36. *Sur le Théorème de Fubini et les Suites Fondamentales*

Par Shizu NAKANISHI

Université d'Osaka

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., April 13, 1959)

Dans cette Note, nous montrerons surtout deux propositions suivantes:

Proposition 1. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, *une suite fondamentale définie dans l'intervalle* $I_0=[a, b; c, d]$ *d'espace euclidien de deux dimensions*[1] *et qui satisfait à la condition suivante:*

On peut poser, pour tout n $(n=0, 1, 2,\cdots)$,

$$f_{n+1}(x, y)=f_n(x, y)+p_n(x, y)+r_n(x, y),$$

où $p_n(x, y)$, $r_n(x, y)$ *sont des fonctions en escalier satisfaisant, outre qu'elles satisfont aux conditions* [1], [2] *et* [3], *à la condition suivante* $(*)$.[2]

$(*)$ *Pour tout système de nombre fini d'intervalles* I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ *sans points commun deux à deux tels que* $I_i=[a\leq x\leq b]\times J_i$, *où* J_i *sont des intervalles contenus dans l'intervalle* $[c\leq y\leq d]$, *si les extrémités de* J_i *appartiennent à* $proj._y\, F_n$ *pour tout* i, *on a*

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\iint_{I_i} r_n(x, y)\, dxdy\right|<2^{-\nu_n}\quad (n=0, 1, 2,\cdots).$$

Désignons par $f(x, y)$ *la fonction-limite de la suite* u. *Alors, on obtient deux résultats suivants:*

1) *Pour presque tout* y *de l'intervalle* $[c\leq y\leq d]$, *il existe une suite fondamentale* $u^y=[u_n^y]$ *définie dans l'intervalle* $[a\leq x\leq b]$ *et telle qu'une fonction-limite soit* $f(x, y)$, $a\leq x\leq b$, *et qu'une intégrale de la fonction déterminée par* u^y *coïncide avec la limite de la suite des intégrales lebesguiennes* $\int f_n(x, y)\, dx$.

2) *Supposons qu'il existe un indice* n_0 *tel que les points* $y=c$ *et* d *appartiennent à* $proj._y\, F_n$ *pour tout* $n\geq n_0$. *Alors, pour la fonction* $g(y)=\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n(x, y)dx$, $c\leq y\leq d$, *il existe une suite fondamentale* $v=\{v_n\}$ *définie dans l'intervalle* $[c\leq y\leq d]$ *tell qu'une fonction-limite soit* $g(y)$ *et qu'une intégrale de la fonction* $g(y)$ *déterminée par* v *coïncide avec la limite de la suite des intégrales lebesguiennes* $\iint f_n(x, y)\, dxdy$.

---

1) Pour une définition, voir T. Ikegami: A note on the integration by the method of ranked spaces, Proc. Japan Acad., **34**, 16–21 (1958).

2) Voir la condition $[3_2]$ définie dans la Note, S. Nakanishi: Sur la dérivation de l'intégrale (*E. R.*) indéfinie. I, Proc. Japan Acad., **34**, 199–204 (1958).

Échangeons x par y et y par x dans la Proposition 1 (*mutatis mutandis*), *alors, on a le même résultat que ci-dussus.*

Proposition 2.[3] *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, *une suite fondamentale définie dans l'intervalle* $I_0=[a, b; c, d]$ *telle que* $\{F_n\}$ *soit une suite non-décroissante d'ensembles fermés, de total* I_0, *et qui satisfait à la condition suivante* (†)[4] *au lieu de la condition* (*).

(†) 1°) *Pour tout système de nombre fini d'intervalles* I_i $(i=1, 2,\cdots, i_0)$ *sans points commun deux à deux tels que* $I_i \cap F_n \neq 0$ *pour tout* i, *on a*

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\iint_{I_i} r_n(x, y)\, dxdy\right|<2^{-\nu_n} \qquad (n=0, 1, 2,\cdots).$$

2°) *On a* $\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\iint_{CF_{n+1}} |r_m(x, y)|\, dxdy<2^{-\nu_{n+1}} \qquad (n=0, 1, 2,\cdots).$

Alors, on obtient trois résultats suivants:

1) *Pour presque tout y de l'intervalle* $[c\leq y\leq d]$, *la fonction* $f(x, y)$, $a\leq x\leq b$, *est intégrable au sens de Denjoy.*[5]

2) *Pour presque tout x de l'intervalle* $[a\leq x\leq b]$, *la fonction* $f(x, y)$, $c\leq y\leq d$, *est intégrable au sens de Denjoy.*

3) *On a*

$$\lim_{n\to\infty}\iint f_n(x, y)\, dxdy=(D)\int_c^d\left((D)\int_a^b f(x, y)\, dx\right)dy$$
$$=(D)\int_a^b\left((D)\int_c^d f(x, y)\, dy\right)dx.$$

Démonstration de la Proposition 1. Pour simplicité, posons $I_0=[0, 1; 0, 1]$. Comme nous avons déjà vu, puisque la fonction-limite $f(x, y)$ s'exprime par

$$f(x, y)=f_0(x, y)+p(x, y)+r(x, y),$$

où $p(x, y)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x, y)$ et $r(x, y)=\sum_{n=0}^{\infty} r_n(x, y)$, et que la fonction $f_0(x, y)+p(x, y)$ est intégrable au sens de Lebesgue, il suffit de démontrer le cas où $f(x, y)=r(x, y)$. De plus, nous avons déjà vu qu'il permet de supposer que la suite d'ensembles fermés F_n soit non-décroissante, qu'on ait $\nu_{2n+1}+1\leq\nu_{2n+2}$ pour tout n, et qu'on ait $r_n(x, y)=0$ pour tout n. Posons

$$Y_{2n+1}^{+}=\left[y;\int_0^1 r_{2n+1}(x, y)\, dx\geq 2^{-(\nu_{2n+1}-n)} \text{ et } y\in proj._y F_{2n+1}\right]$$

$$Y_{2n+1}^{-}=\left[y;-\int_0^1 r_{2n+1}(x, y)\, dx\geq 2^{-(\nu_{2n+1}-n)} \text{ et } y\in proj._y F_{2n+1}\right]$$

3) Comme le cas particulier, on a James Pierpont: The Theory of Functions of Real Variables, **1**, 627 (1905).

4) Voir la propriété P' définie dans la Note, S. Nakanishi: L'intégrale de Denjoy et l'intégration au moyen des espaces rangés. I, Proc. Japan Acad., **32**, 678–683 (1956).

5) Au sens de Denjoy-Perron.

et $Y_{2n+1}=Y^+_{2n+1}\bigcup Y^-_{2n+1}$. D'abord, pour Y^+_{2n+1} il existe, d'après le Théorème de Vitali, une suite d'intervalles J^{2n+1}_k $(k=1,2,\cdots)$ tels que des extrémités appartiennent à Y^+_{2n+1} et qu'on ait à la fois $\text{mes}\Big(Y^+_{2n+1}-\bigcup_{k=1}^{\infty}J^{2n+1}_k\Big)=0$ et $\text{mes}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}J^{2n+1}_k-Y^+_{2n+1}\Big)<2^{-\nu_{2n+1}}\Big/\max_{(x,y)}|r_{2n+1}(x,y)|$. D'après (*), on a d'abord $\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\int_{J^{2n+1}_k}\Big(\int_0^1 r_{2n+1}(x,y)\,dx\Big)dy\Big|<2^{-\nu_{2n+1}}$. D'autre part, on a

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\int_{J^{2n+1}_k}\Big(\int_0^1 r_{2n+1}(x,y)\,dx\Big)dy\Big|\geq\sum_{k=1}^{\infty}\int_{J^{2n+1}_k\cap Y^+_{2n+1}}\Big(\int_0^1 r_{2n+1}(x,y)\,dx\Big)dy$$
$$-\Big|\int_{\bigcup_{k=1}^{\infty}J^{2n+1}_k-Y^+_{2n+1}}\Big(\int_0^1 r_{2n+1}(x,y)\,dx\Big)dy\Big|>2^{-(\nu_{2n+1}-n)}\text{ mes }(Y^+_{2n+1})-2^{-\nu_{2n+1}}.$$

Donc, on a $\text{mes}\,(Y^+_{2n+1})<2^{-(n-1)}$. De même, on a $\text{mes}\,(Y^-_{2n+1})<2^{-(n-1)}$. Par suite, la mesure de l'ensemble $Y=\bigcap_{m=0}^{\infty}\Big(\bigcup_{n=m}^{\infty}Y_{2n+1}\Big)$ est nulle. Donc, il s'ensuit que *pour tout* $y\in[0\leq y\leq 1]-(Y\bigcup Z_1)$, *il existe un indice* $m=m(y)$ *tel qu'on ait pour tout* $n\geq m$

$$\Big|\int_0^1 r_{2n+1}(x,y)\,dx\Big|<2^{-(\nu_{2n+1}-n)}$$

où $Z_1=[0\leq y\leq 1]-\bigcup_{n=0}^{\infty}proj._y F_n$, puisqu'il existe, pour tout $y\in\bigcup_{n=0}^{\infty}proj._y F_n$, un indice $n'=n'(y)$ tel qu'on ait $y\in proj._y F_n$ pour tout $n\geq n'$.

D'ailleurs, on voit qu'on a $\text{mes}\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty}(F_n\cap(\{y\}\times[0\leq x\leq 1]))\Big)=1$ pour tout y n'appartenant pas à un ensemble Z_2 de mesure nulle. Conséquemment, il s'ensuit que 1) est démontrée.[6]

Posons $F^*_m=proj._y F_{2m+1}\cap([0\leq y\leq 1]-(Y^*_m\cup Z_1\cup Z_2))$, où Y^*_m

6) On voit aisément que si

1°) $\{\nu_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ est une suite des entiers positifs ou nuls telle que $\nu_0<\nu_1<\nu_2<\cdots$,

2°) $\{F_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ est une suite non-décroissante d'ensembles mesurables contenus dans $[a\leq x\leq b]$ telle que $\lim_{n\to\infty}\text{mes}\,([a\leq x\leq b]-F_n)=0$,

3°) $f_0(x)$ est une fonction sommable définie dans $[a\leq x\leq b]$,

4°) pour tout $n=0,1,2,\cdots$, $p_n(x)$ est une fonction sommable définie dans $[a\leq x\leq b]$ et telle que $\int_a^b|p_n(x)|\,dx<2^{-\nu_n}$,

5°) pour tout $n=0,1,2,\cdots$, $r_n(x)$ est une fonction sommable définie dans $[a\leq x\leq b]$ et telle que $\Big|\int_a^b r_n(x)\,dx\Big|<2^{-\nu_n}$, il existe une suite fondamentale telle qu'une fonction-limite coïncide avec la fonction $f_0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)+\sum_{n=0}^{\infty}r_n(x)$ et qu'une intégrale de la fonction déterminée par la suite coïncide avec le nombre $\int_a^b f_0(x)\,dx+\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b p_n(x)\,dx+\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b r_n(x)\,dx$.

$=\bigcup\limits_{n=m}^{\infty} Y_{2n+1}$. Posons de plus

$$f_0^*(y)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^1 r_{2n+1}(x,y)\,dx & \text{si } y\in F_0^* \\ 0 & \text{si } y\overline{\in} F_0^*\end{cases}$$

et pour tout m $(m=0,1,2,\cdots)$

$$r_m^*(y)=\begin{cases}\sum\limits_{n=m}^{\infty}\int_0^1 r_{2n+1}(x,y)\,dx & \text{si } y\in F_{m+1}^*-F_m^* \\ \int_0^1 r_{2m+1}(x,y)\,dx & \text{si } y\overline{\in} F_{m+1}^* \\ 0 & \text{si } y\in F_m^*.\end{cases}$$

Alors, on a $\left|\int_0^1 r_m^*(y)\,dy\right|<2^{-(\nu_{2m+1}-m-1)}$ pour tout $m\geq n_0$. En effet, on a

$$\left|\int_0^1 r_m^*(y)\,dy\right|\leq\left|\int_{CF_m^*}\left(\int_0^1 r_{2m+1}(x,y)\,dx\right)dy\right|$$
$$+\int_{F_{m+1}^*-F_m^*}\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 |r_{2n+1}(x,y)|\,dx\right)dy.$$

À première terme, il existe un ensemble fermé F contenu dans F_m^* et tel que $\operatorname{mes}(F_m^*-F)<2^{-\nu_{2m+1}}/\max\limits_{(x,y)}|r_{2m+1}(x,y)|$. D'après ce qu'on ait $F_m^*\subseteq proj._y F_{2m+1}$ et d'après l'hypothèse de 2), les extrémités de J_i appartiennent à $proj._y F_{2m+1}$, quel que soit i. Donc, ce terme $\leq\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|\int_{J_i}\left(\int_0^1 r_{2m+1}(x,y)\,dx\right)dy\right|+\int_{(\cup J_i)\cap F_m^*}\left(\int_0^1 |r_{2m+1}(x,y)|\,dx\right)dy<2^{-(\nu_{2m+1}-1)}$.

À deuxième terme, si $y\in F_{m+1}^*$, pour tout $n\geq m+1$, $y\overline{\in} Y_{2n+1}$ et $y\in proj._y F_{2n+1}$. Donc, on a $\left|\int_0^1 r_{2n+1}(x,y)\,dx\right|<2^{-(\nu_{2n+1}-n)}$ pour tout $n\geq m+1$, par suite ce terme $<2^{-(\nu_{2m+3}-(m+2))}\leq 2^{-(\nu_{2m+1}-m)}$.

Posons pour tout m $(m=0,1,2,\cdots)$

$$f_m^*(y)=f_0^*(y)+\sum_{n=0}^{m} r_n^*(y),$$

plus précisément

$$f_m^*(y)=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^1 r_{2n+1}(x,y)\,dx & \text{si } y\in F_{m+1}^* \\ \sum\limits_{n=0}^{m}\int_0^1 r_{2n+1}(x,y)\,dx & \text{si } y\overline{\in} F_{m+1}^*.\end{cases}$$

On a alors $\lim\limits_{m\to\infty} f_m^*(y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^1 r_{2n+1}(x,y)\,dx=g(y)$ pour tout y appartenant à $\bigcup\limits_{m=0}^{\infty} F_m^*$. On a de plus $\operatorname{mes}\left([0\leq y\leq 1]-\bigcup\limits_{m=0}^{\infty} F_m^*\right)=0$ et $F_m^*\subseteq F_{m+1}^*$. Donc, on voit qu'il existe une suite fondamentale $v=\{v_n\}$ définie dans

$[0 \leq y \leq 1]$ telle qu'une fonction-limite soit $g(y)$ et qu'une intégrale de la fonction $g(y)$ déterminée par v soit définie comme une limite d'une suite d'intégrales $\int f_m^*(y)\, dy$.

Enfin, puisqu'on a

$$\left|\int_0^1 f_m^*(y)\, dy - \sum_{n=0}^{m} \iint r_{2n+1}(x, y)\, dxdy\right|$$
$$\leq \int_{F_{m+1}^*} \left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\left|\int_0^1 r_{2n+1}(x, y)\, dx\right|\right) dy < 2^{-(\nu_{2m+1}-m)},$$

il s'ensuit qu'on a l'égalité suivante

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 f_m^*(y)\, dy = \sum_{n=0}^{\infty} \iint r_{2n+1}(x, y)\, dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint f_n(x, y)\, dxdy.$$

Considérons une condition suivante (**) au lieu de la condition (*).

(**) Pour tout système de nombre fini d'intervalles I_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ sans points commun deux à deux tels que $I_i = [a \leq x \leq b] \times J_i$, où J_i sont des intervalles contenus dans $[c \leq y \leq d]$, si l'un au moins des extrémités de J_i appartiennent à $proj._y F_n$ pour tout i, on a

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\iint_{I_i} r_n(x, y)\, dxdy\right| < 2^{-\nu_n}.$$

Alors, on voit aussitôt que si l'on prend dans la Proposition 1 la condition (**) au lieu de la condition (*), on a le même résultat que la Proposition 1, sans la hypothèse dans le résultat 2).

Passons à la démonstration de la Proposition 2. Nous pouvons d'abord démontrer[7] le

Lemme 1. *Si* $u=\{u_n\}$, $u_n = V(F_n, \nu_n; f_n)$, *est une suite fondamentale définie dans l'intervalle* $I_0 = [a, b; c, d]$ *et qui jouit de la propriété* (†), *pour* $\varepsilon > 0$ *quelconque, il existe un nombre positif* $\delta(n, \varepsilon)$ *tel que la condition* $\text{mes}\left(\bigcup_{i=1}^{i_0} K_i - F_n\right) < \delta(n, \varepsilon)$ *entraîne*

$$\sum_{m=n}^{\infty}\left|\iint_{(F_{m+1}-F_m)\cap(\cup K_i)} f(x, y)\, dxdy\right| < \varepsilon,$$

où $f(x, y)$ *est la fonction-limite de* $u : \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, *quel que soit le système de nombre fini d'intervalles* K_i $(i=1, 2, \cdots, i_0)$ *sans points commun deux à deux tels que* $K_i \cap F_n \neq 0$ *pour tout* i.

De plus, nous pouvons sans peine voir que pour une telle suite fondamentale il existe une limite de la suite d'intégrales $\iint_{K\cap F_n} f(x, y)\, dxdy$, quel que soit l'intervalle $K \subseteq I_0$, et que la fonction d'intervalle $I[K, u]$

7) Nous pouvons démontrer le Lemme 1 à la même manière que le Lemme 2 de la Note, S. Nakanishi: L'intégrale de Denjoy et l'intégration au moyen des espaces rangés. I, loc. cit.

$= \lim_{n\to\infty} \iint_{K \cap F_n} f(x, y)\, dxdy$ définie dans I_0 est fini-additive. Donc, nous pouvons voir le

Lemme 2. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, *une suite fondamentale définie dans l'intervalle* $I_0=[a, b; c, d]$ *telle que* $\{F_n\}$ *soit une suite non-décroissante d'ensembles fermés, de total* I_0, *et qui satisfait à la condition* (†). *Alors, la fonction-limite de la suite* u *est intégrable* $(\mathfrak{D})$ *sur* I_0 *au sens de l'intégrale* $(\mathfrak{D})$ *définie dans la Note,* S. Enomoto: Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions I, Osaka Math. J., 7, 69-102 (1955).

Par suite, en vertu du Théorème 6 de la Note précédente, il s'ensuit que la Proposition 2 est démontrée.