

10. Über die Potenzsumme der Charaktere einer Permutationsgruppe.

Von Kiyoshi TAKETA.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Rec. Dec. 1, 1927. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Feb. 12, 1928.)

Aus den n Variablen x_1, x_2, \dots, x_n der Permutationsgruppe Γ seien die $m = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ Variationen k -ter Klasse gebildet und mit y_1, y_2, \dots, y_m bezeichnet. Führen wir auf den Variablen x die Permutationen von Γ aus, so werden unter den Variablen y eine mit Γ isomorphe Permutationsgruppe hervorgerufen, die wir mit $\Gamma^{(k)}$ bezeichnen wollen. Bedeuten nun χ_i bez. $X_i^{(k)}$ die Charaktere der entsprechenden Permutationen von Γ bez. $\Gamma^{(k)}$, dann ist offenbar

$$(1) \quad X_i^{(k)} = \chi_i (\chi_i - 1) (\chi_i - 2) \dots (\chi_i - k + 1),$$

auch für $k > \chi_i$, weil alsdann die beiden Seiten verschwinden. Da aber die Summe der Charaktere einer Permutationsgruppe der Ordnung m mal Anzahl der Transitivitätssysteme gleich ist,¹⁾ so gilt, wenn wir diese Anzahl bei der Gruppe $\Gamma^{(k)}$ mit ρ_k und die gemeinsame Ordnung der Gruppen mit g bezeichnen,

$$(2) \quad \rho_k g = \sum_{i=1}^g X_i^{(k)} = \sum_{i=1}^g \chi_i (\chi_i - 1) \dots (\chi_i - k + 1)$$

oder

$$(3) \quad \sum_{i=1}^g \chi_i (\chi_i - 1) (\chi_i - 2) \dots (\chi_i - k + 1) \equiv 0 \pmod{g},$$

was auch für $k > n$ gilt, weil $\chi_i \leq n$ und somit die linke Seite verschwinden.

Aus (2) erhält man für $k = 2$

$$\rho_2 g = \sum_{i=1}^g \chi_i^2 - \sum_{i=1}^g \chi_i = \sum_{i=1}^g \chi_i^2 - \rho_1 g$$

also

$$\sum_{i=1}^g \chi_i^2 = (\rho_1 + \rho_2) g,$$

1) Vgl. A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin (1923), 74.

und danach für $k = 3$

$$\sum_{i=1}^g \chi_i^3 = (\rho_1 + 3 \rho_2 + \rho_3) g, \quad \text{usw.}$$

Allgemein, wie durch die vollständige Induktion leicht nachweisbar ist,

$$\chi_1^k + \chi_2^k + \dots + \chi_g^k \equiv 0 \pmod{g},$$

d.h. die Summe der k -ten Potenzen der Charaktere einer Permutationsgruppe der Ordnung g ist stets durch g teilbar.

Ist speziell Γ ν -fach transitiv, so ist für $k \leq \nu$ notwendig

$$g = \sum_{i=1}^g \chi_i (\chi_i - 1) \dots (\chi_i - k + 1),$$

während diese eine Bedingung auch dafür hinreichend ist, dass Γ wenigstens k -fach transitiv ist.
