}{s_1!} \frac{\left(\frac{1}{2!} \psi^\dagger u^2 \psi\right)^{s_2}}{s_2!} \frac{\left(\frac{1}{3!} \psi^\dagger u^3 \psi\right)^{s_3}}{s_3!} \dots \\
 N_{\psi^\dagger, \psi} \frac{(\psi^\dagger v \psi)^s}{s!} &\sum_{s_1, s_2, \dots} \delta_{s_1 + 2s_2 + \dots - s} \times \\
 &\quad \times \frac{\left(\frac{1}{1!} \psi^\dagger v \psi\right)^{s_1}}{s_1!} \frac{\left(-\frac{1}{2!} \psi^\dagger v^2 \psi\right)^{s_2}}{s_2!} \frac{\left(\frac{1}{3!} \psi^\dagger v^3 \psi\right)^{s_3}}{s_3!} \dots
 \end{aligned} \quad (11)$$

⁷ Hierbei werden nur nichtrelativistische, temperatur- und zeitunabhängige Feldoperatoren betrachtet, so daß ψ^\dagger an die Stelle von $\overline{\psi}$ tritt.

Für konstante Einteilchenfunktionen $u(x, x') = \text{konst}$, $v(x, x') = \text{konst}$ geht (11) mit $\psi^\dagger \psi \equiv \int dx \psi^\dagger(x) \psi(x)$ in die einfacheren, auch durch vollständige Induktion beweisbaren Beziehungen

$$\boxed{\frac{(\psi^\dagger \psi)^s}{s!} = N_{\psi^\dagger, \psi} \left\{ \psi^\dagger \psi \right\}_s, \quad N_{\psi^\dagger, \psi} \frac{(\psi^\dagger \psi)^s}{s!} = \left(\psi^\dagger \psi \right)_s} \quad (12)$$

über. Die Ausdrücke in den runden Klammern sind dabei die bekannten, bei Entwicklung von $\exp \psi^\dagger \psi \ln(1 + v) = (1 + v)^{\psi^\dagger \psi}$ auftretenden Binomial-Koeffizienten, während die Ausdrücke in den geschweiften Klammern die Koeffizienten bedeuten, die bei der Entwicklung von $\exp \psi^\dagger \psi (e^u - 1)$ nach Potenzen von u auftreten (siehe Anhang).

Schlußbemerkung

Die Aufgabe, Produkte von Exponentialfunktionalen umzuordnen, kann auf die für Mehrteilchenkräfte verallgemeinerte Mayersche Clustertheorie der klassischen Gleichgewichts-Statistik zurückgeführt werden. Das Ergebnis ist das allgemeine Exponential-Verbundgraphen-Theorem (21.12). Über dessen Anwendungen in der Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichts-Statistik, in der relativistischen und nichtrelativistischen Quantenfeldtheorie, in der Schwankungstheorie und in der Kohärenztheorie wird in weiteren Arbeiten berichtet.

Herrn Prof. Dr. W. MACKE danke ich für anregende Diskussionen sowie für die Unterstützung dieser Arbeit durch Gewährung von Arbeitsmöglichkeiten am Institut für Theoretische Physik der Technischen Universität Dresden.

Anhang

Binomial- und Biexponentialkoeffizienten

Bei der Entwicklung des Ausdrucks

$$(1 + \alpha)^x = e^{x \ln(1 + \alpha)} = e^{x \left(\frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2} + \dots \right)} = \sum_s \binom{x}{s} \alpha^s \quad (1)$$

nach Potenzen von α treten bekanntlich die sog. Binomialkoeffizienten

$$\binom{x}{s} = \sum_{s_1, s_2, \dots} \delta_{s_1 + 2s_2 + \dots - s} \frac{\left(\frac{1}{1}\right)^{s_1}}{s_1!} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{s_2}}{s_2!} \dots x^{s_1 + s_2 + \dots} = \frac{1}{s!} \sum_{r(\leq s)} \binom{r}{s} x^r \quad (2)$$

auf, die wiederum ihrerseits bei Entwicklung nach x die Koeffizienten

$$\binom{r}{s} = s! \sum_{s_1, s_2, \dots} \delta_{s_1 + 2s_2 + \dots - s} \delta_{s_1 + s_2 + \dots - r} \frac{\left(\frac{1}{1}\right)^{s_1}}{s_1!} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{s_2}}{s_2!} \dots \quad (3)$$

enthalten. So gilt z. B.

$$\binom{x}{3} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{3!} \rightsquigarrow \binom{3}{3} = 1 \quad \binom{2}{3} = -3 \quad \binom{1}{3} = 2. \quad (4)$$

Ähnlich treten bei der Entwicklung des Ausdrucks

$$(e^{e^\alpha - 1})^x = e^{x(e^\alpha - 1)} = e^{x\left(\frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots\right)} = \sum_s \left\{ \begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \right\} \alpha^s \quad (5)$$

nach Potenzen von α die hier als Biexponentialkoeffizienten bezeichneten Zahlen

$$\left\{ \begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \right\} = \sum_{s_1, s_2, \dots} \delta_{s_1 + 2s_2 + \dots - s} \frac{\left(\frac{1}{1!}\right)^{s_1}}{s_1!} \frac{\left(\frac{1}{2!}\right)^{s_2}}{s_2!} \dots x^{s_1 + s_2 + \dots} = \frac{1}{s!} \sum_{r(\leq s)} \left\{ \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \right\} x^r \quad (6)$$

auf, die ihrerseits bei Entwicklung nach x die Koeffizienten

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \right\} = s! \sum_{s_1, s_2, \dots} \delta_{s_1 + 2s_2 + \dots - s} \delta_{s_1 + s_2 + \dots - r} \frac{\left(\frac{1}{1!}\right)^{s_1}}{s_1!} \frac{\left(\frac{1}{2!}\right)^{s_2}}{s_2!} \dots \quad (7)$$

enthalten. So gilt z. B.

$$\left\{ \begin{matrix} x \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{x^3 + 3x + x}{3!} \rightsquigarrow \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 1 \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 3 \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 1. \quad (8)$$

Weitere Beispiele für (7) sind

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 4! \frac{\left(\frac{1}{1!}\right)^2}{2!} \frac{1}{1!} = 6, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right\} = 4! \left(\frac{\left(\frac{1}{2!}\right)^2}{2!} + \frac{1}{1!} \frac{1}{3!} \right) = 3 + 4 = 7. \quad (9)$$

Mit der an ein Laplacesches Dreieck erinnernden Rekursionsformel

$$\left(\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \alpha} - 1 - \frac{\partial}{\partial x} \right) e^{x(e^\alpha - 1)} = 0 \rightsquigarrow \left\{ \begin{matrix} r+1 \\ s+1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} r \\ s \end{matrix} \right\} + (r+1) \left\{ \begin{matrix} r+1 \\ s \end{matrix} \right\} \quad (10)$$

können die höheren Koeffizienten sukzessive aus den niederen bestimmt werden.

Literatur

1. WICK, G. C.: Phys. Rev. **80**, 268 (1950).
2. HORI, S.: Progr. Theor. Phys. **7**, 578 (1952).
3. ANDERSON, J. L.: Phys. Rev. **94**, 703 (1955).
4. MATSUBARA, T.: Progr. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).
5. HEFFNER, H., and W. H. LOUISELLE: J. Math. Phys. **6**, 474 (1965).
6. BOGOLJUBOW, N. N.: J. Phys. (USSR) **10**, 256 u. 265 (1946).
7. SCHWINGER, J.: Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 452 u. 455 (1951).
8. MARTIN, P. C., and J. SCHWINGER: Bull. Am. Phys. Soc. **3**, 202 (1959); Phys. Rev. **115**, 1342 (1959).
9. EDWARDS, S. F., and R. E. PEIERLS: Proc. Roy. Soc. A **224**, 24 (1954).
10. SYMANZIK, K.: Z. Naturforsch. **9a**, 809 (1954).
11. FRADKIN, E. S.: DAN **98**, 47 (1954) u. **100**, 897 (1955).
12. THIRRING, E.: Vortrag während des Keszthely-Symposiums, Ungarn 1964.
13. WESS, J.: Vortrag während des Schladming-Symposiums, Österreich 1965.
14. ZIESCHE, P.: Acta Phys. Hung. **21**, 219 (1966).
15. SCHÖNBERG, M.: Nuovo Cimento **9**, 1139 (1952) u. **10**, 419 u. 697 (1953).
16. ZIESCHE, P.: Commun. Math. Phys. **5**, 191 (1967).
17. — Ann. Physik (in Vorbereitung).
18. QUAAS, P., K. VOSS u. P. ZIESCHE: Acta Phys. Hung. (in Vorbereitung).
19. — — — Ann. Phys. (in Vorbereitung).
20. MAYER, J. E.: J. Chem. Phys. **5**, 67 (1937).
21. —, u. M. G. MAYER: Statistical mechanics. New York: Wiley 1940.