61. *Zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete, V.*

Von Yûsaku KOMATU.
Institut für Mathematik, Kaiserliche Universität zu Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1945.)

C. Extremaleigenschaften und Verzerrungssätze.

(Fortsetzung.)[1]

4. *Grunskyscher Verzerrungssatz.*

In seiner schon in den früheren Noten[2] mehrmals zitierten Arbeit[3] hat Grunsky einen schönen genauen Verzerrungssatz über die in einem vorgegebeben endlich vielfach zusammenhängenden, den Punkt $\zeta=\infty$ enthaltenden Grundgebiete $\mathfrak{B}$ schlichten Funktionen $f(\zeta)$ mit Normierungsbedingungen $f(\infty)=\infty$, $f'(\infty)=1$ angebeben, welcher lautet:

Für jede solche Funktion $f(\zeta)$ gilt die Verzerrungsungleichung

$$|\lg f'(z)-m(z)|\leqq r(z) \qquad (\lg f'(\infty)=0),$$

worin nach der Grunskyschen Bezeichnung

$$m(z)=\lg \mathfrak{p}'(z;z,\infty) \qquad \textit{und} \qquad r(z)=\lg\frac{1}{\mathfrak{q}(z;z,\infty)}$$

gesetzt sind. Jedem Punkte z $(z\neq\infty)$ von $\mathfrak{B}$ und jedem Extremalwerte $m(z)-r(z)e^{i\theta}$ von $\lg f'(z)$ entspricht eine bis auf additive Konstante einzige Extremalfunktion

$$f(\zeta)=\mathfrak{j}_\alpha(\zeta;z,\infty)+f(z),$$

die das Grundgebiet auf die längs gewisser Bogen von logarithmischen Spiralen mit Neigung $\alpha=\tan\dfrac{\theta}{2}$ und dem asymptotischen Punkt $f(z)$ aufgeschlitzte Ebene ab.

Ferner, falls das Grundgebiet $\mathfrak{B}$ einfach zusammenhängend ist, hat Grunsky gezeigt, daß, *wenn insbesondere das Einheitskreisäußere als Grundgebiet gewählt wird, beide hier auftretenden Funktionen $m(z)$ und $r(z)$ explizite durch*

$$m(z)=0, \qquad r(z)=\lg\frac{|z|^2}{|z|^2-1}$$

---

1) Fortsetzung von IV. Proc. **21** (1945), 372.

2) Alle früheren Noten finden sich unter demselben Titel in Proc. **21** (1945), I. 285, II. 296, III. 337, IV, 372.

3) H. Grunsky, Neue Abschätzuugen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche. Schriften d. math. Sem. u. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin **1** (1932–3), 95-140.

geliefert und die betreffende Extremalabbildung durch

$$\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, \infty) = (\zeta - z)\left(1 - \frac{1}{\bar{z}\zeta}\right)^t$$

mit

$$t = e^{i\theta} = \frac{(1+i\alpha)^2}{1+\alpha^2}$$

bestimmt werden.

Der allgemeine Verzerrungssatz gilt, wie von den Beweisführungen eingesehen wird, auch im Falle des beliebigen Normierungspunktes z_∞ anstatt ∞ in entsprechender Form, wenn man die in einem beliebigen, nicht notwendig den unendlich fernen Punkt enthaltenden Grundgebiet schlichte Funktionenfamilie

$$\{f(\zeta)\} \quad \text{mit} \quad f(z_\infty) = \infty \quad \text{und} \quad \text{Res}\,[z_\infty; f] = 1$$

betrachtet, dementsprechend

$$m(z) = \lg \mathfrak{p}'(z; z, z_\infty) \quad \text{und} \quad r(z) = \lg \frac{1}{\mathfrak{q}(z; z, z_\infty)}$$

setzt, und zugleich $\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, \infty)$ durch $\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, z_\infty)$ ersetzt.

Wir haben aber früher in II. A § 10 beim zweifach zusammenhängenden Normalgrundgebiet R: $q < |\zeta| < 1$ analytische Ausdrücke für $\mathfrak{p}(\zeta; z, z_\infty)$ und $\mathfrak{q}(\zeta; z, z_\infty)$ sowie für $\mathfrak{j}_\alpha(\zeta; z, z_\infty)$ hergeleitet, womit sich die Verzerrungsformel auch dabei in expliziter Gestalt hinschreiben läßt. Wir können nämlich die folgenden Sätze aussprechen:

Satz 8. *Die Funktion $\Omega(z)$ sei in R: $q < |z| < 1$ schlicht und habe an einem inneren Normierungspunkte z_∞ einen Pol mit Residuum 1. Dann genügt sie der Verzerrungsformel*

$$\left|\lg \Omega'(z) + \lg\left(z_\infty z\, \sigma\left(i \lg \frac{z_\infty}{z}\right)^2\right) + \frac{\eta_1}{\pi}\left(\lg \frac{z_\infty}{z}\right)^2\right|$$

$$\leqq \lg \frac{|\sigma(i \lg \bar{z}_\infty z)|^2}{-\sigma(i \lg |z_\infty|^2)\sigma(i \lg |z|^2)} - \frac{\eta_1}{\pi}\left|\lg \frac{z_\infty}{z}\right|^2;$$

hierbei sind die Zweige von Logarithmen so zu wählen, daß beide Seiten dieser Ungleichung an $z = z_\infty$ verschwinden.

Ferner gilt das Gleichheitszeichen an einem Punkte $z_0 (\neq z_0)$, zwar in der Weise

$$\lg \Omega'(z_0) = -\left\{\lg\left(z_\infty z_0 \sigma\left(i \lg \frac{z_\infty}{z_0}\right)^2\right) + \frac{\eta_1}{\pi}\left(\lg \frac{z_\infty}{z_0}\right)^2\right\}$$

$$-\left\{\lg \frac{|\sigma(i \lg \bar{z}_\infty z_0)|^2}{-\sigma(i \lg |z_\infty|^2)\sigma(i \lg |z_0|^2)} - \frac{\eta_1}{\pi}\left|\lg \frac{z_\infty}{z_0}\right|^2\right\} e^{i\theta},$$

dann und nur dann, wenn die Funktion $\Omega(z)$ die Gestalt

$$\Omega(z)=\frac{i}{z_\infty}\left(\frac{z}{z_\infty}\right)^{-\frac{\eta_1}{\pi}\left(\lg\frac{z_\infty}{z_0}-t\lg\overline{\frac{z_\infty}{z_0}}\right)}\frac{\sigma\left(i\lg\frac{z}{z_0}\right)}{\sigma\left(i\lg\frac{z_\infty}{z_0}\right)\sigma\left(i\lg\frac{z}{z_\infty}\right)}$$

$$\times\left(\frac{\sigma(i\lg|z_\infty|^2)\sigma(i\lg\bar{z}_0z)}{\sigma(i\lg\bar{z}_0z_\infty)\sigma(i\lg\bar{z}_\infty z)}\right)^t+\Omega(z_0)$$

mit $t=e^{i\theta}$ besitzt.

Beweis. Aus den in A § 10 angegebenen Ausdrücken

$$\mathfrak{p}(z;z,z_\infty)=\frac{i}{i_\infty}\left(\frac{z}{z_\infty}\right)^{\frac{\eta_1}{\pi}\lg\frac{z_\infty}{z_0}}\frac{\sigma\left(i\lg\frac{z}{z_0}\right)}{\sigma\left(i\lg\frac{z_\infty}{z_0}\right)\sigma\left(i\lg\frac{z}{z_\infty}\right)},$$

$$\mathfrak{q}(z;z_0,z_\infty)=\left(\frac{z}{z_\infty}\right)^{-\frac{\eta_1}{\pi}\lg\overline{\frac{z_\infty}{z_0}}}\frac{\sigma(i\lg|z_\infty|^2)\sigma(i\lg\bar{z}_0z)}{\sigma(i\lg\bar{z}_0z_\infty)\sigma(i\lg\bar{z}_\infty z)},$$

und

$$\mathfrak{i}_a(z;z_0,z_\infty)=\mathfrak{p}(z;z_0,z_\infty)\mathfrak{q}(z;z_0,z_\infty)^t,$$

unter Berücksichtigung von hierbei allgemein geltenden Formeln

$$\sigma(\bar{u})=\overline{\sigma(u)},\quad \sigma(-u)=-\sigma(u),\quad \lim_{u\to 0}\frac{\sigma(u)}{u}=1,$$

folgt die Behauptung ohne weiteres nach dem Grunskyschen Resultat.

Satz 9. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 8 *gelten die direkten Verzerrungsungleichungen für $\Omega'(z)$ selbst:*

$$|\omega_r'(z;z_\infty,z)|\leqq|\Omega'(z)|\leqq|\omega_k'(z;z_\infty,z)|,$$

worin das linke und rechte Gleichheitszeichen in einem Punkte $z_0(\neq z_\infty)$ nur dann auftritt, wenn

$$\Omega(z)=\omega_r(z;z_\infty,z_0)+\Omega(z_0)\quad bzw.\quad \Omega(z)=\omega_k(z;z_\infty,z_0)+\Omega(z_0)$$

ist.

Beweis. Ziehen wir in der linken Seite der Verzerrungsformel des vorigen Satzes lauter den reellen Anteil in Betracht, so folgt die Behauptung fast unmittelbar. Es gilt nämlich zuerst

$$|\mathfrak{p}'(z;z,z_\infty)|\,\mathfrak{q}(z;z,z_\infty)\leqq|\Omega'(z)|\leqq\frac{|\mathfrak{p}'(z;z,z_\infty)|}{\mathfrak{q}(z;z,z_\infty)}.$$

Da aber $\mathfrak{p}(z;z,z_\infty)=0$ ist, so gelten tatsächlich die Beziehungen

$$\mathfrak{p}'(z;z,z_\infty)\mathfrak{q}(z;z,z_\infty)=\mathfrak{i}_0'(z;z,z_\infty)\equiv\omega_r'(z;z_\infty,z)$$

und

$$\frac{\mathfrak{p}'(z;z,z_\infty)}{\mathfrak{q}(z;z,z_\infty)}=\mathfrak{i}_\infty'(z;z,z_\infty)\equiv\omega_k'(z;z_\infty,z)$$

(vgl. A § 10.) Die expliziten Ausdrücke für $\omega'_r(z;z_\infty,z)$ und $\omega'_k(z;z_\infty,z)$ finden sich in A §§ 6 bzw. 3.

Der entsprechende Drehungssatz

$$\arg \mathfrak{p}'(z;z,z_\infty)+\lg \mathfrak{q}(z;z,z_\infty)\leqq \arg \Omega'(z)$$
$$\leqq \arg \mathfrak{p}'(z;z,z_\infty)-\lg \mathfrak{q}(z;z,z_\infty)$$

kann auch expliziterweise hingeschrieben werden, aber dabei, wie leicht bestätigt wird, wird kein Gleichheitszeichen verwirklicht.

Nebenbei sollen wir nun für beide Funktionen $m(z)$ und $r(z)$ mehr konkrete Reihengestalt angeben. Mittels der allgemeinen Formel

$$\sigma(u)=2e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\pi}}\sin\frac{u}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2k}e^{iu})(1-q^{2k}e^{-iu})}{(1-q^{2k})^2}$$

erhalten wir nämlich nach einigen elementaren Rechnungen die beiden Darstellungen

$$m(z)=\lg\frac{-1}{(z-z_\infty)^2}-2\sum_{k=1}^{\infty}\lg\frac{\left(1-q^{2k}\dfrac{z}{z_\infty}\right)\left(1-q^{2k}\dfrac{z_\infty}{z}\right)}{(1-q^{2k})^2}$$

und

$$r(z)=\lg\frac{|1-\bar{z}_\infty z|^2}{(1-|z_\infty|^2)(1-|z|^2)}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\lg\frac{|(\bar{z}_\infty z-q^{2k})(1-q^{2k}\bar{z}_\infty z)|^2}{(|z_\infty|^2-q^{2k})(|z|^2-q^{2k})(1-q^{2k}|z_\infty|^2)(1-q^{2k}|z|^2)}$$

5. *Ein Grenzübergang.*

Aus den soeben angegebenen Reihengestalt von $m(z)$ und $r(z)$ ist ersichtlich, daß bei $q\to 0$ die Grenzgleichungen

$$m(z)\to\lg\frac{-1}{(z-z_\infty)^2}\quad\text{und}\quad r(z)\to\lg\frac{|1-\bar{z}_\infty z|^2}{(1-|z_\infty|^2)(1-|z|^2)}$$

bestehen. Entsprechend geht die Funktion $\Omega(z)$ dabei in eine Funktion $\Omega_0(z)$ über, die in dem am Punkte $z=0$ punktierten Einheitskreise schlicht ist und den Punkt $z=0$ als hebbare Singularität besitzt. Jede im Einheitskreise schlichte Funktion $\Omega_0(z)$ mit $\Omega_0(z_\infty)=\infty$ und Res $[z_\infty;\Omega_0]=1(|z_\infty|<1)$ kann auf solche Weise erzeugt werden, und infogedessen genügt sie der Verzerrungsformel

$$\left|\lg\Omega_0'(z)-\lg\frac{-1}{(z-z_\infty)^2}\right|\leqq\lg\frac{|1-\bar{z}_\infty z|^2}{(1-|z_\infty|^2)(1-|z|^2)};$$

Extremalfunktionen werden hierbei durch

$$\Omega_0(z)=\frac{z_0-z}{(z_0-z_\infty)(z-z_\infty)}\left(\frac{(1-|z_\infty|^2)(1-\bar{z}_0 z)}{(1-\bar{z}_0 z_\infty)(1-\bar{z}_\infty z)}\right)^t+\Omega_0(z_0)$$

mit $t=e^{i\theta}$ geliefert, wofür sogar die Gleichheit in der Weise

$$\lg \Omega_0'(z_0) = \lg \frac{-1}{(z_0 - z_\infty)^2} - \lg \frac{|1 - \bar{z}_\infty z_0|^2}{(1 - |z_\infty|^2)(1 - |z_0|^2)} \cdot e^{i\theta}$$

erfüllt wird.

Um nun ins neue Grundgebiet $|\zeta| > 1$ mit Normierungsstelle $\zeta = \infty$ überzugehen, führen wir die Transformation

$$\zeta = \frac{1 - \bar{z}_\infty z}{z - z_\infty} \quad \text{oder} \quad z = \frac{1 + z_\infty \zeta}{\zeta + \bar{z}_\infty}$$

aus. Setzen wir demgemäß

$$f(\zeta) = (1 - |z_\infty|^2)\Omega_0(z),$$

dann erstreckt sich diese Funktion $f(\zeta)$ auf die gleichfalls in $|\zeta| > 1$ schlichten Funktionen und genügt stets den Normierungsbedingungen

$$f(\infty) = \infty \quad \text{und} \quad f'(\infty) = 1$$

sowie der Beziehung zwischen Ableitungen

$$f'(\zeta) = -(z - z_\infty)^2 \Omega_0'(z).$$

Durch diese Transformation geht die soeben erwähnte Verzerrungsformel bezüglich $\Omega_0(z)$ gerade über in die Formel

$$|\lg f'(\zeta)| \leqq \lg \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - 1}$$

nebst der entsprechenden Extremalfunktion an ζ_0 ($|\zeta_0| > 1$)

$$f(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)\left(1 - \frac{1}{\zeta_0 \zeta}\right)^t + f(\zeta_0),$$

welche nichts anderes als das oben angegebene spezielle Resultat von Grunsky ist.

6. *Extremalität der Kreisbogen- und Radialschlitzabbildung nach Rengel.*

Wir haben in C §§ 1 und 2 einige charakteristischen Extremaleigenschaften der Abbildungsfunktionen $\omega_k(z; z_\infty, z_0)$ und $\omega_r(z; z_\infty, z_0)$ hergeleitet. Aber wir können diese beiden Funktionen gleichfalls durch eine andere Art Extremalität charakterisieren, die von Rengel[4] stammt. Das Rengelsche Resultat bezieht sich auf ein beliebig (endlich) vielfach zusammenhängendes Gebiet, aber wenn wir uns auf den zweifach zusammenhängenden Fall beschränken, dann läßt sich ein konzentrischer Kreisring R ohne Beschränkung der Allgemeinheit als das Grundgebiet annehmen; in der Tat braucht man sonst nur den Ring R als ein Hilfsgebiet einzuschalten. Wir können das *Rengelsche Resultat* etwa folgendermaßen formulieren:

4) E. Rengel, Existenzbeweise für schlichte Abbildungen mehrfach zusammenhängender Bereiche auf gewisse Normalbereiche. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig. **44** (1934), 51–55.

Die Funktionenfamilie $\{\Omega(z)\}$ *bestehe aus solchen Funktionen, jede von denen beide folgenden Bedingungen genügt:*

(i) $\Omega(z)$ *sei in* R *schlicht;*

(ii) $\Omega(z)$ *besitze an* z_0 *eine Nullstelle und an* z_∞ *einen Pol mit Residuum Eins.*

Dann gelten die Extremalitäten

$$|\omega_k'(z_0; z_\infty, z_0)| = \mathrm{Max}\, |\Omega'(z_0)| \quad \textit{und} \quad |\omega_r'(z_0; z_\infty, z_0)| = \mathrm{Min}\, |\Omega'(z_0)|\,;$$

beide Funktionen $\omega_k(z; z_\infty, z_0)$ *und* $\omega_r(z; z_\infty, z_0)$ *lassen sich auch durch diese Extremalprobleme charakterisieren. Hierbei sind zum Vergleiche alle Funktionen aus der soeben definierten Familie zugelassen.*

Diese Tatsache ist eine unmittelbare Folgerung aus dem oben erwähnten Satze 9. Man braucht nämlich einfach in ihm $\Omega(z_0)=0$ zu setzen. Aber umgekehrt, wenn man sie als schon bewiesen voraussetzt, dann erhält man gleichfalls unmittelbar den Satz 9, indem man sie auf die Funktion $\Omega(z)-\Omega(z_0)$ anwendet. *Somit sind diese beiden Aussagen miteinander ganz äquivalent.*