137. *Sur les structures des espaces rangés.* I[1)]

Par Yukio YOSHIDA
Université d'Osaka

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., June 13, 1966)

§1. **Définition de l'espace rangé.** Dans ce paragraph, nous étudions la définition d'espace rangé.

Soit R un espace rangé qui satisfait aux axions (A) et (B) de M. Hausdorff et dont l'indicateur est ω. Pour chaque point x de R, la collection de toutes les familles $\mathfrak{V}_\alpha(x)(0\leq\alpha<\omega)$ de tous les voisinages de rang α de x satisfait aux quatre conditions suivantes:

(1) $\mathfrak{V}(x)=\bigcup_\alpha \mathfrak{V}_\alpha(x)$ est non-vide.

(2) à chaque élément V de $\mathfrak{V}(x)$ on a

$$x\in V.$$

(3) Pour tout élément V de $\mathfrak{V}(x)$ et pour tout nombre ordinal $\alpha(0\leq\alpha<\omega)$ il existe un nombre ordinal β et un élément W de $\mathfrak{V}_\beta(x)$ tels que l'on a

$$\alpha\leqq\beta<\omega \quad \text{et} \quad V\supseteqq W.$$

(4) Pour toute suite

$$V_0, V_1, \cdots, V_\gamma, \cdots \quad (0\leq\gamma<\beta)$$

bien ordonnée (n'étant pas nécessairement monotone) d'éléments de $\mathfrak{V}(x)$ dont le type est un nombre ordinal β inférieur à ω, il existe un élément V de $\mathfrak{V}(x)$ tel que l'on a

$$V\subseteqq\bigcap_\gamma V_\gamma.$$

Désignons par (A_r), (a_r), et (B_r^*) les conditions (2), (3), et (4) respectivement.

Inversement, sur un ensemble R non-vide et sur un nombre ordinal ω limite inaccessible, supposons que, pour tout point x de R, il existe une collection des familles $\mathfrak{V}_\alpha(x)$ des parties de R où α parcourt l'intervalle $0\leq\alpha<\omega$ et laquelle satisfait aux conditions (1), (2), (3), et (4).

Si l'on prend pour la base des voisinages du point x la famille $\mathfrak{V}(x)=\bigcup_\alpha \mathfrak{V}_\alpha(x)$, R devient un espace topologique qui satisfait aux axioms (A) et (B) de M. Hausdorff, et dont la profondeur est égale ou supérieur à ω. De plus, sur cet espace topologique R, si l'on prend pour les voisinages de rang α de x tous éléments de $\mathfrak{V}_\alpha(x)$, alors R devient un espace rangé dont l'indicateur est ω.

1) K. Kunugi: Sur la méthode des espaces rangés. I. Proc. Japan Acad., **42**, 318-322 (1966).

Enfin, soit R un espace rangé qui satisfait aux (A) et (B) et dont l'indicateur est ω, et soient $\mathfrak{V}_\alpha(x)(0\leq\alpha<\omega)$ les familles de tous les voisinages de rang α d'un point x quelconque de R.

Sur l'ensemble R, si l'on induit une nouvelle topologie en employant toutes les familles $\mathfrak{V}_\alpha(x)$ ($x\in R$, $0\leq\alpha<\omega$) par la méthode précédente, alors l'application d'identité du premier espace topologique R sur le dernier est un homéomorphisme.

De plus, sur le nouvel espace rangé obtenu, par la méme méthode, du nouvel espace topologique R, pour qu'une partie V d'ensemble R est un voisinage de rang α d'un point x du dernier espace rangé R, il faut et il suffit qu'il est celui du premier:

§ 2. Ensembles fermés(r) et ensembles ouverts(r). Au moyen de la notion de la limite dans les espaces rangés, définie par Prof. K. Kunugi,[1] on peut donner une notion analogue à adhérences des sous-ensembles des espaces topologique et ayant les indicateurs w. Dans ce paragraph nous considérons des espaces rangés satisfaisant aux axiomes (A) et (B) de M. Hausdorff et ayant les indicateurs ω. Pour toute partie A d'un espace rangé R posons que

$$\lambda(A)=\{x\mid x\in\{\lim_\alpha x_\alpha\}\quad \text{où}\quad \forall\alpha\ x_\alpha\in A\}.$$

Proposition 1. *Pour toutes parties A, B d'un espace rangé R on a*

$$A\subseteqq\lambda(A).$$
$$A\subseteqq B \quad \textit{entraîne} \quad \lambda(A)\subseteqq\lambda(B).$$
$$\lambda(\phi)=\phi. \qquad \lambda(R)=R.$$

Proposition 2. *Si tous éléments de $\mathfrak{V}=\bigcup_x\mathfrak{V}(x)$ d'un espace rangé R sont ouverts(r)*[2] *alors, de toute partie A de R, on a*

$$\lambda(\lambda(A))=\lambda(A).$$

Proposition 3. *Soit $\{A_\alpha\mid 0\leq\alpha<\gamma\}$ une suite bien ordonnée (n'étant pas nécessairement monotone) des parties de l'espace rangé R de laquelle le type γ est un nombre ordinal inférieur* à ω. *Alors on a*

$$\lambda(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha\lambda(A_\alpha).$$

Proposition 4. *Pour que, à chaque partie A d'un espace rangé R, on ait $\lambda(E)=\bar{E}$ il faut et il suffit que, à chaque point x de R, tous les deux suite fondamentales par rapport à x*[3] *soient equivalentes.*[4]

---

2) Voir la définition 1 suivante.

3) K. Kunugi: Sur la méthode des espaces rangés. II. Proc. Japan Acad., **42**, 549-554 (1966).

4) Dans un espace rangé S quelconque, nous disons que deux suite fondamentales $\{U_\alpha(x)\}, \{V_\beta(x)\}$ par rapport à un point x de S, sont équivalentes lorsque pour tout α il existe un β tel que l'on a $U_\alpha(x)\supseteqq V_\beta(x)$ et réciproquement.

Définition 1. *Dans un espace rangé R, nous appelons ensembles fermés(r) les ensembles A tels que l'on a $\lambda(A)=A$. Et appelons ensembles ouverts(r) les complimentaires des ensembles fermés(r).*

L'ensemble entier R et l'ensemble vide ϕ sont à la fois fermés(r) et ouverts(r).

Proposition 5. *Toute intersection d'ensembles fermés(r) est un ensemble fermé(r).*

Toute réunion d'ensembles ouverts(r) est un ensemble ouvert(r).

Proposition 6. *Soit $\{A_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \gamma\}$ une suite bien ordonnée des parties d'un espace rangé R, où γ est un nombre ordinal inférieur à ω. Si tous A_α sont fermés(r) (ouverts(r)) alors $\bigcup_\alpha A_\alpha (\bigcap_\alpha A_\alpha)$ est fermé(r) (ouverts(r)).*

Proposition 7. *Pour qu'une partie A d'un espace rangé R soit ouvert(r) il faut et il suffit que toute suite fondamentale $\{V_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des voisinages par rapport à un point x appartenant à A ait un term $V_{\alpha_0}(x)$ contenu dans A.*

Proposition 8. *Les ensembles fermés(r) (ouverts(r)) sont formés (ouverts) au sens ordinaire.*

Remarque. Au moyen de la notion ou de la limite propre,[1] ou de la limite quasi-propre[5] on peut avoir les propositions analogues à celles 1, 3, 5, 6, et 7 de ce paragraphe.

§ 3. Sous-espaces rangés. Dans la note "Sur la méthode des espaces rangé. II", Prof. K. Kunugi a donné la notion d'espace rangé induit d'un autre espace rangé.[3]

Nous employons les notations apparaîssant dans la note. Et de même le paragraphe précédent nous considérons un espace rangé R satisfaisant aux axiomes (A) et (B) de M. Hausdorff et ayant l'indicateur ω.

Proposition 9. *Si une suite $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des points de A qui est un espace rangé induit de R converge vers un point x de A comme la suite des points de R, elle converge vers x comme la suite des points d'espace A: c'est-à-dire que*

$$x \in \{\lim_\alpha x_\alpha\} \quad \text{dans } R$$

entraîne que

$$x \in \{\lim_\alpha x_\alpha\} \quad \text{dans } A.$$

La réciproque de cette proposition n'est pas inexacte.

Proposition 10. *Soit x un point de A, et soit $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ une suite des points de A, où A est un espace rangé induit de R. Pour la suite $\{V_\alpha(x, A) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ des voisinages de x définissant la relation*

5) Y. Yoshida: Sur les convergences dans l'espace rangé. I. Proc. Japan Acad., **42**, 473-476 (1966).

$$x \in \{\lim_{\alpha} x_\alpha\} \quad dans\ A$$

s'il existe une suite fondamentale $\{U_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ *des voisinages par rapport à* x *dans* R *telle que l'on a*

$$V_\alpha(x, A) = U_\alpha(x) \cap A \quad (0 \leq \alpha < \omega)$$

alors on a

$$x \in \{\lim_{\alpha} x_\alpha\} \quad dans\ R.$$

Définition 2. *Soit* A *un espace rangé induit de* R. *Nous appelons* A *un sous-espace rangé de* R, *lorsque pour toute suite fondamentale* $\{V_\alpha(x, A) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ *des voisinages par rapport à un point* x *quelconque de* A, *il existe une suite fondamentale* $\{U_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ *des voisinages par rapport au* x *dans* R *telle que l'on a*

$$V_\alpha(x, A) = U_\alpha(x) \cap A \qquad (0 \leq \alpha < \omega).$$

Proposition 11. *Soit* A *un sous-espace rangé de* R, *l'application canonique*[6] *de* A *dans* R *est continue*(r).

6) N. Bourbaki: Éléments de Mathématiques, I. Théorie des Ensembles. Chap. II, §3, No 7.