African Diaspora Journal of Mathematics
Proceedings of Geometry and Physics V ISSN 1539-854X
Volume 9, Number 2, pp. 17–33 (2010) www.african-j-math.org

Sur les feuilletages tendus transversalement affines des 3-variétés fibrées sur $\mathbf{S}^1$

Hamidou Dathe*
Department of Mathematics, Cheikh Anta Diop University,
Dakar, DC 5005, Sénégal

Abstract

We build some examples of taut transversely affine foliations on some closed manifolds which are surface bundles over the circle. These examples illustrate how such foliations can be various. Under some restrictive hypothesis Nakayama describes in [5] such foliations which have no compact leaf. We extend Nakayama's theorem for transversely affine foliations without Reeb component. Also we give an example among these transversely affine foliations without non-trivial transversely projective deformation.

AMS Subject Classification: 62G05; 62G20.

Keywords: Feuilletages, tendus, pseudo-Anosov, 3-variétés.

1 Introduction

Soit φ un difféomorphisme *d'Anosov* du tore $\mathbf{T}^2$ et $\mathbf{T}^3_\varphi$ la 3-variété obtenue par suspension de φ. Ghys et Sergiescu ont montré dans ([3]) qu'il existe, à conjuguaison différentiable près, deux feuilletages de codimension 1 de classe C^∞ et sans feuille compacte sur $\mathbf{T}^3_\varphi$. Soit maintenant Σ une surface fermée orientée de genre $g \geq 2$, φ un difféomorphisme *pseudo-Anosov* sur Σ dont le feuilletage stable et le feuilletage instable sont orientés et n'admettent que des singularités de type selle à quatre branches. Soit V la 3-variété obtenue par suspension de φ. Combien y a t-il à conjuguaison près, de feuilletages de codimension 1 de classe C^∞ sans feuille compacte sur V? Il est possible comme dans le cas de $\mathbf{T}^3_\varphi$ de construire deux feuilletages *modèles* ayant ces propriétés. Nous examinons la question ci-dessus seulement pour les feuilletages transversalement affines dont l'holonomie linéaire est nulle sur la fibre de V. En général un feuilletage $\mathcal{F}$ *tendu* sur V possède une classe d'Euler qui, évaluée sur une fibre donne un entier (appelé *nombre d'Euler de* $\mathcal{F}$) compris entre $2-2g$ et $2g-2$. En employant une méthode de construction classique dûe à Ghys-Thurston on montre que tous les entiers entre $2-2g$ et $2g-2$ sont nombre d'Euler de feuilletage sans feuille compacte

*E-mail address: hamidou.dathe@ucad.edu.sn

transversalement affine sur V, cela prouve déjà que, contrairement à $\mathbf{T}^3_\varphi$, V porte en général beaucoup plus que deux feuilletages sans feuille compacte.

D'autre part si on considère $H^1(\Sigma,\mathbf{R})$ sur lequel φ induit un isomorphisme φ_*, pour chaque 1-forme fermée ω dont la classe de cohomologie $[\omega]$ est un vecteur propre de φ_*, on exhibe, généralisant une construction classique, un feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ sur V du type ci-dessus ayant même nombre d'Euler que les modèles, dont la restriction à Σ est ω, et $\mathcal{F}_\omega$ n'est isotope à aucun des modèles. Il semble alors naturel pour classifier les feuilletages tendus de V de se donner un nombre d'Euler et de restreindre les valeurs propres de φ_*. Nakayama a montré (voir [5]) que tout feuilletage transversalement affine sans feuille compacte mais ayant au signe près le même nombre d'Euler que la fibration et moyennant quelques hypothèses techniques convenables sur V était isotope à un modèle d'un revêtement fini de V. Nous avons étendu ce résultat de Nakayama au cas des feuilletages sans composante de Reeb. Nous montrons d'autre part que sur certains fibrés pseudo-Anosov cycliques, tout feuilletage transversalement projectif suffisamment proche d'un modèle est conjugué à ce modèle.

2 Feuilletages transversalement affines des fibrés en surfaces

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 transversalement orienté sur une variété V. On dit que $\mathcal{F}$ est *transversalement affine* s'il est défini par une 1-forme α tel que $d\alpha = \alpha \wedge \beta$, où β est une 1-forme vérifiant $d\beta = 0$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est dit *tendu* s'il possède une transversalement fermée qui coupe toutes ses feuilles. En particulier si $\mathcal{F}$ ne possède pas de feuille compacte, il est tendu. Si par contre $\mathcal{F}$ possède une composante de Reeb, il n'est pas tendu.
Considérons V une 3-variété fermée fibrée sur $\mathbf{S}^1$ et cyclique (i.e le premier nombre de Betti de V est égal à 1). Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage transversalement orienté de codimension 1 sur V, on appelle *classe d'Euler* de $\mathcal{F}$, la classe d'Euler habituelle du fibré tangent $T\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}$ considéré comme fibré vectoriel orienté de rang 2. La classe d'Euler $\chi(T\mathcal{F})$ est un élément de $H^2(V,\mathbf{R})$ qui est isomorphe à $\mathbf{R}$. Or la classe d'homologie $[\Sigma]$ de toute fibre Σ de V est un générateur de $H_2(V,\mathbf{R})$, donc $\chi(T\mathcal{F})$ est déterminé par sa valeur sur $[\Sigma]$, cette valeur est appelée *nombre d'Euler* de $\mathcal{F}$ et sera notée $E(\mathcal{F})$ dans toute la suite.

Calcul de $E(\mathcal{F})$ pour un feuilletage tendu $\mathcal{F}$: On suppose $\mathcal{F}$ un feuilletage tendu de codimension 1 sur une 3-variété V fermée fibrée sur $\mathbf{S}^1$ et cyclique. Soit Σ une fibre de V, on sait d'après ([7]) que Σ est isotope à une surface fermée qu'on note encore Σ qui est transverse à $\mathcal{F}$ sauf en un nombre fini de points qui sont des singularités de type selle à 4 branches pour $\mathcal{F}$ (on dira que Σ est en *position optimale* par rapport à $\mathcal{F}$). Une singularité s sera dite positive (resp. négative) si l'orientation du fibré tangent $T\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}$ en s est la même (resp. opposée) que celle du fibré tangent à la fibration en s. Notons I_p la somme des indices des singularités positives et I_n la somme des indices des singularités négatives. D'après ([9]), on a:

$I_p - I_n = E(T\mathcal{F})$ (1) et $I_p + I_n = \chi(\Sigma)$ (2), où $\chi(\Sigma)$ est la caractéristique d'Euler Poincaré de Σ.

La suite de cet article est l'étude des feuilletages transversalement affines tendus sur des 3-variétés fermées fibrées sur le cercle $\mathbf{S}^1$. Considérons d'abord le cas où la fibre est un tore $\mathbf{T}^2$: soit φ un difféomorphisme d'Anosov du tore $\mathbf{T}^2$ induit par une matrice hyperbolique de $\mathbf{R}^2$. La matrice A possède alors deux valeurs propres réelles distinctes λ et $1/\lambda$. Les feuilletages de $\mathbf{R}^2$ par droites de pente λ et $1/\lambda$ sont invariants par l'action de $\mathbf{Z}^2$ et induisent alors sur $\mathbf{T}^2$ deux feuilletages invariants par φ. En suspendant ces feuilletages sur la 3-variété $\mathbf{T}^3_\varphi$ obtenue par suspension de φ, on obtient deux feuilletages minimaux sur $\mathbf{T}^3_\varphi$ qu'on appelle les *modèles*. Ghys et Sergiescu ont montré le théorème suivant:

Theorem 2.1. *([3]) Tout feuilletage de codimension* 1*, de classe* C^r*,* $r \geq 2$ *et sans feuille compacte sur* T^3_φ *est* C^{r-2}*-conjugué à l'un des modèles.*

Considérons maintenant Σ une surface fermée de genre ≥ 2.

Definition 2.2. Soit $\varphi : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ un difféomorphisme, φ est dit pseudo-Anosov à 4 branches s'il existe deux feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sur Σ vérifiant les propriétés suivantes:

i) $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont transversalement orientés et mesurés. $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ sont singuliers avec des singularités qui sont des selles à quatre branches, ils ont le même ensemble singulier K et sont transverses sur $\Sigma - K$.

ii) Il existe une constante $\lambda > 1$ telle que:

$$\varphi_*(\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1}\mu^s)$$

$$\varphi_*(\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu^u).$$

Les feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ seront appelés respectivement le feuilletage *stable* et le feuilletage *instable* de φ.

Soit V un Σ-fibré sur $\mathbf{S}^1$ avec une monodromie φ pseudo-Anosov. Notons ω^s et ω^u les 1-formes fermées définissant respectivement le feuilletage stable et le feuilletage instable de φ et λ le coefficient de dilatation de φ. Les premiers exemples de feuilletages non singuliers sur V sont ceux qu'on obtient par suspension du feuilletage stable et du feuilletage instable de φ suivie d'une désingularisation. Voici cette construction:

Sur $\Sigma \times [0,1]$, on considère la 1-forme $\Omega_\sigma = \lambda^{\varepsilon(\sigma)t}\omega^\sigma + c.dt$, avec $c \in \{1,-1\}$, $\sigma \in \{s,u\}$, $\varepsilon(\sigma) = 1$ si $\sigma = s$ et -1 si $\sigma = u$. La 1-forme Ω_σ définit un feuilletage H^σ sur V ayant un nombre fini de cercles de contact $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ avec la fibration de V sur $\mathbf{S}^1$. Chaque cercle γ_i possède un voisinage tubulaire V_i feuilleté comme dans la figure ci-dessous:

Figure 1.Voisinage tubulaire V_i.

Découpons les V_i, on obtient une 3-variété compacte M et H^σ induit sur le bord de M quatres composantes de Reeb planes R_i^j, $j = 1, \ldots 4$, qui sont deux à deux parallèles. On remplace V_i par un voisinage U_i muni d'un feuilletage obtenu en ouvrant V_i suivant γ_i et recollant chaque feuille de R_i^j avec une feuille de la face opposée.
Le feuilletage H^σ s'étend ainsi en un feuilletage transversalement affine tendu $\mathcal{F}^\sigma$ sur V. Les $\mathcal{F}^\sigma$ ont même classe d'Euler que la fibration. On appelle *modèles positifs* les feuilletages $\mathcal{F}^\sigma$ de même classe d'Euler que la fibration et *modèles négatifs* les $\mathcal{F}^\sigma$ de classe d'Euler opposée à celle de la fibration. On dira *modèle* tout court pour désigner un modèle positif ou négatif.
Le théorème suivant dû à S. Matsumoto (voir [5]) montre qu'il existe en général des feuilletages sans feuille compacte qui sont non isotopes aux modèles sur tout fibré pseudo-Anosov.

Theorem 2.3. *Soit V une 3-variété fermée fibrée sur le cercle $\mathbf{S}^1$ avec une monodromie pseudo-Anosov. Si les fibres de V sont de genre g, il existe au moins $2g-1$ classes d'isotopies de feuilletages transversalement affines tendus sur V.*

Proof. Soit Σ une fibre de V, d'après les formules (1) et (2), si $\mathcal{F}$ est un feuilletage tendu sur V on a: $|E(\mathcal{F})| \leq -\chi(\Sigma)$. Nous allons montrer que pour chaque entier n vérifiant $|n| \leq -\chi(\Sigma)/2$, il y a un feuilletage transversalement affine tendu dont le nombre d'Euler est $2n$. En effet soit φ la monodromie de V et $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ le feuilletage stable et le feuilletage instable de φ définis par les 1-formes fermées ω^s et ω^u. Soit λ le coefficient du pseudo-Anosov φ. Posons $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ l'ensemble singulier commun aux feuilletages $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$. Sur $\Sigma \times \mathbf{R}$ on considère le feuilletage défini par la 1-forme $\Omega_\sigma = \lambda^{\varepsilon(\sigma)t}\omega^\sigma$, $\varepsilon(\sigma) = 1$, si $\sigma = s$ et $\varepsilon(\sigma) = -1$ si $\sigma = u$. La 1-forme définit sur V un feuilletages singulier $\tilde{\mathcal{F}}^\sigma$ dont l'ensemble singulier est $K = (S \times \mathbf{R})/(x,t) \sim (\varphi(x), t+1)$. Les composantes connexes de K sont des cercles γ_i, chaque cercle possède un voisinage tubulaire V_i feuilleté comme dans la figure 1. On remplace $n - \chi(\Sigma)$ V_i par des U_i muni du feuilletage obtenu en ouvrant V_i

suivant γ_i et recollant chaque feuille de R_i^j avec une feuille de la face opposée comme dans la figure 2.

Figure 2.Voisinage tubulaire U_i.

Ensuite on remplace $-n-\chi(\Sigma)$ V_i par des U_i feuilletés comme précédemment mais dans lesquels on renverse l'orientation transverse des feuilletages. On obtient ainsi un feuilletage $\mathcal{F}$ non singulier et tendu sur V dont le nombre d'Euler est $2n$. Les structures transversalement affines sur $V-V_i$ et sur U_i ayant toutes de l'holonomie, elles se recollent par unicité des structures transversalement affines avec holonomie (voir [8]). Le feuilletage $\mathcal{F}$ est alors transversalement affine. □

Le théorème suivant montre que la classe d'Euler n'est pas la seule obstruction à ce qu'il ait peu de feuilletages tendus sur un fibré pseudo-Anosov. Donnons auparavant la description de la représentation d'holonomie des feuilletages transversalement affines sur certains fibrés pseudo-Anosov:

Soit donc $F \overset{i}{\hookrightarrow} V \xrightarrow{p} \mathbf{S}^1$ un fibré cyclique de fibre une surface fermée F et de monodromie φ. On a la suite exacte suivante au niveau des groupes fondamentaux:

$$1 \longrightarrow \pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(V) \xrightarrow{p_*} \pi_1(\mathbf{S}^1) \sim \mathbf{Z} \longrightarrow 0.$$

Le morphisme p_* admet une section; celle-ci permet de relever le générateur $1 \in \mathbf{Z}$ en un élément $t \in \pi_1(V)$. On note GA le groupe des transformations affines de $\mathbf{R}$ préservant l'orientation. Le groupe GA est vu comme produit semi-direct de $\mathbf{R}$ par $\mathbf{R}_+^*$, ce dernier agissant sur le premier par multiplication. Notons $\mathcal{T}$ le sous-groupe des translations dans GA.

Proposition 2.4. *Soit $F \overset{i}{\hookrightarrow} V \overset{p}{\longrightarrow} \mathbf{S}^1$ un fibré cyclique de fibre une surface fermée F et de monodromie φ. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage transversalement affine de codimension 1 sur V non isotope à p et $\rho : \pi_1(V) \longrightarrow GA$ la représentation d'holonomie de $\mathcal{F}$. Alors $\rho \circ i_*(\pi_1 F) \subset \mathcal{T}$ et la partie linéaire de $\rho(t)$ est non triviale. De plus la restriction de ρ à $i_*(\pi_1(F))$ (appelée l'holonomie abélienne de $\mathcal{F}$) définit un vecteur propre de valeur propre réelle pour l'isomorphisme φ_* induit par φ sur $H^1(F)$.*

Proof. A chaque nombre réel b faisons correspondre la translation $u : x \longrightarrow x+b$ et soit v le morphisme qui à chaque élément $ax+b$ de GA fait correspondre son rapport a. On obtient ainsi une suite exacte:

$$1 \longrightarrow \mathbf{R} \longrightarrow GA \longrightarrow \mathbf{R}_+^* \longrightarrow 1$$

Choisissons x_0 un point fixe de φ et $\gamma \in \pi_1(F, x_0)$, on a:

$$i_* \circ \varphi_*(\gamma) = t^{-1}.(i_*\gamma).t$$

Pour montrer que $\rho \circ i_*(\pi_1 F) \subset \mathbf{R}$ il suffit de montrer que $v \circ \rho \circ i_*(\gamma) = 1$, i.e $Log.v \circ \rho \circ i_*(\gamma) = 0$.
On a:

$$Log.v \circ \rho \circ i_* \circ \varphi_*(\gamma) = Log.v[\rho(t)^{-1}.\rho(i_*\gamma).\rho(t)] = Log.v \circ \rho \circ i_*(\gamma).$$

Donc si $[Log.v \circ \rho \circ i_*]$ est l'élement de H^1F donné par $Log.v \circ \rho \circ i_*$, $[Log.v \circ \rho \circ i_*]$ est un point fixe de l'isomorphisme φ_*. Comme V est cyclique, $[Log.v \circ \rho \circ i_*] = 0$, ce qui entraine que $v \circ \rho \circ i_* = 1$. D'autre part si la partie linéaire de $\rho(t)$ est triviale, $\mathcal{F}$ est défini par une 1-forme fermée non singulière et est alors isotope à la fibration de V sur $\mathbf{S}^1$(voir [4]), ce qui est impossible. □

Theorem 2.5. *Soit V une 3-variété fermée et $\pi : V \longrightarrow \mathbf{S}^1$ une fibration de V de monodromie φ. On suppose V cyclique. Soit φ_* l'action de φ en homologie. Soit ω une 1-forme dont la classe de cohomologie est un vecteur propre non nul de φ_*, alors il existe un feuilletage tendu $\mathcal{F}_\omega$ sur V ayant les propriétés suivantes:*

i) $\mathcal{F}_\omega$ est transversalement affine et a même classe d'Euler que π. La restriction de $\mathcal{F}_\omega$ à une fibre de V est ω. Et $\mathcal{F}_\omega$ est une perturbation de π.

ii) $\mathcal{F}_\omega$ est isotope à $\mathcal{F}_{\omega'}$ si et seulement si les classes de cohomologie de de Rham de ω et ω' sont positivement colinéaires. Les $\mathcal{F}_\omega$ sont, à isotopie près, les seuls feuilletages transversalement affines qui sont des perturbations de π.

Proof. i) Soit Σ une fibre de V, $\varphi : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ le difféomorphisme de monodromie et φ_* l'action de φ en homologie. Soit ω une 1-forme fermée à singularités selles dont la classe de cohomologie absolue $[\omega]$ est un vecteur propre pour φ_* de valeur propre μ, on a:

$$\varphi_*[\omega] = \mu[\omega]$$

Soit $f : \Sigma \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que:

$$\mu\omega = \varphi_*\omega + df.$$

Posons:

$$\omega_t = \mu(1-t)\omega + t\varphi_*\omega$$

On a: $\omega_0 = \mu\omega$ et $\omega_1 = \varphi_*\omega$.

Soit Ω la 1-forme sur $\Sigma \times [0,1]$ définie par: $\forall (p,t) \in \Sigma \times [0,1]$,

$\Omega_{(p,t)} = \omega_{t(p)} - (f(p)+C)dt$ où C est une constante positive suffisamment grande. La 1-forme Ω est alors non singulière et induit sur les bords de $\Sigma \times [0,1]$ les formes $\mu\omega$ et $\varphi_*\omega$; de plus $d\Omega = 0$ et donc Ω définit un feuilletage transversalement affine $\mathcal{F}_\omega$ sur V en recollant les bords de V par φ.

L'orientation transverse de $\mathcal{F}_\omega$ est donnée par l'orientation positive de Ω et aux singularités de ω cette orientation est la même que celle de la fibration. Donc toutes les singularités de ω sont positives. On alors conformément aux notations précédentes,

$$\chi(T\mathcal{F}_\omega).[\Sigma] = 2g-2.$$

Le feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ a alors même classe d'Euler que la fibration. De plus $\mathcal{F}_\omega$ est une perturbation de la fibration de V sur $\mathbf{S}^1$, en effet la famille à un paramètre de feuilletages $\mathcal{F}_m$ définie par les 1-formes

$$\Omega^m_{(p,t)} = m\omega_{t(p)} - (f(p)+C)dt$$

vérifie $\mathcal{F}_0 = \pi$ et pour tout $m \geq 0$, $\mathcal{F}_m$ est isotope à $\mathcal{F}_\omega$. Comme π est tendu, $\mathcal{F}_\omega$ est tendu.

ii) Supposons que $\omega^{'}$ soit une 1-forme dont la classe de cohomologie absolue est positivement colinéaire à celle de ω, alors les représentations d'holonomie ρ et $\rho^{'}$ de $\mathcal{F}_\omega$ et $\mathcal{F}_{\omega'}$ sont conjuguées dans GA d'après la proposition ci-dessus et comme $\mathcal{F}_\omega$ et $\mathcal{F}_{\omega'}$ sont des perturbations de la fibration, ils sont isotopes. Réciproquement si $\mathcal{F}_\omega$ et $\mathcal{F}_{\omega'}$ sont isotopes, ρ et $\rho^{'}$ sont conjugués dans GA et donc $[\omega]$ et $[\omega^{'}]$ sont positivement colinéaires.

Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage transversalement affine suffisamment proche de la fibration, l'holonomie abélienne de $\mathcal{F}$ est un vecteur propre v non nul mais suffisamment proche de 0 car pour la fibration l'holonomie abélienne est nulle. Nous construisons comme dans i) un feuilletage transversalement affine $\mathcal{F}^{'}$ qui est une perturbation de la fibration et de même représentation d'holonomie que $\mathcal{F}$ à conjuguaison près. Donc $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{'}$ sont isotopes. □

Nous en déduisons le

Corollary 2.6. *Soit V un fibré pseudo-Anosov cyclique. Soit λ le coefficient de dilatation de la monodromie φ de V. Si la matrice induite par φ en homologie possède une valeur propre réelle distincte de λ et $1/\lambda$, il existe sur V un feuilletage tendu transversalement affine dans la classe d'Euler de la fibration et qui n'est conjugué ni à un modèle ni à la fibration.*

Proof. En effet dans la situation i) du théorème précédent si le vecteur propre v n'est ni dans la classe de cohomologie du feuilletage stable ni dans celle du feuilletage instable, le feuilletage $\mathcal{F}$ obtenu a une représentation d'holonomie non conjuguée à celle d'un modèle. Le feuilletage $\mathcal{F}$ n'est alors isotope à aucun des modèles et n'est aussi pas isotope à une fibration. Comme $\mathcal{F}$ est une perturbation d'une fibration, il est tendu. □

Nakayama a montré le

Theorem 2.7. *([5]) Soit Σ une surface fermée orientée de genre $g \geq 2$ et $\pi : V \longrightarrow \mathbf{S}^1$ un Σ-fibré pseudo-Anosov. On suppose que la matrice de monodromie possède deux valeurs propres réelles λ et $1/\lambda$ avec des sous-espaces propres associés de dimension 1, où $\lambda > 1$ est le coefficient de dilatation de la monodromie. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1* *sans feuille compacte vérifiant:* $\chi(T\mathcal{F}) = \pm\chi(T\pi)$*;* $\chi(T\mathcal{F})$ *et* $\chi(T\pi)$ *désignent les classes d'Euler de* $\mathcal{F}$ *et* π *respectivement. Alors il existe un revêtement fini de* $\mathcal{F}$ *qui est* C^0*-isotope à l'un des modèles.*

Remark 2.8. Pour prouver ce théorème, Nakayama se sert de deux théorèmes intermédiaaires que sont les théorèmes 2 et 3 de [5]. Or dans le théorème 2, l'hypothèse sans feuille compacte sert tout simplement à mettre une fibre de V en position optimale par rapport au feuilletage $\mathcal{F}$. Ensuite une fois que les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées, le théorème 3 est vrai dès que $\mathcal{F}$ possède une mesure transverse invariante de support total, en particulier s'il est défini par une 1-forme fermée non singulière.

Nous pouvons alors étendre le théorème 2.7 de la manière suivante:

Theorem 2.9. *Soit* Σ *une surface fermée orientée de genre* $g \geq 2$ *et* $\pi : V \longrightarrow \mathbf{S}^1$ *un* Σ*-fibré pseudo-Anosov. On suppose que la matrice de monodromie possède deux valeurs propres réelles* λ *et* $1/\lambda$ *avec des sous-espaces propres associés de dimension* 1*, où* $\lambda > 1$ *est le coefficient de dilatation de la monodromie. Soit* $\mathcal{F}$ *un feuilletage transversalement affine de codimension* 1 *sans composante de Reeb vérifiant* $\chi(T\mathcal{F}) = \pm\chi(T\pi)$*;* $\chi(T\mathcal{F})$ *et* $\chi(T\pi)$ *désignent les classes d'Euler de* $\mathcal{F}$ *et* π *respectivement. Alors on a une et une seule des deux situations suivantes:*

i) Le feuilletage $\mathcal{F}$ *est isotope à la fibration* π*.*

ii) Il existe un revêtement fini de $\mathcal{F}$ *qui est* C^0*-isotope à l'un des modèles d'un revêtement fini de* V*.*

Proof. Soit Σ_0 une fibre de V, $\varphi : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_0$ le difféomorphisme de monodromie de V et ω^s, ω^u les 1-formes définissant le feuilletage stable et le feuilletage instable de φ. Notons par φ_* l'action induite par φ sur $H_1(\Sigma_0)$. Remarquons d'abord que V est cyclique car sinon, il existe une courbe fermée non homologue à 0 dont la classe d'homologie est préservée par φ_*, ce qui est impossible puisque les seules valeurs propres réelles de φ_* sont λ et $1/\lambda$. D'autre part, On sait (voir [7]), que Σ_0 est isotope à une surface fermée encore notée Σ_0 telle que si Σ_0 n'est pas tangente à $\mathcal{F}$ alors Σ_0 est en position optimale par rapport à $\mathcal{F}$. Examinons alors les deux cas:

1- *La fibre* Σ_0 *est tangente à* $\mathcal{F}$. Alors le feuilletage obtenu en relevant $\mathcal{F}$ sur $\Sigma_0 \times [0,1]$ est défini par une 1-forme fermée non singulière tangente au bord (voir proposition 2.4), donc une fibration sur $[0,1]$, $\mathcal{F}$ est alors une fibration sur $\mathbf{S}^1$. Comme $b_1 V = 1$, $\mathcal{F}$ est isotope à π ([4]).

2- *La fibre* Σ_0 *est en position optimale par rapport à* $\mathcal{F}$. En relevant $\mathcal{F}$ sur $\Sigma_0 \times [0,1]$ on obtient un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ défini par une 1-forme fermée Ω (voir proposition 2.4) qui induit sur $\Sigma_0 \times \{0\}$ une 1-forme fermée singulière Ω_0 avec des singularités qui sont toutes de selles à 4 branches. Soit v l'élément de $H^1(\Sigma_0)$ défini par l'holonomie abélienne de $\mathcal{F}$, v est un vecteur propre de l'isomorphisme φ_* induit par φ (voir proposition 2.4) et comme $\mathcal{F}$ n'a pas de singularités centre sur Σ_0, la forme Ω_0 n'est pas exacte et v est alors non nul. Le vecteur propre v appartient alors à l'un des sous-espaces propres associés à λ ou $1/\lambda$ car sinon φ_* possède une valeur propre réelle distincte de λ et $1/\lambda$, ce qui est impossible. Donc v est colinéaire à ω^s ou ω^u puisque les sous-espaces propres associés à λ et $1/\lambda$ sont de dimension 1. La représentation d'holonomie de $\mathcal{F}$ est alors conjuguée à celle de l'une des modèles. D'autre part $\tilde{\mathcal{F}}$ possède une mesure transverse invariante de support total puisque défini par une 1-forme fermée non singulière. D'après la remarque 2.8, on peut appliquer les théorèmes 2 et 3 de Nakayama (voir [5]) pour obtenir ii). □

Nous donnons dans ce qui suit un exemple de fibré pseudo-Anosov dont les feuilletages modèles n'admettent pas de perturbation transversalement projective non affine. Cet exemple de fibré est construit par Nakayama dans [5]. Nous le reprenons en calculant explicitement l'action de la monodromie sur le groupe fondamental de la fibre, ce qui permet d'examiner les déformations des modèles dans $PSL(2,\mathbf{R})$.

Theorem 2.10. *Il existe un fibré pseudo-Anosov cyclique dont les feuilletages modèles n'admettent pas de perturbation transversalement projective non affine.*

Proof. On utilise la méthode de construction par revêtement ramifié des difféomorphismes pseudo-Anosov (voir [2], page 244 – 245).
On considère ψ le difféomorphisme du tore $\mathbf{T}^2$ induit par la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des points fixes de ψ est:

$$Fix(\psi) = \{(0,0),(1/5,2/5),(2/5,4/5),(3/5,1/5),(4/5,3/5)\}$$

Posons:

$$T = \mathbf{T}^2 - \{(1/5,2/5),(4/5,3/5)\}$$

La variété ouverte T se rétracte sur un bouquet de trois cercles $\{\alpha,\beta,\varepsilon\}$, $\pi_1 T$ est donc le groupe libre engendré par α, β et ε, où α et β sont générateurs de $\pi_1(\mathbf{T}^2)$ et ε entoure le trou $(1/5,2/5)$. Soit $q : S \longrightarrow T$ le revêtement régulier de T correspondant à $Ker\mu$ où:

$$\mu : \pi_1 T \longrightarrow \mathbf{Z}/2$$

est la représentation qui envoie α, β et ε sur 1.

La variété S est ouverte et difféomorphe à une surface fermée Σ de genre 2 percée en deux points. Le revêtement q s'étend en un revêtement ramifié $p : \Sigma \longrightarrow \mathbf{T}^2$ dont le lieu de ramification est $\{(1/5,2/5),(4/5,3/5)\}$. Le difféomorphisme ψ se relève par p en un difféomorphisme pseudo-Anosov φ de Σ. Calculons l'action de φ en homologie. On a que $\pi_1 S$ est un groupe libre à 5 générateurs a,b,c,d,e. Choisissons comme système de générateurs les éléments suivants: $a = \alpha\varepsilon$, $b = \beta\varepsilon$, $c = \varepsilon\alpha$, $d = \varepsilon\beta$ et $e = \varepsilon^2$. L'action de ψ sur $\pi_1(\mathbf{T}^2)$ est donnée par les relations suivantes

$\psi_*\alpha = \alpha^5\beta^3$ et $\psi_*\beta = \alpha^3\beta^2$.

Si ψ_T est la restriction de ψ à T, pour connaître l'action de ψ_T sur $\pi_1(T)$, on représente respectivement les droites $D_1 : y = \frac{2}{3}x$ et $D_2 : y = \frac{3}{5}x$. Le principe est de joindre les extrêmités de D_1 et D_2 en utilisant α, β et le trou ε. Voici le dessin:

On a alors:

$$\begin{array}{rcl}(\psi_T)_*\alpha & = & \alpha\beta\alpha^2\beta\varepsilon\alpha\beta\alpha \\ (\psi_T)_*\beta & = & \alpha\beta\alpha\beta\alpha \\ (\psi_T)_*\varepsilon & = & \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\varepsilon\alpha\beta\alpha\end{array}$$

On en déduit alors l'action de φ sur $\pi_1(\Sigma)$:

$$\begin{array}{rcl}\varphi_*a & = & adac(bc)^2 \\ \varphi_*b & = & adcbc \\ \varphi_*c & = & c^{-1}b^{-1}c^{-1}adacbcadcbc \\ \varphi_*d & = & c^{-1}b^{-1}c^{-1}adac(bc)^2\end{array}$$

L'abélianisée de cette action nous donne:

$$\begin{array}{rcl}\varphi_*[a] & = & 2[a]+2[b]+3[c]+[d] \\ \varphi_*[b] & = & [a]+[b]+2[c]+[d] \\ \varphi_*[c] & = & 3[a]+[b]+2[c]+2[d] \\ \varphi_*[d] & = & 2[a]+[b]+[c]+[d]\end{array}$$

Ainsi la matrice M induite par φ sur $H_1(\Sigma)$ est:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On sait d'après [6] que le groupe fondamental $\pi_1 V$ de la 3-variété suspension est engendré par $\pi_1\Sigma$ et un élément t avec les relations suivantes:

$$\begin{array}{rcl}\varphi_*a & = & tat^{-1} \\ \varphi_*b & = & tbt^{-1} \\ \varphi_*c & = & tct^{-1} \\ \varphi_*d & = & tdt^{-1} \\ [a,b][c,d] & = & 1\end{array}$$

La représentation d'holonomie ρ^1 de $\mathcal{F}^1$ est à valeurs dans le groupe affine de $\mathbf{R}$ et est telle que: $\rho^1(\pi_1\Sigma) \subset \mathbf{R}$; $\rho^1(t) \in \mathbf{R}^*_+$, où t est l'élément de $\pi_1 V$ qui est un relèvement du générateur $1 \in \pi_1\mathbf{S^1} \simeq \mathbf{Z}$ par une section de la fibration de V sur $\mathbf{S^1}$.

Le problème de la déformation du feuilletage $\mathcal{F}^1$ se ramène à une déformation de la représentation ρ^1 (voir [10]).
Supposons que $\mathcal{F}^1$ admette une déformation tranversalement projective, alors il existe une famille à un paramètre réel positif m de représentations ρ_m vérifiant:

$\forall\gamma \in \pi_1 V, \exists\alpha(\gamma) \in PSL(2,\mathbf{R})$ tel que: $\rho^1_m(\gamma) = \rho(\gamma)[Id + m\alpha(\gamma)]$ (I).

Posons:

$$\rho^1(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^1(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^1(c) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^1(d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho^1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$$

Posons : $\alpha(a) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$. En écrivant la condition la condition $\det\rho^1_m(a) = 1$ et en la linéarisant par rapport à m, on obtient $y_1 = -y_4$, ainsi :

$$\alpha(a) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & -y_1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(b) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & -z_1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(c) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & -u_1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(d) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & -v_1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix}$$

D'après l'égalité (I), on a :

$$
\begin{aligned}
A &= \rho_m^1(a) = \begin{pmatrix} my_1 + amy_3 + 1 & a + my_2 - amy_1 \\ my_3 & -my_1 + 1 \end{pmatrix} \\
B &= \rho_m^1(b) = \begin{pmatrix} mz_1 + bmz_3 + 1 & b + mz_2 - bmz_1 \\ mz_3 & -mz_1 + 1 \end{pmatrix} \\
C &= \rho_m^1(c) = \begin{pmatrix} mu_1 + cmu_3 + 1 & c + mu_2 - cmu_1 \\ mu_3 & -mu_1 + 1 \end{pmatrix} \\
P &= \rho_m^1(d) = \begin{pmatrix} mv_1 + dmv_3 + 1 & d + mv_2 - dmv_1 \\ mv_3 & -mv_1 + 1 \end{pmatrix} \\
T &= \rho_m^1(t) = \begin{pmatrix} (-mx_1 + 1)/\lambda & -m\lambda x_2 \\ (-mx_3)/\lambda & \lambda + m\lambda x_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Le fait que ρ_m^1 soit un homomorphisme de groupes nous donne le système suivant obtenu à partir des équations (1), (2), (3), (4), et (5).

$$
\begin{aligned}
\rho_m^1(a)\rho_m^1(d)\rho_m^1(a)\rho_m^1(c)[\rho_m^1(b)\rho_m^1(c)]^2 &= \rho_m^1(t)\rho_m^1(a)[\rho_m^1(t)]^{-1} && (1') \\
\rho_m^1(a)\rho_m^1(d)\rho_m^1(c)\rho_m^1(b)\rho_m^1(c) &= \rho_m^1(t)\rho_m^1(b)[\rho_m^1(t)]^{-1} && (2') \\
[\rho_m^1(c)]^{-1}[\rho_m^1(b)]^{-1}[\rho_m^1(c)]^{-1}\rho_m^1(a)\rho_m^1(d)\rho_m^1(a) & \\
\rho_m^1(c)\rho_m^1(b)\rho_m^1(c)\rho_m^1(a)\rho_m^1(d)\rho_m^1(c)\rho_m^1(b)\rho_m^1(c) &= \rho_m^1(t)\rho_m^1(c)[\rho_m^1(t)]^{-1} && (3') \\
[\rho_m^1(c)]^{-1}[\rho_m^1(b)]^{-1}[\rho_m^1(c)]^{-1}\rho_m^1(a) & \\
\rho_m^1(d)\rho_m^1(a)\rho_m^1(c))[\rho_m^1(b)\rho_m^1(c)]^2 &= \rho_m^1(t)\rho_m^1(d)[\rho_m^1(t)]^{-1} && (4') \\
\rho_m^1(a)\rho_m^1(b)[\rho_m^1(a)]^{-1}[\rho_m^1(b)]^{-1} & \\
\rho_m^1(c)\rho_m^1(d)[\rho_m^1(c)]^{-1}[\rho_m^1(d)]^{-1} &= Id && (5')
\end{aligned}
$$

Les équations $(1'), (2'), (3'), (4')$ et $(5')$ linéarisées par rapport à m fournissent un système S linéaire avec 15 inconnues. Une résolution de ce système par un logiciel de calcul formel (Maple) donne un espace de solutions de dimension 3. Ce qui signifie que les seules déformations possibles pour $\mathcal{F}^1$ sont les conjuguaisons. De même pour $\mathcal{F}^2$. Donc les modèles n'admettent pas de déformations transversalement projectives non affines. □

On note par V_ψ^3 un tel fibré pseudo-Anosov.

Corollary 2.11. *Tout feuilletage transversalement projectif sur V_ψ^3 suffisamment proche d'un modèle est conjugué à ce modèle.*

Question : Tout feuilletage transversalement projectif sans feuille compacte et ayant même classe d'Euler qu'un modèle sur V_ψ^3 est t-il conjugué à ce modèle?

3 Annexe:

Programme de résolution du système S avec le logiciel Maple.
La matrice induite en homologie par φ est:

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de M est:
$(z^2 - 7z + 1)(z^2 + z + 1)$
$t := \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}$ est la valeur propre réelle de M qui correspond au coefficient du pseudo-Anosov φ.

$$r := \sqrt{\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}}$$

Le vecteur propre associé à t est:

$$V := \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5},\, 1,\, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5},\, 1\right]$$

Donc:
$a := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5},\, b := 1,\, c := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5},\, d := 1$

Le système S de variables $x1, x2, x3, y1, y2, y3, z1, z2, z3, u1, u2, u3, v1, v2, v3$ est:

$$S := \{-\frac{13}{2}z1 - \frac{23}{2}u1 - 7x1 + 10y1 - \frac{25}{2}y3 + 2y2 + \frac{33}{2}z3 - 3x1\sqrt{5} - 3v3\sqrt{5} + 4y1\sqrt{5} - \frac{3}{2}v2\sqrt{5} + \frac{15}{2}z3\sqrt{5}$$

$$+4v1\sqrt{5} - \frac{11}{2}u1\sqrt{5} + z2 + 10u3\sqrt{5} - \frac{11}{2}y3\sqrt{5} - \frac{5}{2}z1\sqrt{5} + 8v1 + u2 + 22u3 - \frac{5}{2}v2 - 7v3 = 0,$$

$$\frac{17}{2}y3 + \frac{7}{2}y3\sqrt{5} - 4u3 - 2u3\sqrt{5} + 4v3 + 2v3\sqrt{5} - \frac{3}{2}z3 - \frac{1}{2}z3\sqrt{5} - z1 - u1 - 2y1 - x3 = 0,$$

$$12u3 + \frac{17}{2}z3 + \frac{3}{2}v3 + 6u3\sqrt{5} + \frac{7}{2}z3\sqrt{5} + 2z1 + 3u1 + 2y3 + y3\sqrt{5} + \frac{1}{2}v3\sqrt{5} + y1 + v1 + \frac{1}{2}x3 + \frac{1}{2}x3\sqrt{5} =$$

$$\frac{12y3 + 6y3\sqrt{5} + 14z3 + 6z3\sqrt{5} + 21u3 + 9u3\sqrt{5} + 7v3 + 3v3\sqrt{5}}{7 + 3\sqrt{5}} = 0,$$

$$-13\,u3-7\,z3-3\,v3-y3-y3\,\sqrt{5}-6\,u3\,\sqrt{5}-\frac{1}{2}\,x3-\frac{1}{2}\,x3\,\sqrt{5}-v3\,\sqrt{5}-3\,z3\,\sqrt{5}-z1-u1-3\,y1-2\,v1=0,$$

$$\frac{9}{2}\,u3+\frac{5}{2}\,z3+\frac{17}{2}\,y3+\frac{7}{2}\,y3\,\sqrt{5}+\frac{3}{2}\,u3\,\sqrt{5}+4\,v3+2\,v3\,\sqrt{5}+\frac{3}{2}\,z3\,\sqrt{5}-2\,z1-3\,u1-y1-v1-\frac{1}{2}\,x3-\frac{1}{2}\,x3\,\sqrt{5}=$$

$$\frac{7\,u3+3\,u3\,\sqrt{5}+7\,z3+3\,z3\,\sqrt{5}+5\,v3+3\,v3\,\sqrt{5}+14\,y3+6\,y3\,\sqrt{5}}{7+3\,\sqrt{5}}=0,$$

$$2\,y3+y3\,\sqrt{5}-\frac{5}{2}\,z3-\frac{3}{2}\,z3\,\sqrt{5}-z1-z1\,\sqrt{5}-\frac{5}{2}\,v3-\frac{3}{2}\,v3\,\sqrt{5}+2\,u1+2\,u3+u3\,\sqrt{5}-v1-v1\,\sqrt{5}+2\,y1=0,$$

$$\frac{1}{2}\,x3+\frac{1}{2}\,x3\,\sqrt{5}+u1+\frac{5}{2}\,u3-8\,v3-\frac{31}{2}\,y3-\frac{13}{2}\,y3\,\sqrt{5}+\frac{3}{2}\,u3\,\sqrt{5}-4\,v3\,\sqrt{5}+\frac{3}{2}\,z3+\frac{1}{2}\,z3\,\sqrt{5}+z1+3\,y1+2\,v1$$

$$-6\,z1-\frac{15}{2}\,u1-11\,x1+\frac{23}{2}\,y1+22\,y3-\frac{3}{2}\,y2+22\,z3-5\,x1\,\sqrt{5}+5\,v3\,\sqrt{5}+\frac{9}{2}\,y1\,\sqrt{5}+10\,z3\,\sqrt{5}+\frac{3}{2}\,v1\,\sqrt{5}$$

$$-\frac{9}{2}\,u1\,\sqrt{5}-\frac{3}{2}\,y2\,\sqrt{5}+2\,z2+12\,u3\,\sqrt{5}+10\,y3\,\sqrt{5}-2\,z1\,\sqrt{5}+\frac{5}{2}\,v1+3\,u2+26\,u3+v2+11\,v3=0,$$

$$-u3+\frac{1}{2}\,v3+\frac{1}{2}\,v3\,\sqrt{5}-y3+\frac{1}{2}\,z3+\frac{1}{2}\,z3\,\sqrt{5}=0,$$

$$\frac{15}{2}\,u3+5\,z3-\frac{3}{2}\,y3-\frac{1}{2}\,y3\,\sqrt{5}+\frac{7}{2}\,u3\,\sqrt{5}-\frac{3}{2}\,v3-\frac{1}{2}\,v3\,\sqrt{5}+z1+u1+2\,y1+2\,z3\,\sqrt{5}+x3=0,$$

$$z1-4\,u1-7\,x1+\frac{5}{2}\,y1+4\,y3+y2+4\,z3-3\,x1\,\sqrt{5}+\frac{5}{2}\,v3\,\sqrt{5}+\frac{1}{2}\,y1\,\sqrt{5}+2\,z3\,\sqrt{5}+\frac{1}{2}\,v1\,\sqrt{5}$$

$$-2\,u1\,\sqrt{5}-\frac{5}{2}\,z2+\frac{5}{2}\,u3\,\sqrt{5}+2\,y3\,\sqrt{5}+z1\,\sqrt{5}+\frac{1}{2}\,v1+2\,u2+\frac{11}{2}\,u3+v2+\frac{11}{2}\,v3-\frac{3}{2}\,z2\,\sqrt{5}=0,$$

$$-\frac{12\,u3+21\,y3+9\,y3\,\sqrt{5}+7\,z3+3\,z3\,\sqrt{5}+6\,u3\,\sqrt{5}+14\,v3+6\,v3\,\sqrt{5}}{7+3\,\sqrt{5}}=0,$$

$$\frac{7\,y3+3\,y3\,\sqrt{5}+5\,z3+3\,z3\,\sqrt{5}+14\,u3+6\,u3\,\sqrt{5}+7\,v3+3\,v3\,\sqrt{5}}{7+3\,\sqrt{5}}=0,$$

$$\frac{3}{2}\,u3+3\,y3+y3\,\sqrt{5}+\frac{1}{2}\,u3\,\sqrt{5}+2\,v3+v3\,\sqrt{5}+\frac{1}{2}\,z3+\frac{1}{2}\,z3\,\sqrt{5}-2\,u1-y1-v1-x3=0,$$

$$\frac{11}{2}\,u3+\frac{3}{2}\,v3+\frac{5}{2}\,u3\,\sqrt{5}+2\,z3+z3\,\sqrt{5}+2\,u1+\frac{1}{2}\,y3+\frac{1}{2}\,y3\,\sqrt{5}+\frac{1}{2}\,v3\,\sqrt{5}+y1+v1+x3=0,$$

$$u3-\frac{1}{2}\,v3-\frac{1}{2}\,v3\,\sqrt{5}+y3-\frac{1}{2}\,z3-\frac{1}{2}\,z3\,\sqrt{5}=0,$$

$$\frac{17}{2}\,z1+\frac{21}{2}\,u1+11\,x1-\frac{29}{2}\,y1+3\,y3-3\,y2-29\,z3+5\,x1\,\sqrt{5}-2\,v3\,\sqrt{5}-\frac{11}{2}\,y1\,\sqrt{5}-13\,z3\,\sqrt{5}-3\,v1\,\sqrt{5}+$$

$$\frac{11}{2}\,u1\,\sqrt{5}-z2-23\,u3\,\sqrt{5}+y3\,\sqrt{5}+\frac{7}{2}\,z1\,\sqrt{5}-5\,v1+\frac{3}{2}\,u2-51\,u3-2\,v2-4\,v3+\frac{3}{2}\,u2\,\sqrt{5}=0,$$

$$0=0\}$$

La solution de S est:

$$\{x3=-\frac{1}{2}\,(5+3\,\sqrt{5})\,v1,\,x1=0,\,z2=v2,\,y1=\frac{1}{2}\,(1+\sqrt{5})\,v1,\,v1=v1,\,v2=v2,\,x2=x2,y3=0,\,u3=0,\,z1=$$

$$z3=0,v3=0,y2=v1+\frac{1}{2},v2\,\sqrt{5}+\frac{1}{2}\,v2,u2=v1+\frac{1}{2}\,v2\,\sqrt{5}+\frac{1}{2}\,v2,\,u1=\frac{1}{2}\,(1+\sqrt{5})\,v1\}$$

L'espace des solutions est engendré par $v1$, $v2$, $x2$, il est donc de dimension 3.

References

[1] A. Casson, S. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielson and Thurston,* Lond.Math.Soc. Student Texts **9** (1993)

[2] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces,* S.M.F, astérisque **66-67**, (1979).

[3] E. Ghys, V. Sergiescu, *Stablité et Conjuguaison différentiable pour certains feuilletages,* Topology **19**, (1980).

[4] F. Laudenbach, S. Blank, *Sur l'isotopie des formes fermées en dimension 3,* Ivent. Math. **54**, (1979), 103-177.

[5] H. Nakayama, *Transversely affine foliations on some surfaces bundles over* $\mathbf{S}^1$ *of pseudo-Anosov type,* Ann. Inst. Fourier **41** (1991).

[6] J.P. Otal, *Le théorème hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3,* S.M.F, astérisque bf 235, (1996).

[7] R. Roussarie, *Plongements dans les variétés feuilletées et classification de feuilletages sans holonomie,* Publ. Math. IHES **43** (1974), 101-141.

[8] B. Seke, *Sur les structures transversalement affines des feuilletages de codimension 1,* Ann. Inst. Fourier **30** (1980), 1-29.

[9] W. Thurston, *Norm on the homology of 3-manifolds,* Memoirs of the A.M.S **339** (1986), 99-130.

[10] W. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton University Press, **1**, (1997).