10. *Quelques exemples d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques doubles*

Par Susumu TANABÉ
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Tokyo

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., Feb. 13, 1989)

§ 1. Énoncés des résultats. Le but de cet article est la démonstration de l'hypoellipticité de l'opérateur qui est un opérateur perturbé d'un opérateur non-hypoelliptique. Nous partons du résultat suivant.

Théorème 1 (A. Gilioli, F. Trèves [1] et A. Menikoff [5]). *Soit* $P(t, x, D_t, D_x)$ *un opérateur de la forme*:

(A): $$P=(D_t-it^kD_x)(D_t+it^kD_x)+bt^{k-1}D_x$$

où k *est un entier positif quelconque,* $(t, x)\in R^2$, $D_t=\partial/i\partial t$, $D_x=\partial/i\partial x$. b: *constante.*

P est microlocalement hypoelliptique C^∞ ainsi qu'hypoelliptique analytique au voisinage de $p=\{(t, x, \tau, \xi)\,;\ t=\tau=0,\ \xi=1\}\in T^*R^2$ *si et seulement si*:

$$b\notin\{2(k+1)Z_+\}\cup\{2(k+1)Z_++2\}$$

(resp. $\notin 2(k+1)Z+1$) *pour k impair* (resp. *pair*). $Z_+=\{0, 1, 2, \cdots\}$.

Notre résultat principal est le Théorème suivant.

Théorème 2. (i) *Soit P' un opérateur de la forme*: $P'=ct^{k+r}D_x$, *où r est un entier positif tel que* $0\leqslant r\leqslant k$.

(ii) *Soit P'' un opérateur de la forme*: $P''=ct^{k+r}|D_x|^{3/2}$, *où r est un entier positif tel que* $(k-1)/2<r\leqslant k$.

Pour ces deux cas c est constante.

Soient les opérateurs (B) *et* (C) *comme ci-dessous*:

(B): $$P+P'=(D_t-it^kD_x)(D_t+it^kD_x)+bt^{k-1}D_x+ct^{k+r}D_x$$

(C): $$P+P''=(D_t-it^kD_x)(D_t+it^kD_x)+bt^{k-1}D_x+ct^{k+r}|D_x|^{3/2}$$

où $b=0$ (resp. $b=1$) *dans le cas où k est impair* (resp. *pair*).

Dans ces deux cas (B) *et* (C) *sont hypoelliptiques C^∞ et hypoelliptiques analytiques au voisinage de l'origine si et seulement si c n'est pas nul.*

Remarque 1. V. V. Grushin [3] a trouvé le phénomène du rétablissement d'hypoellipticité (Théorème 2, cas i, le cas où $k=1$ et $r=1$), et K. H. Kwon [4] a assuré ce phénomène dans le cas où $k=1$ et r est un impair quelconque.

Remarque 2. On déduit de la démonstration ci-dessous que si k et r sont impairs (resp. pairs), et $b/2\in\{(k+1)Z_++1\}\cup\{k+1)Z_+\}$ (resp. $\in(k+1)\cdot Z+(1/2)$) alors Théorème 2 est également valable.

§ 2. Préparation à la demonstration du Théorème 2. Soit $u(t, x)$ une solution de $P\,u(t, x)=0$. On a la transformation de Fourier de l'opérateur (B) par rapport à x;

$$P(t, D_t, \xi)=(D_t-it^k\xi)(D_t+it^k\xi)+bt^{k-1}\xi+ct^{k+r}\xi.$$

On est amené à considérer la dilatation de variable; $s=t|\xi|^{1/(k+1)}$.

$$(P^G+P'^G)(s, D_s, \xi)=(D_s-is^k)(D_s+is^k)+bs^{k-1}+cs^{k+r}\xi^{-(r+1)/(k+1)}.$$

(Le suffixe "G" au-dessus de P désigne la capitale de Grushin.)

Soit $u(s)$ la solution de

(D): $$P^G(s, D_s)u(s)=(D_s^2+s^{2k}+(b+k)s^{k-1})u(s)=0.$$

Dans le cas où k est impair, on se souvient que la solution propre pour $b+k=(2J+1)(k+1)+1$ est une fonction impaire (notée $\phi_J^+(y)$) et celle pour $b+k=(2J+1)(k+1)-1$ est une fonction paire (notée $\phi_J^-(y)$). Dans le cas où k est pair, A. Menikoff a la forme exacte de fonction propre pour $b+k=(2j+1)(k+1)$, c'est à dire, de la solution décroissante $\psi_j(s)$ de l'équation:

$$(D_s^2+s^{2k}+(2j+1)(k+1)s^{k-1})\psi_j(s)=0.$$

Pour achever la démonstration du Théorème 2, on utilise quelques énoncés et notions de Grigis et Rothschild [2].

Soit $z=|\xi|^{-1/k+1}$, alors (C) peut être écrit:

(E): $$(P^G+P'^G)(s, D_s, \xi)=(D_s-is^k)(D_s+is^k)+bs^{k-1}+cs^{k+r}z^{r+1}.$$

L'espace engendré par la transformation de Fourier de fonction propre de (E) qui est une perturbation de la fonction propre nulle de (A) s'appelle $E_1(x)$. Considérons ici l'opérateur $L(D_x^{-1/(k+1)})$: $E_1(x)\to E_1(x)$. $L(D_x^{-1/(k+1)})=\text{proj.}\,E_1\cdot z^{k-1}(P^G+P'^G)(s, D_s, \xi)|_{E1}$, où proj. E_1 dénote l'opérateur de projection sur $E_1(x)$. Dans cette situation on a le critère pour l'hypoellipticité que l'on déduit des résultats de Grigis-Rothschild [2] et de Okaji [6].

Proposition 3. *L'opérateur* (B) *est hypoelliptique analytique* (resp. *hypoelliptique* C^∞) *à* $(0, y_0, 0, \xi_0)$ *si et seulement si* $L(D_x^{-1/(k+1)})$ *est hypoelliptique analytique* (resp. *hypoelliptique* C^∞) *à* (y_0, ξ_0).

On remarque ici qu'il existe un opérateur pareil $L'(z)$ pour l'opérateur (C).

§3. La démonstration du Théorème 2. Nous notons ici:

$$\begin{aligned} P^G &= D_s^2+s^{2k}-ks^{k-1} && \text{si } k \text{ est impair,} \\ &= D_s^2+s^{2k}-(k+1)s^{k-1} && \text{si } k \text{ est pair,} \\ P'^G &= cs^{k+1}. \end{aligned}$$

D'après [2] nous pouvons supposer ici que les valeurs propres et fonctions propres ont des développement analytiques

$$\lambda=z\lambda^{(1)}+z^2\lambda^{(2)}+\cdots$$
$$h(s)=h_0(s)+zh^{(1)}(s)+z^2h^{(2)}(s)+\cdots$$

où $z=\xi^{-((r+1)/(k+1))}$ et $h^{(j)}(s)$ appartient à $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$. En suite on obtient la relation suivante:

$$\begin{aligned} &(P^G+zP'^G)(h_0+zh^{(1)}+z^2h^{(2)}+\cdots) \\ &\quad=(z\lambda^{(1)}+z^2\lambda^{(2)}+\cdots)(h_0+zh^{(1)}+z^2h^{(2)}+\cdots). \end{aligned}$$

Si l'on extrait les termes d'ordre un en z et d'ordre deux en z, alors

$$z(P'^Gh_0+P^Gh^{(1)})=z\lambda^{(1)}h_0$$
$$z^2(P^Gh^{(2)}+P'^Gh^{(1)})=z^2(\lambda^{(1)}h^{(1)}+\lambda^{(2)}h_0).$$

Par la suite nous utiliserons la notation simple de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)P(t, D_t)v(t)dt = \langle u|P|v\rangle$$

(I) **Le cas où k est impair.** Dans le cas où $P'^G = ct^{k+2i+1}$, on peut démontrer la positivité de la valeur propre petite et donc l'hypoellipticité de l'opérateur (B). La quantité :

$$\lambda^{(1)}\langle h_0|1|h_0\rangle = c\langle h_0|t^{k+2i+1}|h_0\rangle + \langle h_0|P^G|h_0\rangle,$$
$$= c\langle h_0|t^{k+2i+1}|h_0\rangle$$

n'est pas nulle si et seulement si c n'est pas nul car $\langle h_0|t^{k+2i+1}|h_0\rangle$ est une intégrale d'une fonction paire positive sauf en origine.

Si $P'^G = ct^{k+2i}$, alors

$$\lambda^{(1)} = c\langle h_0|t^{k+2i}|h_0\rangle = 0,$$

parce que c'est une intégrale d'une fonction impaire. Il faut donc estimer la deuxième approximation de la valeur propre $\lambda^{(2)}$.

$$\lambda^{(2)} = \langle h_0|P^G|h^{(2)}\rangle + \langle h_0|P'^G|h^{(1)}\rangle = \langle h_0|P'^G|h^{(1)}\rangle.$$

On a utilisé ici le fait que P^G est un opérateur autoadjoint. Si on pose $h(t) = \sum_{j\geqslant 0} c_j^+\phi_j^+(t) + c_j^-\phi_j^-(t)$ (D'après la théorie de Sturm-Liouville, $\phi_j^+(t)$ et $\phi_j^-(t)$ sont denses dans $\mathcal{S}(\boldsymbol{R}^1)$.), alors

$$\langle h_0|P'^G|h^{(1)}\rangle = c\sum_{j\geqslant 0} c_j^+\langle h_0|t^{k+2i}|\phi_j^+\rangle.$$

Après avoir effectué un peu de calcul, on a la forme explicite de valeur propre suivante :

$$\lambda^{(2)} = c\sum_{j\geqslant 0} \langle \phi_j^+|t^{k+2i}|h_0\rangle^2 / \{(2j(k+1)+2)\langle \phi_j^+|t^{k-1}|\phi_j^+\rangle\}.$$

Ici $\langle \phi_j^+|t^{k-1}|\phi_j^+\rangle > 0$, donc $\lambda^{(2)} > 0$. La démonstration lorsque k est impair est complète.

(II) **Le cas où k est pair.** D'après [5], on peut décomposer la fonction propre ψ_j en la fonction paire $\psi_j^-(t)$ et impaire $\psi_j^+(t)$: $\psi_j(t) = \psi_j^-(t) + \psi_j^+(t)$.

Afin de démontrer que les valeurs propres pour les opérateurs avec perturbations d'ordre inférieurs ne sont pas nulles, il est suffisant de calculer

$$\lambda^{(1)} = \langle \psi_0^+(t) + \psi_0^-(t)|ct^{k+r}|\psi_0^+(t) + \psi_0^-(t)\rangle.$$

Si la perturbation est une fonction impaire, alors on a

$$\lambda^{(1)} = c\langle \psi_0^+(t) + \psi_0^-(t)|t^{k+2i+1}|\psi_0^+(t) + \psi_0^-(t)\rangle$$
$$= 2c\langle \psi_0^-(t)|t^{k+2i+1}|\psi_0^+(t)\rangle.$$

Cette intégrale ne peut pas être nulle, car $t\psi_0^-(t) = \psi_0^+(t)$.

Dans le cas d'une perturbation paire :

$$\lambda^{(1)} = c\langle \psi_0^+(t) + \psi_0^-(t)|t^{k+2i}|\psi_0^+(t) + \psi_0^-(t)\rangle$$
$$= c(\langle \psi_0^+(t)|t^{k+2i}|\psi_0^+(t)\rangle + \langle \psi_0^-(t)|t^{k+2i}|\psi_0^-(t)\rangle)$$

L'intégrale ci-dessus n'est pas nulle si $c \neq 0$, car il est une intégrale d'une fonction paire positive sauf en origine. Ainsi, on obtient l'hypoellipticité de l'opérateur (B), n'importe que k soit pair ou impair.

On peut parallèlement démontrer l'hypoellipticité de l'opérateur (C) à l'aide de cette méthode. On posera alors $z = |\xi|^{(1/2)-(r+1)/(k+1)}$, en développant les fonctions propres et valeurs propres.

L'auteur voudrait remercier le Prof. A. Kaneko de ses nombreux conseils valables donnés lors des séminaires, et tient à remercier Dr. T. Sakuraï de lui avoir suggéré ce problème et innombrables avis importants qu'il a émis. Si cette discussion n'avait eu lieu après chaque séminaire, cet article n'aurait pu jamais vu le jour.

Références

[1] A. Gilioli and F. Trèves: An example in the solvability theory of linear PDE's. Amer. J. Math., **96**, 367–385 (1974).

[2] A. Grigis and L. P. Rothschild: A criterion for analytic hypoellipticity of a class of differential operators with polynomial coefficients. Ann. of Math., **118**, 443–460 (1983).

[3] V. V. Grushin: Sur une classe d'opérateurs pseudodifférentiels hypoelliptiques dégénérées sur une variété. Mat. Sb., **84** (126), 456–473 (1971) (en russe).

[4] K. H. Kwon: Hypoellipticity and local solvability of operators with double characteristics. Comm. Partial Differential Equations, **10**(5), 525–542 (1985).

[5] A. Menikoff: Some examples of hypoelliptic partial differential equations. Math. Ann., **221**, 167–181 (1976).

[6] T. Okaji: Analytic hypoellipticity for operators with symplectic characteristics. J. Math. Kyoto Univ., **25**-3, 489–514 (1985).