38. *Sur une généralisation d'un théorème de Kneser*

Par Masuo HUKUHARA

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., April 13, 1953)

Considérons une inéquation différentielle

$$\left| \frac{dy}{dx} - f(x, y) \right| \leqq F(x, y), \tag{1}$$

où y et f représentent des vecteurs dans l'espace à n dimensions, tandis que x et F représentent des valeurs réelles; quant aux fonctions f et F, nous les supposons définies et bornées dans Ω:

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad |y| < \infty,$$

la première étant continue et la seconde semi-continue supérieurement. Une solution de (1) est par définition une fonction continue $\varphi(x)$ telle que

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - f(x, \varphi(x)) \right| \leqq F(x, \varphi(x)).$$

Le but de ce présent mémoire est à établir le théorème suivant.

Si A est un continu dans Ω, la famille $\mathfrak{F}$ de toutes les courbes-solutions de (1) *passant par un des points de A est un continu dans l'espace de fonctions continues ou l'espace* (C).

On voit sans peine que si une suite de solutions est convergente, la fonction limite est aussi une solution. On en déduit immédiatement que $\mathfrak{F}$ est un ensemble fermé dans l'espace (C). Si $\mathfrak{F}$ n'était pas un continu, $\mathfrak{F}$ serait une somme de deux ensembles fermés et disjoints $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$. La famille de fonctions $\mathfrak{F}_i$ étant également continue, la région R_i remplie par les courbes de $\mathfrak{F}_i$ serait un ensemble fermé dans Ω. R_1A et R_2A seraient des ensembles fermés dont la somme est A. Ils auraient donc au moins un point commun $P(a, b)$. Soit $y = \varphi_i(x)$ une courbe-solution appartenant à $\mathfrak{F}_i$ et passant par P $(i=1, 2)$.

Considérons d'autre part l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f_\varepsilon(x, y), \tag{2}$$

dont le second membre est une fonction continue dans Ω et satisfaisant localement à la condition de Lipschitz et à l'inégalité

$$|f(x, y) - f_\varepsilon(x, y)| < \varepsilon,$$

ε désignant un nombre positif donné à l'avance. Soient α et α' des nombres quelconques tels que $0 \leqq \alpha \leqq a \leqq \alpha' \leqq 1$. Nous désignons par $\varphi_i(x, \alpha, \alpha')$ la fonction qui coïncide pour $\alpha \leqq x \leqq \alpha'$ avec $\varphi_i(x)$, pour $0 \leqq x \leqq \alpha$ avec la solution de (2) telle que $y(\alpha) = \varphi_i(\alpha)$ et pour $\alpha' \leqq x \leqq 1$ avec celle de (2) telle que $y(\alpha') = \varphi_i(\alpha')$. $\varphi_i(x, \alpha, \alpha')$ considérée comme fonction de x varie d'une manière continue avec α, α' et l'on a

$$\varphi_i(x, 0, 1) = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2), \qquad \varphi_1(x, a, a) = \varphi_2(x, a, a).$$

Par suite, la famille $\mathfrak{G}$ formée des fonctions $\varphi_1(x, \alpha, \alpha')$ et $\varphi_2(x, \alpha, \alpha')$

est un continu dans l'espace (C). Soient $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{G}_2$ deux ensembles ouverts dans l'espace (C) et tels que

$$\mathfrak{G}_i \supset \mathfrak{F}_i \quad (i = 1, 2), \qquad \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = 0 .$$

Il existerait dans $\mathfrak{G}$ un point g_ε qui n'appartient pas à $\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$.

Donnons maintenant à ε une suite de valeurs convergeant vers 0. La suite correspondante des fonctions $g_\varepsilon(x)$ est également continue et bornée pour $x=a$, car leurs nombres dérivés sont bornés et de plus $g_\varepsilon(a)=b$. On pourrait donc en extraire une suite partielle convergente. La fonction limite $g(x)$ n'appartiendrait pas à $\mathfrak{F}$, ce qui est absurde puisqu'elle est une solution de (1) satisfaisant à la condition $y(a)=b$.

La famille $\mathfrak{F}$ formant un continu dans l'espace (C), la section $S_\xi(A)$ par un hyperplan $x=\xi$ de la région $R(A)$ remplie par les courbes de $\mathfrak{F}$ est un continu dans Ω. C'est le théorème bien connu de Kneser.

Ajoutons encore une remarque. J'ai montré que le théorème de Kneser entraîne la propriété suivante[1].

Soit C_0 une courbe-solution passant par un point P_0. S'il y a une infinité de courbes-solutions passant par P_0, il en existe, quelque petit que soit le nombre positif ε, une courbe-solution C telle que $0<\rho(C, C_0)<\varepsilon$, $\rho(C, C_0)$ désignant la distance de C_0 à C dans l'espace (C).

Mais il est clair que cette propriété est une conséquence immédiate de notre présent théorème.

1) Ce journal, **25**, 151–153 (1949).