15. *Sur les Équations Différentielles Algébriques du Type $f(y, y')=0$*

Par Hirobumi MIZUNO

Faculté des Sciences Mécaniques, Université de Meiji, Tokyo

(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Feb. 12, 1960)

Introduction. Briot et Bouquet s'étaient proposé de déterminer toutes les equation $f(y, y')=0$, où $f(Y, Z)$ est un polynôme de Y et Z dont l'intégrale générale est une fonction uniforme; la réponse à cette question est que si l'équation $f(y, y')=0$ admet une solution uniforme, la courbe $f(Y, Z)=0$ est nécessairement du genre zéro ou un, et dans ce cas cette solution n'introduit pas de transcendantes distinctes de la fonction exponentielle et des fonctions elliptiques.

Nous allons considérer le problème au point de vue plus générale et chercher les intégrales de l'équation $f(y, y')=0$, le genre p de la courbe $f(Y, Z)=0$ étant quelconque. Si (y_0, z_0) est un point simple sur la courbe $f(Y, Z)=0$, le théorème d'existence affirme que l'équation $f(y, y')=0$ admette une solution locale et une seule $y=\psi(x)$ satisfaisant aux conditions $y_0=\psi(x_0)$, $z_0=\psi'(x_0)$, pour chaque x_0. Par la continuation analytique de cette fonction on aura une solution globale, mais on ne peut plus espérer en général que cette solution soit uniforme, d'après le résultat mentionné ci-dessus. Cependant il se peut que l'équation donnée admette une solution infiniment multiforme. Nous montrerons dans ce mémoire qu'en effet cela arrive et donnerons explicitement la représentation globale d'une telle solution.

§1. *Variétés jacobiennes.* Soit Γ une courbe algébrique $f(X, Y)=0$ de genre p. Soient $\int\omega=\left(\int\omega_i\right)$ le système des p intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes, $\boldsymbol{a}_k$ $(1\leq k\leq 2p)$ les vecteurs de ses périodes le long des cycles C_k, C_k étant $2p$ cycles 1-dimensionnels homologiquement indépendants sur Γ. Nous désignons par $\mathfrak{C}^p$ l'espace vectoriel de dimension p sur le corps des complexes $\mathfrak{C}$, par Δ le groupe engendré par $2p$ vecteurs $\boldsymbol{a}_k$; Δ est un sous-groupe discret de rang $2p$ dans $\mathfrak{C}^p$ et l'espace quotient $\Theta=\mathfrak{C}^p/\Delta$ est un tore complexe de dimension p.

D'après la théorie des variétés abéliennes, toute fonction symétrique des p points (x_i, y_i) variables indépendants sur Γ est une fonction abélienne admettant $2p$ périodes $\boldsymbol{a}_k$, définie dans l'espace $\mathfrak{C}^p$ et elle induit une fonction méromorphe sur le tore Θ; réciproquement on peut montrer que toute fonction méromorphe sur Θ est une fonction symétrique des p points variables sur Γ. Donc si l'on désigne par

$$\mathfrak{K}=\mathfrak{C}((x_1, y_1),\cdots,(x_p, y_p))_s$$

l'ensemble des éléments du corps $\mathfrak{C}(x_1, y_1,\cdots, x_p, y_p)$ qui sont invariants par toutes les permutations de p points (x_i, y_i) entre eux, c'est-à-dire si $\mathfrak{K}$ est un corps des fonctions rationnelles symétriques des (x_i, y_i), $\mathfrak{K}$ est isomorphe au corps $\mathfrak{M}(\Theta)$ des fonctions méromorphes sur Θ.

Soit $t=(t_1, t_2,\cdots, t_N)$ un système de fonctions dans $\mathfrak{K}$ tel que l'on ait $\mathfrak{K}=\mathfrak{C}(t)$. Le lieu de t sur $\mathfrak{C}$ est une variété algébrique J de dimension p dans un espace $\mathfrak{C}^N$ de dimension N assez grande; les coordonnées de J sont alors exprimées par les fonction abéliennes $\Phi_\nu(\boldsymbol{u})$ à cause de l'isomorphisme $\mathfrak{K}\cong\mathfrak{M}(\Theta)$. Autrement dit, le tore complexe Θ est appliqué sur la variété algébrique J par les fonctions abéliennes $\Phi_\nu(\boldsymbol{u})$. Nous appelons J la variété jacobienne de la courbe Γ.

Ceci posé, soit

$$(1)\qquad \boldsymbol{u}=\int^{(x_1,y_1)}\omega+\int^{(x_2,y_2)}\omega+\cdots+\int^{(x_p,y_p)}\omega$$

le système des p équations. Alors une fonction dans $\mathfrak{K}$, par exemple, $x_1x_2\cdots x_p$ est une fonction abélienne de $\boldsymbol{u}$:

$$(2)\qquad x_1x_2\cdots x_p=\Phi(\boldsymbol{u}).$$

§2. *Les fonctions infiniment multiformes.* Soient (x_i, y_i) $(1\leq i\leq p)$ les p points variables indépendants sur la courbe Γ. Le point $(x_1, y_1)\times(x_2, y_2)\times\cdots\times(x_p, y_p)$ est un point variable indépendant sur le produit $\Gamma\times\Gamma\times\cdots\times\Gamma$ de p facteurs égaux à la courbe Γ. Alors l'application

$$(x_1, y_1)\times\cdots\times(x_p, y_p)\to\boldsymbol{u}\equiv\sum_{i=1}^{p}\int^{(x_i,y_i)}\omega\ (\text{mod. périodes})$$

est un surjectif de ce produit sur le tore complexe $\Theta=\mathfrak{C}^p/\Delta$. Θ est, à son tour, appliqué biunivoquement sur la variété jacobienne J de Γ par l'application

$$\boldsymbol{u}\to t=(\Phi_\nu(\boldsymbol{u})),\qquad(1\leq\nu\leq N),$$

Φ_ν étant les fonctions abéliennes.

Maintenant supposons que le point (x_1, y_1) seul soit variable et les autres $p-1$ points $(x_2, y_2),\cdots,(x_p, y_p)$ soient fixés (mais arbitraires). Soit $\bar{t}$ l'image de (x_1, y_1) dans J. Le lieu de $\bar{t}$ est une courbe algébrique $\bar{\Gamma}$ birationnellement équivalente à Γ; son image dans le tore Θ est une sous-variété complexe analytique de dimension un que nous désignerons par W. L'application composée de Γ sur $\bar{\Gamma}$ est appelée la fonction canonique.

Dans cette circonstance les p variables $\boldsymbol{u}=(u_i)$ dans $\mathfrak{C}^p$ ne peuvent plus être indépendantes; elles sont regardées comme fonctions de l'une d'entre elles, par exemple, $u_2, u_3,\cdots, u_p$ sont les fonctions de u_1. Nous examinerons de plus près leur comportement.

Soient

$$u_i=\int^{(x_1,y_1)}\omega_i+\int^{(x_2,y_2)}\omega_i+\cdots+\int^{(x_p,y_p)}\omega_i, \quad (1\leq i\leq p).$$

Puisque nous avons fixé les $p-1$ points $(x_2, y_2),\cdots,(x_p, y_p)$, les $c_i=\int^{(x_2,y_2)}\omega_i+\cdots+\int^{(x_p,y_p)}\omega_i$ sont constantes; nous avons donc les p équations

$$(3) \qquad \boldsymbol{u}=\int^{(x_1,y_1)}\omega+\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c}=(c_i),$$

$\boldsymbol{u}$ étant la fonction de u_1 avec les valeurs dans $\mathfrak{C}^p$. Je dis que cette fonction $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(u_1)$ est infiniment multiforme. En effet, pour chaque valeur u_1 donnée il existe un nombre infini de points $(x_1^{(\alpha)}, y_1^{(\alpha)})$ sur Γ satisfaisant

$$u_1\equiv\int^{(x_1^{(\alpha)},y_1^{(\alpha)})}\omega_1+c_1, \quad \text{(mod. périodes)}$$

et tels que les points dans $\mathfrak{C}^p$ correspondant à ces $(x_1^{(\alpha)}, y_1^{(\alpha)})$:

$$\boldsymbol{u}^{(\alpha)}=\int^{(x_1^{(\alpha)},y_1^{(\alpha)})}\omega+\boldsymbol{c}, \quad u_1^{(\alpha)}=u_1$$

soient incongruents entre eux modulo périodes; si l'on regarde le point (x_1, y_1) comme le point variable indépendant et $\boldsymbol{u}=\int^{(x_1,y_1)}\omega+\boldsymbol{c}$ comme fonction de (x_1, y_1), alors le lieu de $\boldsymbol{u}$ dans chaque parallélipipède est une sous-variété complexe analytique de dimension un, et W intersecte avec le hyperplan $u_1=$const. en nombre fini de points, mais ces points dans un autre parallélipipède ne sont pas en general congruents modulo périodes avec les points dans le premier parallélipipède, et il y en a un nombre infini qui sont incongruents. Car, s'il n'y avait qu'un nombre fini de points $\boldsymbol{u}^{(\alpha)}$ incongruents modulo périodes, il existerait, pour chaque k, $1\leq k\leq 2p$, un entier rationnel n_k non zéro tel que

$$\boldsymbol{u}^{(\beta)}=\boldsymbol{u}^{(\alpha)}+n_k\boldsymbol{a}_k, \quad u_1^{(\beta)}=u_1^{(\alpha)}=u_1,$$

de sorte que $n_k a_{1k}=0$ et $a_{1k}=0$ $(1\leq k\leq 2p)$, ce qui est impossible puisque tous les éléments d'une ligne de la matrice de périodes ne peuvent s'annuler à la fois. Ainsi on a obtenu une fonction, infiniment multiforme.

Ceci-posé, dans la formule (2) de § 1, supposons que les $p-1$ points $(x_2, y_2,),\cdots,(x_p, y_p)$ soient fixés et la constante $K=x_2x_3\cdots x_p$ ne soit pas zéro, alors $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(u_1)$ est une fonction infiniment multiforme de u_1 et

$$(4) \qquad x_1=\frac{1}{K}\Phi[\boldsymbol{u}(u_1)]$$

est aussi une fonction infiniment multiforme de u_1, admettant en général $2p$ périodes $a_{11}, a_{12},\cdots, a_{12p}$.

§ 3. *Les solutions de l'équation différentielle* $f(y, y')=0$. Maintenant revenons à notre équation $f(y, y')=0$, où $f(Y, Z)$ est un polynôme en Y et Z et la courbe algébrique $\Gamma: f(Y, Z)=0$ est irréductible et de genre p. y' est une fonction algébrique $z=\varphi(y)$ et nous avons $\frac{dy}{dx}=z$ c'est-à-dire

$$x-c=\int^{(y,z)}\frac{dy}{z},$$

(y, z) étant un point variable sur la courbe Γ et c étant une constante arbitraire. Si l'intégrale abélienne $\int^{(y,z)}\frac{dy}{z}$ sur Γ est de première espèce, on a, d'après (4) de §2,

$$y=\Phi[\boldsymbol{u}(x-c)]$$

où Φ est une fonction abélienne de p variables et $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x)$ est une fonction infiniment multiforme de x, étudiée dans §2. Lorsque l'intégrale $\int^{(y,z)}\frac{dy}{z}$ est de deuxième ou de troisième espèce, il faut remplacer la variété jacobienne J de Γ par la variété jacobienne generalisée et la fonction abélienne Φ par la fonction quasi-abélienne. Nous traiterons de ce problème ailleurs.