137. Zur konformen Flächentheorie mit Krümmungskugeln als Elementen II.[1]

By Tsurusaburo TAKASU.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Rec. Sept. 30, 1928. Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 2, 1928.)

7. Fundamentalsatz II der Theorie von Krümmungskugelkongruenzen. (Eine präzisere Auffassung). Um nun die Darstellbarkeit von A_{hk} durch G_{hk} und D_{hk} allein zu beweisen, verfahren wir wie folgt.

Wir führen zunächst eine neue quadratische Differentialform ein:

$$\boxed{P_{hk}(u^1, u^2)\,du^h du^k, \quad P=P_{11}P_{22}-P_{12}^2,} \tag{37}$$

von denen die Nullinien die Krümmungslinien sind:

$$\boxed{P_{hk}=E_{hr}D_k{}^r, \quad P^{hk}=\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial P_{hk}}=\frac{G}{P}E^{pk}D_p{}^h.} \tag{38}$$

Weiter bemerken wir eine Reihe von Identitäten:

$$\boxed{\begin{array}{llll} \text{(a)} & \frac{1}{2}G^{hk}G_{hk}=1, & \text{(b)} & \frac{1}{2}\lim\limits_{D\to 0} D^{hk}D_{hk}=1, \\ \text{(c)} & \frac{1}{2}E^{hk}E_{hk}=1, & \text{(d)} & \frac{1}{2}P^{hk}P_{hk}=1; \end{array}} \tag{39}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(a)} & G^{hk}P_{hk}=0=P^{hk}G_{hk}, \\ \text{(b)} & \frac{1}{2}G^{hk}D_{hk}=H=\frac{1}{2G}\lim\limits_{D\to 0} DD^{hk}G_{hk}, \\ \text{(c)} & P^{hk}D_{hk}=0=\lim\limits_{D\to 0} DD^{hk}P_{hk}, \\ \text{(d)} & E^{hk}G_{hk}=0=G^{hk}E_{hk}, \\ \text{(e)} & E^{hk}P_{hk}=0=P^{hk}E_{hk}, \\ \text{(f)} & E^{hk}D_{hk}=0=\lim\limits_{D\to 0} DD^{hk}E_{hk}; \end{array}} \tag{40}$$

---

1) Vgl. Teil I.

$$(41)\quad \boxed{\begin{aligned}&(\mathrm{a})\quad \frac{1}{2}G^{hk}A_{hk}=k^2K^G,\\&(\mathrm{b})\quad \frac{1}{2}\lim_{D\to 0}DD^{hk}A_{hk}=L.\ \text{(Wir setzen bloss so !)}\\&(\mathrm{c})\quad P^{hk}A_{hk}=\frac{G}{P}E^{kl}M_{kl}=2k^2\frac{G}{P}E^{ks}G^{hl}D_{hskl}.\end{aligned}}$$

Um (41) (c) zu beweisen, benutzen wir (33):

$$E^{kl}M_{kl}=E^{kl}D_k^{\ s}A_{sl}=2k^2E^{ks}G^{hl}D_{hskl}=\frac{P}{G}P^{sl}A_{sl}$$

nach (38).

Multipliziert man die erste, zweite und die dritte Kolonne (oder Zeile) der Determinante $|\,G_{11}\,D_{12}\,P_{22}\,|$ mit $\frac{1}{2}P^{11}$, P^{12} bezw. $\frac{1}{2}P^{22}$ und addiert zur dritten, so folgt nach (39), (40):

$$\frac{1}{P^{22}}\begin{vmatrix}G_{11} & G_{12} & 0\\ D_{11} & D_{12} & 0\\ P_{11} & P_{12} & 1\end{vmatrix}=PG^{\frac{1}{2}}\neq 0,$$

wonach erkennt man die lineare Unabhängigkeit von G_{hk}, D_{hk} und P_{hk}. So kann man den symmetrischen Tensor A_{hk} aus ihnen linear kombinieren:

$$(42)\qquad A_{hk}=\frac{1}{2}\{\alpha\, G_{hk}+\beta\, D_{hk}+\gamma\, P_{hk}\}.$$

Durch tensorielle Multiplikation mit G^{hk}, $\lim\limits_{D\to 0} DD^{hk}$, P^{hk} finden wir nach (40) (b) und (41) (a):

$$2k^2K^G=\alpha+\beta H,\qquad 2L=GH\alpha,$$

$$\gamma=P^{hk}A_{hk}=2k^2\frac{G}{P}E^{ks}G^{hl}D_{hskl}.$$

Folglich wird (42) zu:

$$(43)\quad \boxed{A_{hk}=\left(\frac{L}{GH}\right)G_{hk}+\left(\frac{k^2}{H}K^G-\frac{L}{GH^2}\right)D_{hk}+\left(k^2\frac{G}{P}E^{qs}G^{rl}D_{psql}\right)P_{hk},}$$

oder

$$(44)\quad \boxed{A_{hk}=\Psi_{hk}.L+\Phi_{hk},}$$

worin

$$\boxed{\begin{aligned}&\Psi_{hk}=\frac{HG_{hk}-D_{hk}}{GH^2},\\ &\Phi_{hk}=\frac{k^2}{H}K^G D_{hk}+\left(k^2\frac{G}{P}E^{qs}G^{pl}D_{psql}\right)P_{hk}\end{aligned}} \tag{45}$$

gesetzt sind[1].

Abgesehen von L sind jetzt alle vorkommenden Grössen wegen (44) und (45) durch die Grössen G_{hk} und D_{hk} allein darstellbar.

Um nun die Grösse L durch G_{hk} und D_{hk} allein darzustellen, multiplizieren wir (34) mit D_{kp} und dann schreiben wir h und p bezw. für p und h hin, so folgt:

$$\boxed{E^{sl}A_{hsl}=-2k^2E^{sl}D_h{}^pD_{psl}.} \tag{46}$$

Setzt man nun (44) in (46) ein, so folgt:

$$\boxed{E^{sl}A_{hsl}=E^{sl}\Psi_{hs}L_l+E^{sl}\Psi_{hsl}.L+E^{sl}\Phi_{hsl}=-2k^2E^{sl}D_h{}^pD_{psl}.} \tag{47}$$

Wir wollen nun neue Bezeichnung einführen:

$$\boxed{\Psi=\Psi_{11}\Psi_{22}-\Psi_{12}{}^2,\qquad \Psi^{hk}=\frac{1}{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\Psi_{hk}},} \tag{48}$$

so gelten:

$$\boxed{\frac{1}{2}\Psi^{hk}\Psi_{hk}=1,\qquad \Psi^{hr}\Psi_{hs}=\begin{cases}1, & r=s,\\ 0, & r\neq s.\end{cases}} \tag{49}$$

Multipliziert man (47) tensoriell mit Ψ^{hp} und dann mit E_{pq}, so folgt

$$\boxed{L_q+U_q.L+V_q=0,} \tag{50}$$

wobei

$$\boxed{\begin{aligned}&U_q=E^{sl}E_{pq}\Psi^{hp}\Psi_{hsl}\\ &V_q=E^{sl}E_{pq}\Psi^{hp}(\Phi_{hsl}+2k^2D_h{}^tD_{tsl}\end{aligned}} \tag{51}$$

gesetzt sind. Leitet man (50) kovariant nach p ab und setzt man aus (50) ein, so ergibt sich

$$\boxed{L_{qp}-U_q(U_pL+V_p)+U_{qp}.L+V_{qp}=0.} \tag{52}$$

Transformiert man die Integrabilitätsbedingung

---

1) $\lim\limits_{D\to 0}\frac{D}{2}D^{hk}\Psi_{hk}=1,\qquad \frac{1}{2}G^{hk}\Psi_{hk}=0,\qquad \frac{1}{2}P^{hk}\Psi_{hk}=0,$

$\lim\limits_{D\to 0}\frac{1}{2}DD^{hk}\Phi_{hk}=0,\qquad \frac{1}{2}G^{hk}\Phi_{hk}=k^2KG,\qquad \frac{1}{2}P^{hk}\Phi_{hk}=k^2\frac{G}{P}E^{ks}G^{hl}D_{hskl}.$

$$\boxed{E^{qp}L_{qp}=0} \tag{53}$$

von (50) mit (52), so erhält man:

$$\boxed{E^{qp}U_{qp}.L+E^{qp}(-U_qV_p+V_{qp})=0.} \tag{54}$$

A) Ist erstens

$$\boxed{E^{qp}U_{qp}\neq 0,} \tag{55}$$

so wird L ohne Integration nach (54) bestimmt.

Setzt man L aus (54) in (50) ein, so erhält man die folgende Beziehung:

$$\boxed{\begin{vmatrix} E^{rs}(U_{rsq}-U_{rs}V_q) & E^{rs}U_{rs} \\ E^{rs}\{U_{rs}V_q+(U_rV_s)_q-V_{rsq}\} & E^{rs}(U_rV_s-V_{rs}) \end{vmatrix}=0.} \tag{56}$$

B) Ist zweitens

$$\boxed{E^{qp}U_{qp}=0,} \tag{57}$$

so wird die Integrabilitätsbedingung (53)=(54) zu:

$$\boxed{E^{qp}(U_qV_p-V_{qp})=0} \tag{58}$$

und lässt L sich nach den integrierbaren Differentialgleichungen (50) durch Integration bis auf eine Integrationskonstante bestimmen.

Bedenkt man nun den Punkt $\mathfrak{x}(u^1, u^2)$ als auf die Weise (9) normiert, so wird der Punkt $\mathfrak{q}(u^1, u^2)$ nach (3) schon wohl normiert. Die so entstehenden Buchstaben wollen wir mit $\vee$ bezeichnen. So erhält man den

Fundamentalsatz II der Theorie von Krümmungskugelkongruenzen. (Eine präzisere Auffassung). *Sind zwei quadratische Differentialformen $\check{G}_{hk}(u^1, u^2)du^hdu^k$ und $\check{D}_{hk}(u^1, u^2)du^hdu^k$, wobei $\check{G}\neq 0$, $\check{D}=0$ ist, so vorgeschrieben, dass zwischen ihnen die Differentialgleichungen* (56) *gelten, so existieren für* (55) *stets Krümmungskugelkongruenzen, die diese Formen zu Grundformen haben und werden bis auf konforme Transformationen eindeutig bestimmt. Es gibt im Falle* (57) *unter* (58) *eine einparametrige Schar wesentlich verschiedener Krümmungskugelkongruenzen, wobei alle Krümmungskugelkongruenzen dieselben Grundformen haben. Dabei sollen alle in* (55), (56), (57) *und* (58) *vorkommenden Grössen mit* $\vee$ *bezeichnet sein.*

N.B. Dieser Satz ist zugleich *ein Fundamentalsatz der konformen Flächentheorie.*