LA MÉCANIQUE STATISTIQUE.

Elementary Principles in Statistical Mechanics, Developed with especial Reference to the Rational Foundations of Thermodynamics. By J. WILLARD GIBBS. Yale Bicentennial Publications. New York, Scribner and Sons; London, Arnold; 1902. xviii + 207 pp.

PEUT-ÊTRE les lecteurs du BULLETIN ne s'étonneront-ils pas trop de l'époque tardive à laquelle ils liront le compte rendu des Elementary Principles. Non seulement — est-il besoin de le dire?— ce livre n'est point de ceux que l'on analyse hâtivement; mais, d'autre part, les questions qu'il traite ont été vivement agitées dans ces derniers temps; les idées défendues par Gibbs ont fait l'objet de nombreuses controverses; les raisonnements par lesquels il les a appuyées ont, eux aussi, subi la critique. Il me paraît intéressant d'étudier son oeuvre à la lumière de ces controverses et en discutant ces critiques.

Gibbs craignait que sa Mécanique statistique ne semblât trop physique aux mathématiciens, trop mathématique aux physiciens. Nous ne ferons qu'énoncer un truisme en disant que ce scrupule exprime une des qualités précieuses de l'ouvrage. La nécessité d'associer, de la manière la plus intime possible, deux branches de la science qui s'étaient trop longtemps perdues de vue, n'est plus à démontrer, et il faut espérer qu'elle continuera à être comprise.

En fait, les physiciens ont déjà apprécié le livre de Gibbs et l'ont utilisé. On ne saurait mettre en doute son importance au point de vue des mathématiciens. Ceux-ci connaissent encore insuffisamment les théories cinétiques, où il semble que leur activité pourrait si utilement s'exercer. Non seulement ils ont besoin d'y être initiés; mais il ne leur est pas indifférent d'y être introduits par un des leurs, d'y trouver un guide qui d'abord s'appelle Gibbs et, ensuite, leur parle leur propre langue: on sait qu'à cette fusion des différentes branches de la science dont nous rappellions tout à l'heure l'importance, la discordance des points de vue auxquels elles se placent et la différence des éducations qu'elles supposent est un obstacle souvent plus sérieux que la multiplicité des connaissances qu'elles embrassent.

La "Mécanique statistique" est, en somme, une question

purement mathématique. Elle n'est autre chose que l'application du calcul des probabilités à la mécanique, que la dynamique d'un grand nombre de systèmes régis (dans le cas le plus simple) par les mêmes équations, mais avec des circonstances initiales différentes. Ce qui est observable et, par conséquent, important, c'est la valeur moyenne de telle ou telle quantité, fonction de l'état du système. A cette recherche, on substitue, avec Maxwell, celle du nombre de systèmes pour lesquels la quantité ainsi envisagée est (à un instant donné quelconque) comprise entre des limites données. Ce nombre sera, en général, très grand,—si grand que par un raisonnement logiquement absurde, fécond et rarement trompeur en fait, (du moins lorsqu'on n'entend pas le poursuivre jusque dans ses dernières conséquences) on applique la loi des grands nombres, même lorsque les limites dont il s'agit sont infiniment rapprochées.

Que seront, individuellement, les systèmes S auxquels s'appliquerons ces considérations? Gibbs, à l'exemple de plusieurs de ses prédécesseurs, fait abstraction de toute supposition particulière à leur égard : il part des équations canoniques d'Hamilton sous leur forme la plus générale, avec les coordonnées de position $q_1, q_2, \cdots, q_n$ et les "moments généralisés" $p_1, p_2, \cdots, p_n$ substitués aux vitesses.

Il y a là autre chose qu'une généralisation toute théorique. D'une part on ne sait encore trop sous quelle forme on arrivera à se représenter ces éléments matériels ou électriques, dont les évolutions compliquées seront chargées de rendre compte des propriétés des corps naturels.

D'autre part, les principes de la mécanique, eux-mêmes, sont en train de se recodifier : voici que la masse n'est plus une constante, mais une fonction de la vitesse. Une seule chose semble devoir subsister. Les nouvelles équations pourront, comme les anciennes, être déduites du calcul des variations ; la nouvelle mécanique admettra elle aussi, un *principe de moindre action*, que l'on s'est déjà occupé de formuler.*

Or cela suffit pour que les équations canoniques continuent à être valables.

Gibbs les considère d'une manière presque exclusive : il ne fait jouer qu'un rôle tout épisodique au cas particulier où il s'agit de points matériels isolés. Par là, son travail gagne sin-

* Voir entre autres, deux Notes récentes presentées à l'Académie des Sciences de Paris, l'une par MM. E. et Fr. Cosserat, l'autre par M. Langevin.

gulièrement en importance. Il gagne aussi en simplicité: j'entends cette vraie simplicité qui consiste à débarrasser la question de tous les éléments inutiles. Je ne crois pas qu'une autre forme d'exposition soit aussi propre à montrer aux mathématiciens ce qu'ils ont surtout intérêt à savoir : la voie qu'ils doivent suivre pour le progrès de cette théorie qui est de leur domaine et qui s'est fondée sans leur concours. A la lecture des Elementary principles, cette voie se dégage clairement: c'est le développement des principes que la théorie générale des équations différentielles et la mécanique analytique doivent à M. Poincaré.

Tout d'abord, la notion *d'invariant intégral*, qui, dans les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, a reçu les belles applications que l'on sait, a été mise dès l'abord à la base de la mécanique statistique. Les trois premiers chapitres de l'ouvrage qui nous occupe sont un commentaire de cette double proposition :

1° L'unité est un multiplicateur des équations canoniques :

2° On connaît donc un invariant intégral de ces équations.

Cet invariant intégral est le *volume* dans la terminologie de M. Poincaré. Gibbs lui donne le nom *d'extension en phase*. Une *phase* est un état du système S, caractérisé par sa position et ses vitesses, autrement dit, par les valeurs de $q_1, q_2, \cdots, q_n ; p_1, \cdots, p_n$ et que l'on peut, par conséquent, représenter par un point dans l'espace E_{2n} à $2n$ dimensions. Il arrivera d'ailleurs, en général, que ce point ne pourra pas occuper une position absolument quelconque dans l'espace E_{2n}, mais devra se trouver dans une certaine région limitée R_0 de cet espace. L'extension en phase est relative à une portion quelconque R de R_0 : c'est l'intégrale

$$\int\int \cdots \int_R dq_1 \cdots dq_n \, dp_1 \cdots dp_n.$$

Si l'on donne la position du point représentatif au temps t, on détermine implicitement, par cela même sa position à un autre instant quelconque t'. Si on prend, pour le premier point, successivement chacun de ceux de la région R, le second point décrira une nouvelle région R'. Celle-ci a même extension en phase que la première : l'extension en phase est invariante dans le temps (sur une même série de trajectoires).

Mais Gibbs attire l'attention sur une autre propriété que possède ce même symbole et qui, moins remarquable sans doute que la première, n'en est pas moins des plus importantes. L'extension en phase est aussi invariante par rapport au système de coordonnées employé. Quelque soit le choix des q_i, du moment que les p_i sont choisis en conséquence, les extensions en phase seront conservées. On peut donc parler de *régions dynamiquement équivalentes* * de l'espace à $2n$ dimensions — ce qui n'aurait pas de sens absolu sans la propriété d'invariance dont nous parlons (ce qui n'aurait aucun sens, par exemple, si les équations n'étaient pas canoniques).

On peut aller plus loin : Gibbs opère sur les positions seules, ou sur les vitesses seules, comme il a opéré sur l'ensemble des deux. Il peut ainsi définir une *extension en vitesse* et une *extension en configuration.*

Si étroitement liées à l'extension en phase que soient les deux notions précédentes, c'est intentionnellement que Gibbs en ajourne l'étude à son sixième chapitre. Il doit d'abord aller au plus pressé, au but principal du livre et introduire les notions statistiques sur lesquelles il raisonnera.

Grâce à la convention qui permet d'appliquer la loi de grands nombres à un élément infinitésimal, on représentera le nombre des systèmes S contenus (à un instant donné) dans une extension en phase donnée (c'est-à-dire dont le point représentatif est dans une région donnée R de l'espace E_{2n}) par l'intégrale

$$\int\int \cdots \int_R D\, dq_1 \cdots dq_n dp_1 \cdots dp_n,$$

où D est une fonction des q et des p, *la densité en phase.* La connaissance de la valeur de D en fonction de $q_1, \cdots, q_n ; p_1, \cdots, p_n$ donne la distribution absolue des systèmes donnés entre leurs différentes phases. En général, la distribution relative, proportionnelle, intervient seule, et il suffit d'étudier, N étant le nombre total des systèmes S, le quotient

$$P = D/N$$

ou *coefficient de probabilité, la probabilité en phase* étant l'intégrale

* L'extension en phase est une notion de dynamique (et non de cinématique) quoique les forces n'y entrent pas, parce qu'elle dépend des masses.

$$\int\int \cdots \int P dq_1 \cdots dq_n \, dp_1 \cdots dp_n.$$

Enfin la quantité

$$\eta = \log P$$

est *l'indice de probabilité.*

L'équilibre moyen d'un ensemble de systèmes S tel que celui que nous considérons — ou, plus généralement, le régime permanent — correspond à un *équilibre statistique,* caractérisé par ce fait que la distribution en phase est indépendante du temps.

Toutes les quantités que nous avons définies plus haut, probabilité en phase, coefficient de probabilité, indice de probabilité, qui sont invariantes dans le temps sur chaque trajectoire, sont des intégrales des équations différentielles. La condition d'équilibre statistique est que ces intégrales ne contiennent pas t.

Gibbs considère, en particulier, la distribution dans laquelle l'indice de probabilité est une fonction, et même une fonction linéaire, de l'intégrale la plus simple, l'énergie : c'est la *distribution canonique,* qu'il introduit ainsi à priori (et qui d'après ce qui précède, reste telle dans tout système de coordonnées).

La probabilité en phase est-elle, en réalité, une fonction de l'énergie seule? C'est, on le sait, une des questions qui ont été le plus fréquemment discutées dans cette théorie. Gibbs montre comment elle se pose. Un exemple simple fait voir que, au moins à priori, des intégrales autres que l'énergie peuvent jouer le même rôle et régler les valeurs de la probabilité en phase. Il suffit de considérer des points matériels placés, soit dans une sphère donnée, soit (c'est le cas considéré par Gibbs) entre deux sphères concentriques, et rendus incapables de traverser la ou les sphères limites. Ce dernier résultat s'obtient pour Gibbs, en faisant intervenir des forces centrales attractives ou répulsives suffisamment intenses ; on peut aussi imaginer que ces sphères soient des parois solides le long desquelles les points considérés se réfléchissent (élastiquement). L'hypothèse de Gibbs a l'avantage de faire intervenir des vibrations qui offrent une certaine analogie avec la théorie des radiations. Mais, dans l'un ou l'autre cas, les moments cinétiques par rapport à trois axes rectangulaires issus du centre sont constants pour chaque point : rien n'empêchera de concevoir la probabilité en phase comme dépendant, non seulement de l'énergie, mais encore de ces trois moments ou, du moins — si l'on veut sauvegarder l'isotropie de l'ensemble — de la somme de leurs carrés.

Rien ne dit même que les choses ne se passent pas de façon plus compliquée encore. Tout ce que l'on peut dire en considérant, à priori, la probabilité en phase, comme une fonction régulière est qu'elle constitue une intégrale *uniforme* des équations de la dynamique. Mais *l'uniformité* n'a pas ici le même sens que dans les recherches de M. Poincaré, puis qu'il ne s'agit plus nécessairement de fonctions analytiques. Elle serait encore, cependant, de nature à restreindre d'une manière notable la catégorie des expressions acceptables pour P.

Quant au mode de continuité de cette fonction, nous ne possédons qu'une proposition capable — autant qu'on en peut juger actuellement — de nous éclairer à ce sujet : c'est celle que M. Poincaré a déduite de la notion d'invariant intégral. D'après ce théorème, que Gibbs énonce à une autre occasion (au Ch. XII), les solutions des équations de la dynamique possèdent, en général, *la stabilité à la Poisson*, c'est-à-dire que le point représentatif M repasse, en général, une infinité de fois dans le voisinage (aussi immédiat qu'on le veut) de toute position M_0 déjà occupée. Les trajectoires pour lesquelles cela n'a pas lieu sont *exceptionnelles :* leurs points de départ ne peuvent former une extension en phase finie, si petite soit-elle.

Si le point M pouvait s'approcher de M_0 dans toute direction tangente à la multiplicité $\epsilon = \text{const.}$ (ϵ désignant l'énergie), il n'y aurait point d'autre intégrale uniforme possédant des dérivées partielles que l'intégrale des forces vives. Si M pouvait, dans le cours du mouvement, passer infiniment près de tout point de cette même multiplicité, l'intégrale des forces vives serait la seule intégrale continue.

Ce n'est pas, bien entendu, ce qui à lieu dans l'exemple choisi tout-à-l'heure. Mais n'en est-il pas autrement dans des problèmes moins particuliers ? Cette question, de pur calcul intégral, reste sans solution mathématique. Les physiciens sont obligés de la discuter comme bien d'autres — voire, de l'aborder expérimentalement, ainsi que l'a fait Lord Kelvin — sans attendre notre jugement sûr, mais par trop tardif.

Après avoir indiqué que la distribution canonique peut ne pas être la seule imaginable, Gibbs retourne à cette distribution canonique, pour y mettre en évidence les propriétés que possède le coefficient de ϵ dans l'expression linéaire

$$\eta = \frac{\psi - \epsilon}{\Theta}$$

(qui représente l'indice de probabilité η) ou plutôt l'inverse Θ de ce coefficient. *Ces propriétés sont tout analogues à celles de la température absolue.* Par exemple la quantité Θ se comporte comme la température dans le mélange de deux ensembles ; et, surtout, elle donne lieu, lorsqu'on la multiplie par $d\epsilon$ et qu'on tient compte, s'il y a lieu, des forces extérieures, à une équation toute semblable à celle que donne le principe de Carnot. Le rôle de l'entropie (changée de signe) est alors joué par la valeur moyenne $\bar{\eta}$ de l'indice de probabilité.

C'est seulement à ce moment que sont introduites les notions, mentionnées tout à l'heure, d'extension en configuration et d'extension en vitesse et comme conséquence, l'étude des valeurs moyennes (ainsi que des anomalies correspondantes) qui se rapportent non plus seulement à l'énergie totale, mais à l'énergie cinétique et à l'énergie potentielle, considérées isolément.

Les quantités Θ, $-\bar{\eta}$, que nous avons vues jouer respectivement, dans une distribution canonique, le rôle de la température et celui de l'entropie, sont-elles seules susceptibles de correspondre à ces deux notions? Et si la distribution cesse d'être canonique, sommes-nous sûrs que l'entropie sera encore (aux signes près) la valeur moyenne de l'indice de probabilité?

La réponse, au moins sous réserve de considérations nouvelles, est négative. On peut former d'autres expressions de formes différentes, coïncidant d'ailleurs avec les premières dans le cas de la distribution canonique et possédant, elles aussi, les deux propriétés auxquelles nous avons trouvé plus haut une analogie thermodynamique.

Pour arriver à ce résultat, Gibbs considère toutes les phases pour lesquelles l'énergie est inférieure à une certaine quantité ϵ. L'extension en phase V de l'ensemble des états ainsi définis est une certaine fonction de ϵ, dont la dérivée est désignée par e^{ϕ}.

Il est clair que les fonctions V et ϕ de l'énergie ϵ ont une importance toute particulière. Leur introduction dans l'étude d'un ensemble canonique revient à classer les systèmes S dont il se compose d'après leurs énergies, à le décomposer, autrement dit, en parties dont chacune contient les systèmes pour lesquels cette énergie est comprise entre des limites données. Si ces limites sont suffisamment rapprochées, on peut regarder, dans l'intervalle qu'elles déterminent, l'énergie comme constante et on a la distribution que Gibbs appelle *microcanonique*, sorte d'élément de la distribution canonique.

Ce sont des combinaisons diverses des fonctions V et ϕ qui dans le cas de la distribution microcanonique, puis même (par la considération de leurs valeurs moyennes) en dehors de ce cas, fournissent des quantités substituables à Θ et à $-\bar{\eta}$.

Il reste à traiter la question la plus importante et la plus délicate que soulève cette étude de la distribution en phase. Que devient cette distribution au cours du mouvement, lorsqu'on part d'un état quelconque: tend-elle, par exemple, à se rapprocher de la distribution canonique ou d'une distribution présentant des propriétés analogues?

C'est, en somme, la question vitale pour les théories cinétiques. Le paradoxe qui s'y rattache et qui semble, au premier abord, miner par avance toute théorie de cette nature est en effet le suivant. Comment, en partant d'équations de la dynamique, toutes *réversibles*, parviendra-t-on à des lois *irréversibles*, à la croissance de l'entropie?

Gibbs se demande donc—après avoir établi une série de propriétés de minimum qui doivent jouer un rôle essentiel dans cette étude — ce que devient le mouvement lorsqu'on le considère à de longs intervalles de temps. Il commence par indiquer, à cette occasion, le théorème de M. Poincaré sur la stabilité à la Poisson auquel nous faisions allusion un peu plus haut.

La contradiction apparente qu'il s'agit d'élucider est ensuite posée, sous une forme nouvelle et plus frappante encore que celle qui a été rappelée tout à l'heure. Cette entropie qui doit être croissante, les calculs précédents conduisent, comme le veut d'ailleurs la théorie de M. Boltzmann, à la rattacher à la valeur moyenne de l'indice de probabilité. Or nous savons que cet indice est constant dans le temps. Comment sa valeur moyenne pourra-t-elle varier de quelque manière que ce soit?

La comparaison employée par Gibbs montre avec évidence comment des singularités de cette nature s'introduisent nécessairement dans l'application des considérations statistiques à des systèmes dont les différentes parties se mélangent entre elles.

Soit un vase de forme cylindrique (dont, pour simplifier, on pourra considérer exclusivement une section droite) et supposons ce vase rempli de deux liquides A et B de telle manière qu'à l'origine des temps ces liquides soient distribués par secteurs: par exemple, deux diamètres perpendiculaires seront supposés diviser le cercle en quatre parties dont deux opposées contiendront exclusivement du liquide A et les deux autres du liquide B.

Imaginons maintenant que les différentes couches circulaires concentriques dont est composé le milieu soient animées chacune d'un mouvement de rotation, mais avec des vitesses angulaires différentes. Si nous suivons dans son mouvement une portion quelconque du liquide A, par exemple, son volume ne changera pas et sa densité restera également invariable. La connexion de ce volume ne sera même modifiée à aucun moment.

Cependant, une portion déterminée quelconque de l'espace intérieur au vase, si petite qu'elle soit et qui, à l'origine, renfermait exclusivement du liquide A ou du liquide B, renfermera pour peu qu'on suive le mouvement pendant un temps suffisamment prolongé un mélange des deux fluides, mélange sensiblement homogène * pour t suffisamment grand. En particulier la densité, tout invariante qu'elle soit, ne sera plus nulle part celle de A ou celle de B, mais aura pris une valeur intermédiaire.

Si l'on suit le mouvement à partir de l'origine, on verra cette densité s'égaliser ; l'homogénéité du liquide (et il est clair qu'on pourrait, de bien des manières, définir un nombre qui serve de mesure à cette homogénéité) ira d'une manière générale croissant.

Le parallélisme est, on le voit, complet avec le phénomène qui est en question pour la quantité $\bar{\eta}$, et, plus loin, Gibbs sera conduit à préciser et à montrer, comme Boltzmann, que cette quantité doit être décroissante.

Seulement, comme l'a remarqué M. Brillouin, il ne faut pas se hâter de se féliciter de la concordance qui existe entre les résultats des deux auteurs. Ils ont, en réalité, des sens différents, et on pourrait même être tenté de les regarder comme presque contradictoires.

L'analyse de M. Boltzmann † repose essentiellement sur l'intervention des *chocs :* la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit valable est que ces chocs se produisent en grand nombre : il en résulte même qu'elle peut être applicable dans un intervalle de temps très court, si le nombre des molécules est assez considérable pour cela.

Gibbs ne considère pas les chocs : nous sommes arrivé au XII[e] Chapitre de son ouvrage sans qu'il y ait fait la moindre allusion. Ses démonstrations concernent des ensembles composés de systèmes sans action les uns sur les autres, ensembles *différents*,

* Ou du moins, dont la densité n'est fonction que de la distance au centre.
† Voir Leçons sur la théorie des gaz, tome I.

par conséquent, de ceux de Boltzmann. Elles font intervenir, au lieu des chocs, des phénomènes de mélange analogues à ceux auxquels nous avons fait allusion tout-à-l'heure pour le cas des liquides. Quelque soit le nombre des systèmes, elles ne s'appliquent qu'à un intervalle de temps $t' - t$ relativement long, assez long pour que deux systèmes S très voisins au temps t puissent correspondre, au temps t', à des points représentatifs très différents, ou inversement.

Malgré cela, nous verrons plus loin que l'identité des deux conclusions n'est probablement pas fortuite, qu'elle est, au contraire, dans la nature des choses. Mais ceci nous amène à un sujet important, aux objections qu'à l'exemple de M. Brillouin * beaucoup de physiciens ont opposées à ces idées de Gibbs et de Boltzmann.

Il est reproché tout d'abord à la démonstration de M. Boltzmann de ne considérer l'effet des chocs que sur les vitesses et de supposer constamment l'homogénéité parfaite en ce qui regarde les positions, alors que cette homogénéité — à supposer qu'elle existât à un instant quelconque — serait manifestement détruite aux instants suivants par le mouvement lui-même. On introduirait ainsi constamment l'inorganisation parfaite (à savoir, l'homogénéité) à un point de vue et c'est ainsi qu'au bout du compte cette inorganisation paraîtrait être la tendance générale du mouvement, tendance qui n'existerait nullement en réalité. En un mot, l'analogie de Boltzmann, radicalement fausse, ne serait pas une réponse à la contradiction signalée plus haut.

M. Brillouin écarte à plus forte raison le raisonnement de Gibbs, image plus grossièrement approchée de la réalité que celui de Boltzmann et qui même, nous l'avons vu, porte sur des phénomènes essentiellement différents.

Je serais, pour ma part, tenté de donner raison à Gibbs et à Boltzmann contre mon savant ami M. Brillouin. Je vais essayer ici d'expliquer pourquoi et de faire à sa critique pénétrante une réponse que le lecteur ne s'étonnera sans doute pas de trouver longue.

Remarquons d'abord que la question est double. La conclusion contestée se compose de deux parties, une négative et une positive. Elle exprime :

* Notes pour la traduction française des Leçons sur la théorie des gaz de Boltzmann, aris, Gauthier-Villars, 1901-05.

1° que l'objection tirée de la réversibilité des équations du problème n'est pas valable, qu'elle ne prouve pas l'impossibilité de lois finales irréversibles ;

2° qu'en fait, de telles lois irréversibles existent et qu'une certaine quantité (dont on donne l'expression) va en général en croissant.

Or, tant qu'on se borne à affirmer la première partie c'est-à-dire à prétendre que la seconde est *possible*, il ne paraît guère y avoir de doute. Dans ce cas, en effet, il importe peu que les raisonnements présentés correspondent à la réalité physique ; il suffit qu'ils portent sur des phénomènes logiquement concevables. Dès lors, les déductions de Gibbs et de Boltzmann ne sont pas, à ce point de vue, atteintes par les objections précédentes. On peut, au reste, se dispenser d'examiner longuement la question en recourant aux exemples les plus simples, tels que celui des projectiles, la pesanteur étant considérée comme un champ de forces constant en grandeur et en direction. Là encore, les équations du problème sont réversibles ; et cependant si un certain nombre de tels projectiles sont lancés *au hasard*, qui doutera que d'une manière globale, ils n'aillent en descendant ?

Soit encore un système sans forces accélératrices dépendant de deux paramètres ρ, θ, et dont la force vive est donnée, par

$$2T = f(\rho)\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \phi(\rho)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Supposons que $f(\rho)$, mais non $\phi(\rho)$, soit très grand pour ρ voisin d'une certaine valeur ρ_0 et très petit partout ailleurs. Alors toute trajectoire de ce système restera, sauf pendant des intervalles de temps très petits et très éloignés, au voisinage de la ligne $\rho = \rho_0$. Dès lors la différence $|\rho - \rho_0|$ sera en général décroissante pour tout intervalle de temps non très petit, si elle n'est pas initialement très petite. Il est clair qu'un tel résultat n'est irréversible qu'en apparence ; il tient évidemment à ce que les régions du plan (ρ, θ) non très voisines de $\rho = \rho_0$ doivent être considérées comme très petites au point de vue du problème actuel : il y aurait, autrement dit, lieu de définir ici, d'une manière plus ou moins analogue à celle qui a été mentionnée plus haut, des *régions dynamiquement équivalentes* et cette définition serait très différente de la définition géométrique. Nous trouverons d'ailleurs plus loin le point précis par lequel pèche, dans des exemples de cette espèce, l'objection générale.

Employons auparavant une autre comparaison plus lointaine en apparence, beaucoup plus exacte cependant à mon avis. Considérons ce qui se passe lorsqu'on bat un jeu de cartes. C'est ce que l'on fait le plus généralement par une série de coupes successives, l'opération élémentaire consistant à diviser le jeu, d'une manière arbitraire, en trois parties et à intervertir l'ordre de deux consécutives d'entre elles. Il est clair qu'une telle manière de procéder est parfaitement réversible. Cependant il est non moins évident qu'elle tend à une certaine régularisation du jeu. Si, par exemple, une fois les cartes battues nous trouvions toutes les rouges d'abord et toutes les noires ensuite, nous croirions à une fraude. On peut mesurer cette régularisation par un nombre. Considérons, pour fixer les idées, le nombre V de cartes rouges suivies d'une noire. Il est aisé de calculer la valeur moyenne V_0 de V pour tous les ordres possibles dans lesquels les cartes peuvent être rangées. Si maintenant, on part d'un jeu donné pour lequel V a une valeur déterminée V', la valeur probable de ce nombre après battage se rapprochera de V_0. J'entends par là que si au lieu d'un seul jeu nous en considérons un très grand nombre, tous identiques entre eux initialement, mais battus de toutes façons possibles et au hasard, la moyenne des valeurs de V pour ces différents jeux sera comprise entre V' et V_0.

Cette opération du battage est tout à fait comparable aux phénomènes qui ont lieu pour nos systèmes S, même lorsqu'on reste au point de vue de Gibbs. La position P' d'un point représentatif au temps t' étant une fonction *pratiquement discontinue* de la position P du même point au temps t, lorsque l'intervalle $t' - t$ est très long (c'est-à-dire qu'un changement très petit de P produit un changement très grand de P'), tout se passe comme si, P étant donné, P' était plus ou moins indéterminé, comme si la donnée de P équivalait au lancé d'une roulette dont l'arrêt marquerait la position de P'. Cette roulette fonctionnerait aussi parfaitement que possible si l'indétermination de P' était absolue (sauf la condition $\varepsilon = \text{const.}$)

C'est l'hypothèse dont nous avons parlé précédemment et sur le bien fondé de laquelle on ne peut se prononcer avec certitude. Mais même si elle était inexacte, il n'en est pas moins vrai que des points représentatifs primitivement rapprochés les uns des autres se dispersent avec le temps et que notre ensemble de systèmes S est ainsi " battu."

Il est clair également que les chocs agissent dans le même

sens et d'une manière beaucoup plus efficace encore. Nous voyons maintenant comment les procédés si différents de Gibbs et de Boltzmann peuvent conduire au même résultat. C'est ainsi que la valeur moyenne du nombre V considéré plus haut tendrait encore vers V_0 si l'on employait pour battre les cartes, au lieu du procédé auquel nous avons fait allusion, un autre quelconque de ceux qui sont usités dans ce but.

Ceci tient, remarquons-le, à ce que ces procédés si différents qu'ils puissent être, ne favorisent pas une permutation plutôt qu'une autre. Il faudrait donc savoir de même dans le cas de nos systèmes S, quelles sont les distributions également favorisées et leur définition dépendra du mode de "battage." Toutefois l'exemple même qui précède montre que cette définition pourra être la même pour des modes de battage très différents.

Passons à la seconde partie de la thèse, à la question de savoir si, en effet, la valeur moyenne de l'indice de probabilité changé de signe est en général croissante.

Du moment que M. Boltzmann est obligé d'attribuer aux molécules d'autres positions que celles qu'elles ont en réalité, son raisonnement doit, si l'on veut prendre les choses à la lettre, être considéré comme inexistant.

Disons tout de suite que Gibbs, de son côté, n'apporte pas de démonstration rigoureuse.

Non seulement il admet l'absence de chocs, mais — si j'ai bien compris son raisonnement — il ne tient pas suffisamment compte du phénomène même de mélange sur lequel il se base. Ce phénomène a, en effet, pour résultat, me semble-t-il, de rendre l'application de la loi des grands nombres aux extensions en phase infiniment petites (fondement premier de toute cette analyse) sinon douteuse du moins plus délicate que la brève rédaction de Gibbs ne le comporterait. La conclusion même serait de nature à faire mettre en doute la légitimité de la démonstration, en vertu du principe "qui veut trop prouver ne prouve rien." Elle n'admet, en effet, d'autres cas d'exception que ceux où il n'y a pas mélange, où les équations différentielles données définissent des trajectoires toutes stables au sens de M. Liapounoff: l'inégalité qui exprime le théorème serait alors remplacé par une égalité. Or il y a lieu, en l'espèce, de prévoir des cas d'exception beaucoup plus étendus, correspondant non à des formes particulières des équations différentielles, mais à certaines distributions initiales des systèmes S, et pour lesquels l'inégalité serait *renversée.*

Mais si nous ne nous autorisons pas des raisonnements de Gibbs et de Boltzmann pour énoncer une affirmation rigoureuse, quelles présomptions ces raisonnements créent-ils ? S'ils sont défectueux dans quel sens pêchent-ils ?

Devons-nous, par exemple, croire avec M. Brillouin qu'en introduisant l'homogénéité, on introduit du même coup l'inorganisation ? Je ne le pense pas. Le sens du mot " inorganisé " demanderait à être défini ; mais, en tout cas, la distribution la plus " inorganisée " possible n'est pas plus la distribution homogène que n points pris au hasard sur une circonférence n'ont de chance pour être les sommets d'un polygone régulier. Pour revenir à notre comparaison de tout à l'heure, un jeu de cartes, une fois battu, où les rouges seraient toutes réunies ainsi que les noires, serait suspect ; mais un jeu où il y aurait alternance parfaitement régulière entre les uns et les autres ne le serait pas moins. Si — ce qui est certain — une distribution homogène des systèmes S dans l'espace à n dimensions à un instant t est remplacée aux instants suivants par une distribution non homogène, celle-ci est, selon toute vraisemblance, beaucoup plus inorganisée que la première. Non seulement, si erreur il y a, c'est dans le sens de l'organisation, mais on pouvait être presque sûr à priori, qu'il en serait ainsi. Une erreur de cette espèce a, en effet, toujours pour origine le désir de simplifier le raisonnement. Or simplifier, en mathématique, c'est débrouiller un peu le chaos des hypothèses possibles : en un mot, c'est organiser.

Quant à une définition satisfaisante de l'inorganisation, elle est évidemment difficile à donner. Je proposerai, faute de mieux, l'une ou l'autre des deux suivantes.

On peut d'abord * considérer comme type de distribution inorganisée l'ensemble de toutes les distributions possibles des systèmes S. Une distribution déterminée D serait alors dite inorganisée si elle ne se distinguait en rien, *au point de vue de la question étudiée*, de la distribution totale dont nous venons de parler. On pourrait donc dans le raisonnement substituer cette dernière à la distribution considérée, — par exemple, prendre pour valeur d'une quantité qui dépend de la distribution D, sa valeur moyenne dans toutes les distributions possibles — et c'est la possibilité de cette substitution, qui exprimerait le caractère inorganisé de D.

Dans cette conception, une distribution pourrait — conformé-

* C'est ce que propose Gibbs à la fin du chap. XI (p. 251).

ment à la nature des choses — être considérée comme inorganisée relativement à telle question et comme organisée relativement à telle autre. Cela peut être le cas, par exemple, pour la distribution homogène (en position) des systèmes S: il est possible que l'organisation ainsi introduite soit sans influence dans la question qui nous occupe.

On peut aussi admettre simplement que les distributions "organisées" sont des distributions *exceptionnelles*, au sens adopté par M. Poincaré à propos de son théorème sur la stabilité à la Poisson. L'hypothèse, faite au cours du raisonnement, que le mouvement est inorganisé, reviendrait alors à dire, sans plus préciser, que le théorème est vrai sauf pour certaines distributions exceptionnelles.

L'une ou l'autre des deux définitions précédentes suppose d'ailleurs la connaissance de ce que l'on doit appeler distributions "également probables." Toutefois, on sait que la notion de distributions exceptionnelles est en somme indépendante de la convention adoptée à cet égard.

Mais la notion de mouvement inorganisé absolument parlant, n'est pas la seule qu'il convienne d'introduire. Il y a lieu d'y joindre, suivant un procédé classique en calcul des probabilités, celle de mouvement inorganisé parmi ceux qui satisfont à des conditions données.

L'adaptation, à cet effet, des deux définitions données tout à l'heure ne souffre évidemment aucune difficulté. Si j'insiste sur cette extension c'est qu'elle permet à mon sens de mettre en évidence le véritable vice de l'objection que je m'étais proposé de discuter.

Celle-ci repose, en effet, sur ce fait, que tout mouvement qui a existé du temps t au temps postérieur t' peut être renversé, le temps t' étant considéré comme antérieur à t et que, *inorganisé dans le premier cas, il le sera également* dans le second.

C'est ce dernier point qui ne me paraît pas exact.

Reprenons le cas des projectiles pesants, en supposant donnée, pour fixer les idées, la constante des forces vives. Considérons une série de ces projectiles lancés au hasard à une même hauteur h et dont, par conséquent, les mouvements ne seront pas exceptionnels, au moins à ce moment-là. Tous passeront ensuite à la hauteur h', celle-ci étant supposée inférieure, et inférieure d'une quantité très grande, à h. Mais, dans cette nouvelle situation de nos projectiles, leurs mouvements seront devenus exceptionnels : ils seront tous sensiblement verticaux et descendants.

L'explication du paradoxe est immédiate : au premier instant, nos mobiles ne sont pas exceptionnels parmi ceux qui sont à cet instant-là à la hauteur $z = h$; au second instant, ils sont exceptionnels parmi ceux qui (toujours avec la vitesse correspondante à la valeur donnée de la constante des forces vives) sont à la hauteur h' : question toute différente de la première.

Autrement dit, le fait, pour un mouvement, d'être organisé ou inorganisé dépend de ce que l'on suppose préalablement connu à son sujet.

Si donc H est une certaine fonction de la distribution des systèmes S, la propriété suivante :

"La quantité H est croissante si la distribution est inorganisée"

est susceptible d'un énoncé du genre de celui-ci, où je ne vois plus de prise pour l'objection de réversibilité :

"Soient H_1 et $H_2 < H_1$ deux valeurs de H; T un intervalle de temps convenablement choisi.

"Désignons par M_1 les mouvements pour lesquels, pendant l'intervalle T, la quantité H prend au moins une fois la valeur H_1 ; par M_2, les mouvements pour lesquels (au cours du même intervalle de temps) H prend au moins une fois la valeur H_2 ; par M_3, ceux qui satisfont à l'une et à l'autre des deux conditions précédentes ; autrement dit, qui sont à la fois des mouvements M_1 et des mouvements M_2.

"Les M_3 sont exceptionnels parmi les M_1, mais non parmi les M_2."

Je ne doute guère, pour ma part, de l'existence d'un pareil énoncé après les déductions de Gibbs et de Boltzmann ; et si leur conclusion était erronée, l'erreur ne me paraîtrait pouvoir porter que sur l'expression de la quantité H.

Je me suis laissé entraîner à commenter longuement cette partie si essentielle de l'oeuvre de Gibbs, et je craindrais d'abuser de l'attention du lecteur en insistant sur les trois derniers chapitres.

Nous avons, au reste, déjà parlé du sujet — le plus important peut-être après celui, qui vient de nous occuper — auquel se rapportent les chapitres XIII et XIV : les définitions de la température et de l'entropie, dans l'hypothèse cinétique : définitions qui sont examinées — toujours, il est vrai, en admettant la distribution canonique ou microcanonique, à la lumière des principales propriétés des deux notions à définir.

Le dernier chapitre de l'ouvrage mériterait une attention spéciale. Gibbs y considère des ensembles (" grands ensembles ") dont les systèmes constituants sont eux-mêmes des ensembles (" petits ensembles ") de molécules. Le nombre de ces molécules varie d'ailleurs d'un " petit ensemble " à un autre, comme leur positions et leurs vitesses ; et, d'autre part, on admet l'échange des particules entre les différents " petits ensembles." C'est dans les phénomènes de diffusion, particulièrement dans ceux qui ont lieu au contact des membranes semi-perméables, que Gibbs fait intervenir cette nouvelle catégorie d'ensembles, laquelle présente, on le voit, un caractère nouveau et important au point de vue théorique, puisque les différents systèmes partiels cessent d'être entièrement indépendants.

Telle est, dans ses grandes lignes, la dernière oeuvre de Gibbs. Il ne pourrait en exister de plus actuelle et de plus importante, en dépit de la modestie de son titre. Cette modestie n'est d'ailleurs pas de pure forme : elle correspond bien à la pensée arrêtée de l'auteur. Gibbs, nous l'avons vu, n'a pas abordé la théorie des chocs : il a voulu, sauf en son dernier chapitre, se borner au cas le plus simple, celui où le mouvement d'un des systèmes n'est pas troublé par la présence des autres. Son but n'a pas été, en un mot, de remplacer des ouvrages comme les Leçons sur la théorie des gaz de Boltzmann, mais de leur servir de base, ainsi qu'aux autres études qu'on pourra entreprendre sur le même sujet. C'est en ce sens surtout, peut-être, qu'il a fait oeuvre de mathématicien ; cette sorte de besogne préparatoire est, il faut nous l'avouer, la seule qui nous incombe le plus souvent. Encore si nous pouvions la mener assez vite pour fournir aux besoins des sciences de la nature ; mais rien que dans les Principes élémentaires de mécanique statistique, combien de questions avons-nous rencontrées auxquelles notre théorie des équations différentielles est actuellement incapable de répondre ! Cependant pour effacé qu'il soit, ce rôle n'en est pas moins essentiel. Les successeurs de Boltzmann ne pourront se dispenser d'utiliser l'ouvrage de Gibbs : lui seul, en maintes circonstances peut leur assurer l'instrument commode — et, avant tout, l'instrument sûr, dont ils ont besoin.

JACQUES HADAMARD.