68. *Remarque sur les noyaux de convolution associé à résolvante*

Par Masayuki Itô
Institut Mathématique d'Université de Nagoya

(Comm. by Kinjirô Kunugi, M. J. A., March 12, 1971)

1. Introduction et préliminaires. Soit X un groupe abélien localement compact, et désignons par dx sa mesure de Haar. Rappelons qu'un noyau de convolution N sur X est une mesure de Radon positive dans X. On note C_K l'espace des fonctions numériques, continues dans X, à support compact, et muni de la topologie usuelle. Son sous-ensemble des fonctions non-négatives est désigné par C_K^+. Pour une fonction f de C_K, le potentiel de f par rapport au noyau N est la convolution $N*f$.

On dit que N satisfait au principe de domination (resp. au principe complet du maximum) si, quelles que soient f et g de $C_K^+, N*f(x)\leqq N*g(x)$ (resp. $N*f(x)\leqq N*g(x)+1$) est satisfaite partout sur X dès qu'elle l'est sur le support $S(f)$ de f.

Il est bien connu que le principe de domination pour N a très proche relation avec l'existence de la résolvante $(N_p)_{p\geqq 0}$ telle que $N_0=N$. Rappelons qu'une résolvante (N_p) est une famille des noyaux de convolution sur X et qui satisfait à la condition suivante:

Quels que soient $p>0$ et $q\geqq 0$, la convolution N_p*N_q a un sens et on a

$$N_p-N_q=(q-p)N_p*N_q. \tag{1}$$

On connaît aussi que, pour un noyau de convolution N sur X, s'il existe une résolvante $(N_p)_{p\geqq 0}$ avec $N_0=N$, elle est unique, et on dit ici que N est un noyau de convolution associé à résolvante. Ce noyau satisfait au principe de domination.

On dit finalement qu'une résolvante $(N_p)_{p\geqq 0}$ est sous-markovienne si, quel que soit $p>0, p\int dN_p\leqq 1$. La sous-markovité de (N_p) est équivalente au principe complet du maximum pour N_0.

Théorème I. *Soient N et $(N_p)_{p\geqq 0}$ un noyau de convolution associé à résolvante et la résolvante avec $N_0=N$, alors les trois énoncés suivants sont équivalents*:

(a) *N satisfait au principe complet du maximum.*

(b) *Quel que soit $p>0, N_p*\check{N}_p$ a un sens.*

(c) *N est de type positif.*

On note $\check{N}_p$ la symétricité de N_p, et N_p est de type positif si l'on a, quelle que soit f de C_K, $N*f*\check{f}(0)\geqq 0$, où $\check{f}(x)=f(-x)$.

Dans l'autre note [2], on examine la régularité des noyaux de Dirichlet, et en généralisant son résultat, on obtiendra le théorème suivant:

Théorème II. *Soit N un noyau de convolution sur X associé à résolvante. S'il est absolument continu par rapport à la mesure de Haar, il existe alors une fonction $G(x)$ semi-continue inférieurement dans X et telle que $N=Gdx$. En particulier, si N est de type positif, on peut prendre une noyau-fonction G qui satisfait au principe de continuité.*

Une noyau-fonction G sur X satisfait au principe de continuité si, quelle que soit μ une mesure de Radon positive dans X et à support compact, $G*\mu$ est finie et continue dans X dès que la restriction de $G*\mu$ sur le support $S(\mu)$ de μ est finie et continue et que $G*\mu$ est bornée.

2. Le théorème I et quelques corollaires. Montrons d'abord le théorème I. Sous l'énoncé (a), on a, quel que soit $p>0$, $p\int dN_p\leqq 1$, et par suite, l'implication (a)$\Rightarrow$(b) est immédiatement obtenue. On montra que (b) implique (a). Admettons que, quels que soient $p>q>0$,

$$N_q+\frac{1}{p-q}\varepsilon=\frac{1}{p-q}\sum_{n=0}^{\infty}((p-q)N_p)^n, \tag{2}$$

où $(\cdot)^0=\varepsilon$ est la mesure de Dirac à l'origine et $(\cdot)^{n+1}=(\cdot)^n*(\cdot)$, et posons

$$\tilde{N}_p=\frac{1}{2}(N_p+\check{N}_p), \tag{3}$$

alors, quel que soit n un entier positif, la convolution $(\tilde{N}_p)^n$ a un sens, et on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2(p-q)}\left(\left(N_q+\frac{1}{p-q}\varepsilon\right)+\left(\check{N}_q+\frac{1}{p-q}\varepsilon\right)\right)*\sum_{i=0}^{n}((p-q)\tilde{N}_p)^i\\
&=\left(N_q+\frac{1}{p-q}\varepsilon\right)*\left(\check{N}_q+\frac{1}{p-q}\varepsilon\right)*(\varepsilon-(p-q)^{n+1}(\tilde{N}_p)^{n+1})\\
&\leqq\left(N_q+\frac{1}{p-q}\varepsilon\right)*\left(\check{N}_q+\frac{1}{p-q}\varepsilon\right).
\end{aligned}\tag{4}$$

La série $\sum_{n=0}^{\infty}((p-q)\tilde{N}_p)^n$ est donc convergente, et par suite, $(p-q)\int d\tilde{N}_p\leqq 1$, car $\tilde{N}_p$ est symetrique par rapport à l'origine (voir [1]). Faisant $q\to 0$, on obtient que (N_p) est sous-markovienne, d'où l'énoncé (a). Voyons ensuite que l'égalité (2) a lieu. D'après l'égalité (1), on a

$$(p-q)\left(N_q+\frac{1}{p-q}\varepsilon\right)*(\varepsilon-(p-q)N_p)=\varepsilon, \tag{5}$$

et la convolution $(N_p)^n$ est définie pour tout l'entier $n>0$. En utilisant encore l'égalité (1), on a

$$\left(N_q+\frac{1}{p-q}\varepsilon\right)*(\varepsilon-((p-q)N_q)^{n+1})=\frac{1}{p-q}\sum_{i=1}^{n}((p-q)N_p)^i. \quad (6)$$

Il en résulte de l'égalté (6) que la série $\sum_{n=0}^{\infty}((p-q)N_p)^n$ converge. Posons

$$N'_q=\frac{1}{(p-q)}\sum_{n=0}^{\infty}((p-q)N_p)^n, \quad (7)$$

alors, d'après le calcul élémentaire, on a, quel que soit $r>0$,

$$N'_q-N_r=(p-q)N'_q*N_p-(p-r)N_r*N_p=(r-q)N'_q*N_r, \quad (8)$$

et par suite, $N'_q=\lim_{r\to q} N_r=N_q$, d'où l'égalité (2).

Pour montrer l'implication (a)$\Rightarrow$(c), il suffit de voir que, quel que soit $p>0$, N_p est de type positif, car $p\to N_p$ est vaguement continue. Pour une constante positive c, on a, quelle que soit f de C_K,

$$\left(N_p+\frac{1}{c}\varepsilon\right)*f*\check{f}(0)=c\left(N_p+\frac{1}{c}\varepsilon\right)*f*\left(\check{N}_p+\frac{1}{c}\varepsilon\right)*\check{f}*(\varepsilon-c\check{N}_{(p+c)})(0)$$
$$=\left(c-c^2\int dN_{(p+c)}\right)\int\left|\left(N_p+\frac{1}{c}\right)*f\right|^2dx+\frac{c^2}{2}\iint\left|\left(N_p+\frac{1}{c}\right)*f(x-y)\right.$$
$$\left.-\left(N_p+\frac{1}{c}\right)*f(x)\right|^2dN_{(p+c)}dx\geqq 0. \quad (9)$$

Faisant $c\to\infty$, on arrive à la conclusion que N_p est de type positif.

Réciproquement, si $N=N_0$ est de type positif, alors, d'après (1), $\varepsilon-pN_p$ l'est aussi, et par suite, $p\int dN_p\leqq 1$, d'où l'implication (c)$\Rightarrow$(a). La démonstration est ainsi complète.

Si X est compact, un noyau de convolution associé à résolvante satisfait toujours au principe complet du maximum, mais, dans le cas où X n'est pas compact, on ne peut pas toujours l'affirmer. Par exemple, dans la droite réelle $R, N_a=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\varepsilon_n$ $(a\geqq 0)$ est un noyau de convolution associé à résolvante, mais, N_a satisfait au principe complet du maximum si et seulement si $0\leqq a\leqq 1$.

Corollaire 1. *Soit N un noyau de convolution sur X (non-compact) et associé à résolvante. Si, quelle que soit $f\neq 0$ de C_K^+, la fonction $N*f(-x)/N*f(x)$ est bornée à l'infini, N satisfait alors au principe complet du maximum.*

Soit $(N_p)_{p\geqq 0}$ la résolvante avec $N_0=N$, on a alors, quelles que soient f et g de C_K^+,

$$\int N*f(x)N_p*g(-x)dx<+\infty.$$

D'après notre condition, il existe un compact K de X et une constante positive C tels que $N*f(-x)\leqq CN*f(x)$ dans le complément de K, et donc

$$\int N*f(-x)N_p*f(-x)dx<+\infty,$$

d'où $N_p * \check{N}_p$ a un sens.

Corollaire 2. *Soit (N_p) une résolvante, alors, elle est sous-markovienne ou il existe un nombre positif p_0 tel que $\int dN_p = +\infty$ ou $\int dN_q < +\infty$ d'accord avec $0 \leqq p \leqq p_0$ ou $q > p_0$.*

Si l'on a, pour tout $p > 0$, $\int dN_p < +\infty$, alors $N_p * \check{N}_p$ a un sens, et d'après notre théorème, $p \int dN_p \leqq 1$. D'autre part, soit $p_0 = \sup \left\{ p > 0 ; \int dN_p = +\infty \right\}$, alors, d'après la semi-continuité inférieure de $p \to \int dN_p$, p_0 vérifie évidemment notre condition.

Il est bien connu qu'un noyau de convolution N associé à résolvante satisfait au principe du balayage (cf. [1]) ; c'est-à-dire, pour une mesure de Radon positive μ dans X et à support compact, et pour un ouvert U de X, il existe une mesure de Radon positive μ'_U dans X, portée par $\bar{U}$ et telle que l'on ait $N * \mu \geqq N * \mu'_U$ dans X et $N * \mu = N * \mu'_U$ dans U.

D'après le corollaire 2, on peut montrer facilement que, quel que soit U un ouvert de X, $\int d\mu'_U \leqq \int d\mu$ ou l'on a $\sup \left\{ \int d\mu'_U \,;\, U \text{ est un ouvert de } X \right\} = +\infty$ dès que $\mu \neq 0$.

3. La démonstration du théorème II. Soit $(N_p)_{p \geqq 0}$ la résolvante avec $N_0 = N$. Si N est absolument continu par rapport à la mesure de Haar, alors N_p l'est aussi, car $N_p \leqq N$. On désigne par G'_p une densité de N_p par rapport à la mesure de Haar. D'après l'égalité (1), on peut écrire

$$N_p = \int_p^\infty N_q * N_q dq = \left(\int_p^\infty G'_p * G'_p dp \right) dx.$$

La fonction $G'_p * G'_p$ est bien définie dans X et semi-continue inférieurement dans X. Posons $G_p = \int_p^\infty G'_q * G'_q dq$ et $G = \int_0^\infty G'_q * G'_q dq$, alors, ils sont semi-continue inférieurement dans X et on a $N = G dx$ et $N_p = G_p dx$.

Montrons la deuxième partie. Soit μ une mesure de Radon positive dans X, à support compact et telle que $G * \mu$ soit bornée et sa restriction sur $S(\mu)$ soit finie et continue. Alors, quel que soit $p > 0$, $G_p * \mu$ est aussi bornée et sa restriction sur $S(\mu)$ est finie et continue, car $G * \mu = G_p * \mu + \int_0^p G_q * G_q * \mu dq$, et $G_p * \mu$ et $\int_0^p G_q * G_q * \mu dq$ sont semi-continues inférieurement dans X. La fonction $G * \mu$ étant bornée, on a

$$\int_0^p G_q * G_q * \mu dq = pG * G_p * \mu$$

partout dans X. $G * \mu$ étant bornée et G_p étant de L^1 (cf. l'égalité (2)), $pG * G_p * \mu$ est finie et continue dans X. D'autre part, d'après le théorème de Dini, la famille $(G_p*\mu)_{p\geqq 0}$ converge uniformément vers 0 sur $S(\mu)$ avec $p\to\infty$. Pour compléter notre démonstration, il suffit de voir le lemme suivant:

Lemme. *Soient N et G les mêmes que ci-dessus. On suppose encore que N s'annule à l'infini.*[1] *Si, pour une mesure de Radon positive μ dans X et à support compact, $G*\mu$ est bornée dans X, on a alors $G*\mu(x)\leqq \sup_{y\in S(\mu)} G*\mu(y)$.*

En effet, on obtient d'abord que $G*\mu(x)$ tend vers 0 avec $x\to\infty$, car, si $N\neq 0$, il existe une fonction f de C_K^+ et telle que $G*f(x)\geqq G*\mu(x)$ dans un voisinage de $S(\mu)$, et alors, la même inégalité a lieu dans X. On peut supposer ensuite que $k=\sup_{y\in S(\mu)} G*\mu(y)$ est non-zéro, et il suffit de voir $G*\mu(x)\leqq k$ presque partout dans X, car $G*\mu$ est semi-continue inférieurement. Supposons que cela n'a pas lieu, il existe alors une fonction mesurable, non-négative $f(\neq 0)$ dans X, à support compact et telle que

$$S(f)\subset\{x\in X\,;\,G*\mu(x)>k\}.$$

Soient $F=\{x\in X\,;\,G*\mu(x)\leqq k\}$ et $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille filtrante à ganche d'ouverts et avec $\cap\,\omega_\alpha=F$, alors il existe une mesure de Radon positive ν'_F dans X et telle que

$$S(\nu'_F)\subset F \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha\in A}\int G*\nu'_\alpha d\nu'_\alpha=\int G*\nu'_F d\nu'_F,$$

où ν'_α est une mesure balayée de $f dx$ sur ω_α (voir la fin de la section 2). On a

$$0<\int G*\mu(f dx-d\nu'_F)=\lim_{\alpha\in A}\int G*\mu(f dx-d\nu'_\alpha)=0,$$

car $\int d\nu'_F\leqq 1$. Cela est une contradiction, d'où notre lemme

On remarque finalement que $N_p(p>0)$ s'annule à l'infini, qui résulte évidemment de la sous-markovité de (N_p) et de l'égalité (2).

Références

[1] G. Choquet et J. Deny: Aspects linéaires de la théorie du potentiel. C. R. Acad. Sc. Paris, **250**, 4260–4262 (1960).

[2] M. Itô: Sur la régularité des noyaux de Dirichlet. ibid, **268**, 867–868 (1969).

1) Cela signifie que, quelle que soit f de C_K, $\lim_{x\to\infty} N*f(x)=0$.