J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
14 (1979) 215–219

STRUCTURE PRESQUE-TRANSVERSE

TONG VAN DUC

On étend le procédé de F. Brickell et R. S. Clark [1] à l'étude d'une structure presque-transverse intégrable.

On rappelle les notions utiles suivantes:

Soit M une variété différentiable sur laquelle est donnée une connexion linéaire ∇. Selon K. Yano, un champ de vecteurs V sur M est dit récurrent par rapport à ∇ si $\nabla_X V = X$ quel que soit le champ de vecteurs X sur M.

Une structure localement affine sur M est la donnée d'un atlas maximal dont les chagements de coordonnées sont des difféomorphismes locaux de la forme:

$$x \to Ax + b,$$

où $A \in Gl(n, \mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^n$. Si $b = 0$, on a une structure localement centro-affine.

A chaque structure localement affine sur M est canoniquement associée une connexion linéaire plate dont les coefficients par rapport aux repères adaptés sont nuls.

Soit M une variété différentiable de dimension n munie d'un feuilletage $\mathfrak{L}$ de codimension q. Cela revient à doter M d'un atlas $\mathfrak{A} = \{U, x^u, x^a\}$ dont les fonctions de transition vérifient:

$$\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^u} = 0,$$

où $u, v, u', v', \cdots = 1, 2, \cdots, n - q$ et $a, b, a', b', \cdots = 1, 2, \cdots, q$. Soit L le fibré vectoriel formé par les vecteurs tangents aux feuilles de $\mathfrak{L}$ et soit (Q, p, M) le fibré-quotient de TM par L. Chaque élément $[v]$ de Q a pour représentant un vecteur v de la forme:

$$v = v^u \frac{\partial}{\partial x^u} + v^a \frac{\partial}{\partial x^a},$$

si $p(v)$ se trouve dans le domaine U d'une carte (U, x^u, x^a). Comme (v^a) ne dépend en fait que de $[v]$, on prendra (x^u, x^a, v^a) comme coordonnées locales dans $p^{-1}(U)$. On obtient ainsi sur le variété Q un atlas $\mathfrak{A}$ dont les

Communicated by K. Yano, March 14, 1977.

fonctions de transition sont de la forme

$$x^{u'} = x^{u'}(x^u, x^a), x^{a'} = x^{a'}(x^a), v^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a} v^a.$$

La matrice jacobienne de ces transformations est de la forme:

$$\begin{vmatrix} A & B & O \\ 0 & C & O \\ O & D & C \end{vmatrix}, \tag{1}$$

où $A \in Gl(n-q, \mathbf{R})$, $C \in Gl(q, \mathbf{R})$, $D \in gl(q, \mathbf{R})$, $B \in gl(n-q, q)$.

Definition. Une structure presque-transverse sur M est une G-structure dont les éléments de G sont de la forme (1). Une structure presque-transverse est donc une généralisation d'une structure presque-tangente.

Ainsi l'espace total du fibré transverse (Q, p, M) est muni d'une structure presque-transverse intégrable.

Definition. Un champ de vecteurs $X = X^u \partial/\partial x^u + X^a \partial/\partial x^a$ sur la variété feuilletée M est dite feuilletée si $\partial X^a/\partial x^u = 0$.

Un tel champ est caractérisé par le fait que les transformations du groupe local à un paramètre qu'il engendre envoient les feuilles de $\mathfrak{L}$ sur les feuilles de $\mathfrak{L}$.

Soit maintenant M une variété différentiable minie d'une structure presque-transverse intégrable. Les fonctions de transition dans les cartes adaptées à cette structure sont de la forme:

$$(x, y, z) \to (f(x, y), g(y), (Dg)_y z + h(y)),$$

où g est un difféomorphisme local et Dg sa différentielle.

Il en résulte que M est mini de deux feuilletages $\mathfrak{F}$ et $\overline{\mathfrak{F}}$ dont les feuilles sont localement définies par $x = c^{te}$ et $y = c^{te}$ d'une part et $y = c^{te}$ et $z = c^{te}$ d'autre part.

Une carte adaptée à la structure presque-transverse intégrable est à la fois adaptée aux feuilletages $\mathfrak{F}$ et $\overline{\mathfrak{F}}$. Soit F_m la feuille de $\mathfrak{F}$ qui passe par le point m de M. La carte $z_{|F_m}$ définit une structure localement affine sur F_m.

Une structure de pseudo-groupe dont les fonctions de transition sont de la forme:

$$(x, y, z) \to (f(x, y), g(y), (Dg)_y(z))$$

sera dite quasi-transverse.

Proposition 1. *Une structure presque-transverse intégrable sur M admet une structure subordonnée quasi-transverse si et seulement si M possède un champ de vecteurs global qui est $\overline{\mathfrak{F}}$-feuilleté et qui est tangent aux feuilles de $\mathfrak{F}$ et récurrent par rapprt à la connexion plate de la structure localement affine induite sur chaque feuille.*

Preuve. Supposons M mini d'une structure quasi-transverse et soit (U, x, y, z) une carte adaptée. Si l'on considére le champ local $V = z^a(\partial/\partial z^a)$ sur U et si (U', x', y', z') est une autre carte adaptée, on a sur $U \cap U'$:

$$z^a \frac{\partial}{\partial z^a} = z^{a'} \frac{\partial}{\partial z^{a'}}.$$

Donc V est un champ global sur M qui est en plus $\overline{\mathcal{F}}$-feuilleté. D'autre part, pour tout champ de vecteurs $X = X^b(\partial/\partial z^b)$ tangent à $\mathcal{F}$, on a $\nabla_{X^b\partial/\partial z^b}V = X^b\partial/\partial z^b$ où ∇ est la connexion plate de la structure localement affine induite sur les feuilles de $\mathcal{F}$. Donc V est récurrente par rapport à cette connexion.

Réciproquement, supposons M mini d'un tel champ de vecteurs V. Dans une carte (U, x, y, z) adaptée à la structure presque-transverse intégrable, V a pour expression locale $V = V^a\partial/\partial z^a$. Soit $X = X^b\partial/\partial z^b$ un champ de vecteurs sur une feuille. On a

$$\nabla_X V = X^b \frac{\partial v^a}{\partial z^b} \frac{\partial}{\partial z^a}.$$

Puisque V est récurrente par rapport à ∇ et $\mathcal{F}$-feuilletée, on a

$$v = z + c(y),$$

où c est une application différentiable.

Par suite, le triplet (x, y, v) définite dans un ouvert de M un système de coordonnées locales adaptées à la structure presque-transverse intégrable. Les fonctions de transitions de telles coordonnées sont de la forme:

$$x' = f(x, y), y' = g(y), v' = (Dg)_y v + h(y).$$

Puisque $V = v^a\partial/\partial z = v^{a'}\partial/\partial z^{a'}$, on doit avoir $h = 0$. Ainsi les cartes (x, y, v) déterminent une structure quasi-transverse sur M.

Dans ce qui suit, on suppose M mini d'une structure quasi-transverse et soit V le champ de vecteurs associé à cette structure.

Proposition 2. *L'ensemble des zéros du champ de vecteurs V est mini d'une structure de sous-variété réguliéré de M. De plus, cette sous-variété est feuilletée.*

Preuve. Soit M' l'ensemble des zéros de V, et soit m' un point de M'. Soit (U, x, y, z) une carte contenant m' et adaptée à la structure quasi-transverse et telle que U soit homéomorphe à un ouvert $W_1 \times W_2$ de $\mathbf{R}^{n-q} \times \mathbf{R}^q$ où W_1 et W_2 sont des ouverts cubiques. L'ensemble $M' \cap U$ est composé de points définis par $z = 0$. Soit j: $M' \to M$ l'injection canonique. Alors $(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) \circ j$ est une bijection d'un ensemble de M' sur l'ouvert W_1 de $\mathbf{R}^{n-q}$ et définit ainsi une carte de M'. On véifie facilement que les cartes $(\bar{x}, \bar{y})$ définissent une structure de variété différentiable sur M'. Par construction, c'est une sous-variété régulière de M. Comme $\bar{y} = y \circ j$, on en déduit que la variété M' est feuilletée.

Théorème. *Soit M une variété différentiable munie d'une structure presque-tangente intégrable, et soit ∇ la connexion linéaire plate de la structure localement affine induite sur les feuilles de l'un des feuilletages associés à la structure presque-transverse intégrable. Pour que M soit l'espace total d'un fibré vectoriel isomorphe au fibré transverse d'un feuilletage, il faut et il suffit que ∇ soit complète et que la structure presque-transverse intégrable admette une structure subordonnée quasi-transverse.*

Preuve. On a vu que l'espace total Q de fibré transverse d'un feuilletage $\mathfrak{L}$ est mini d'une structure quasi-transverse. Il est évident que la connexion plate induite sur les feuilles de l'un des feuilletages associés à la structure quasi-transverse est complète. Réciproquement, supposons les hypothèses du théorème satisfaites. Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage défini plus haut. Chaque feuille de $\mathcal{F}$ est ainsi dotée d'une structure localement centroaffine. D'après un théorème de F. Brickell et R. S. Clark [1], cette dernière structure est isomorphe à la structure canonique de $\mathbf{R}^q$, d'où l'existence d'une carte globale adaptée s sur chaque feuille de $\mathcal{F}$. De plus, le champ de vecteurs V associé à la structure quasi-transverse n'a qu'un seul zéro sur chaque feuille de $\mathcal{F}$, ce qui permet de définir une application surjective π de M sur M' qui à chaque point m de M fait correspondre le vecteur nul m' sur la feuille qui passe par m.

Soit m' un point quelconque de m' et $j_{m'}$: $F_{m'} \to M$ l'injection canonique. Soit (U, x, y, z) une carte contenant m' choisie comme dans la démonstration de la proposition 2. Alors la carte $z \circ j_{m'}$ est adaptée à la structure localement centro-affine sur $F_{m'}$; par suite:

$$z \circ j_{m'} = As + b,$$

où $A \in Gl(q, \mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^q$. $As + b$ est une carte globale sur $F_{m'}$ et permet de transporter sur $F_{m'}$ la structure d'espace vectoriel de $\mathbf{R}^q$. Cette structure d'espace vectoriel sur $F_{m'}$ ne dépend pas de $As + b$ puisque cette carte est adaptée à la structure localement centro-affine.

L'extension de la carte $z \circ j_{m'}$ peut être faite en chaque point de l'ouvert $\bar{U} = \bar{x}^{-1}(W_1)$; d'où une application Z de $\pi^{-1}(\bar{U})$ dans $\mathbf{R}^q$. D;autre part (x, y) sont constantes sur les tranches de U et peuvent être prolongées en des applications (X, Y) de $\pi^{-1}(\bar{U})$ dans $\mathbf{R}^{n-2q} \times \mathbf{R}^q$. On obtient ainsi une bijection de $\pi^{-1}(\bar{U})$ sur $\bar{U} \times \mathbf{R}^q$. Par conséquent (M, p, M') est un fibré vectoriel. Soit (Q', π', M') le fibré transverse de la variété feuilletée M'. Soit $m \in M$ et $m' + \pi(m)$. Soit (x, y, z) une carte en m' qui se prolonge en une carte (X, Y, Z) au point m.

L'application h de M dans Q' définie par

$$m \to Z^a(m) \frac{\partial}{\partial \bar{y}^a}(m'),$$

où $(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) \circ j_m$, est la carte de M' au point m' envisagée plus haut, ne dépend pas de la carte (x, y, z) car la carte (X, Y, Z) est adaptée à la structure quasi-transverse [1]. Comme la restriction de h à chaque fibré de (M, π, M') est un isomorphisme, h est lui-même un isomorphisme de (M, π, M') sur (Q', π', M').

References

[1] F. Brickell & R. S. Clark, *Integrable almost tangent structures*, J. Differential Geometry **9** (1974), 557–563.

[2] I. Vaisman, *Variétés riemaniennes feuilletées*, Czechoslovak Math. J. **21** (1971) 46–75.

[3] K. Yano, *The theory of Lie derivations and its applications*, North-Holland, Amsterdam, 1955, 1–68.

UNIVERSITE DE GRENOBLE I