25. *Sur la projection d'un ensemble plan G_δ.*

Par Kinjiro KUNUGUI.
L'Institut Mathématique, l'Université Impériale de Hokkaido.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., March 12, 1938.)

On sait que tout ensemble analytique linéaire est une projection d'un ensemble plan borelien (plus précisément, d'un ensemble plan G_δ). Il serait donc naturel à se demander quelle est la condition pour que cette projection soit un ensemble borelien. M. N. Lusin a démontré que[1] la projection uniforme[2] d'un ensemble plan borelien est aussi un ensemble borelien. Tandis que M. E. Szpilrajn a posé un problème,[3] qui concerne la généralisation de ce théorème devenu déjà classique: Soit M un ensemble plan G_δ dont toutes les intersections avec les droites parallèles à l'axe OY sont des ensembles fermés. La projection de M est-elle toujours un ensemble borelien?

Or, nous allons y donner une réponse affirmative. Notamment nous démontrons le théorème suivant:

Théorème. M étant un ensemble plan, désignons par $\Gamma(M)$ l'ensemble de tous les points $(x, 0)$ ayant la propriété: la droite parallèle à l'axe OY, passant par le point $(x, 0)$, coupe l'ensemble M en un ensemble fermé non vide. Si M est un ensemble plan G_δ, $\Gamma(M)$ est un complémentaire analytique.

Démonstration. 1. Soit N l'ensemble de tous les nombres irrationnels entre 0 et 1, et considérons l'espace 2^N, la famille de tous les sous-ensembles fermés non vides de N. La distance entre deux éléments A, B de 2^N est définie d'après la formule de M. F. Hausdorff.[4] Désignons par δ_{m_1} ($m_1=1, 2, 3, \ldots\ldots$) l'intervalle de Baire d'ordre 1. Nous rangeons les systèmes d'un nombre fini de ces intervalles en une suite déterminée: $\delta^*_{n_1}$ ($n_1=1, 2, 3, \ldots\ldots$). Supposons qu'on a défini déjà la suite $k-1$-ple $\delta^*_{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}}$, des systèmes d'un nombre fini des intervalles de Baire d'ordre $k-1$. Nous disons qu'un système des intervalles d'ordre k est un successeur de $\delta^*_{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}}$, si tous les intervalles de celui-ci sont contenus dans un des intervalles de celui-là, et si chacun des intervalles de celui-là contient au moins un intervalle de celui-ci. Nous rangeons tous les systèmes-succeseurs de $\delta^*_{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}}$ en une suite infinie, et les-désignons par

$$\delta^*_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \qquad (n_k=1, 2, 3, \ldots\ldots).$$

1) N. Lusin, Sur la classification de M. Baire, C. R. de Paris, t. 164 (1917) p. 93; Sur les ensembles analytiques, Fund. Math. t. X (1927) p. 59; Leçons sur les ensembles analytiques......, Paris, (1930) p. 166.

2) Soit M un ensemble situé dans le plan OXY. Nous disons que la projection de M sur l'axe OX est *uniforme*, si toute droite parallèle à l'axe OY a au plus un point commun avec M.

3) Fund. Math. t. 24, p. 324, Problème 61.

4) Cf. p. ex. F. Hausdorff. Mengenlehre, Berlin u. Leipzig, 1927 et 1935, p. 146; C. Kuratowski, Topologie, Warszawa-Lwow, 1933, p. 89.

Soit maintenant $\mathfrak{H}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ l'ensemble de tous les éléments A de 2^N, tels que

1) A est contenu dans la somme des intervalles de Baire de $\delta^*_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

2) Chacun des intervalles de $\delta^*_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ contient au moins un point de A.

Ces définitions étant posées, nous pouvons démontrer les propositions suivantes:

(1) $\mathfrak{H}_{n_1, n_2, \dots, n_{k+1}} \subseteq \mathfrak{H}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

(2) $\mathfrak{H}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ sont des ensembles fermés et ouverts dans 2^N.

(3) k étant fixe, deux ensembles $\mathfrak{H}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et $\mathfrak{H}_{n'_1, n'_2, \dots, n'_k}$ pourvus de différents systèms d'indices sont toujours disjoints.

(4) Le diamètre de $\mathfrak{H}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ tend vers 0 avec $1/k$.

(5) Pour tout nombre irrationnel ν de développement en fraction continue $(n_1, n_2, n_3, \dots\dots, n_k, \dots\dots)$, $\prod_{k=1}^{\infty} \mathfrak{H}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ n'est pas vide.

Ces propositions entraînent immédiatement le

Lemme I. *L'espace 2^N est homéomorphe à l'ensemble N de tous les nombres irrationnels entre 0 et 1. L'ensemble N peut être transformé en 2^N par une transformation biunivoque et bicontinue, soit $\theta=\theta(\xi)$ $(\theta \in 2^N,\ \xi \in N)$, de sorte que l'intervalle de Baire d'ordre k: $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ soit transformé en $\mathfrak{H}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ de 2^N défini plus haut.*

2. Lemme II. *Soit $\{E_{n_1, n_2, \dots, n_k}\}$ un système de Souslin dont les éléments $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ satisfont toujours à l'inclusions $E_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq E_{n_1, n_2, \dots, n_{k+1}}$. Supposons que, pour tout k, chaque point de l'espace n'appartient qu'à un nombre fini des $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Soit encóre F un ensemble fermé relativement à $N\,(F \subseteq N)$. Nous avons alors*

$$\sum_{\nu \in F} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu \in F} E_{n_1, n_2, \dots, n_k},$$

où $\sum_{\nu \in F} E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ signifie que la sommation s'étend aux systèmes $(n_1, n_2 \dots\dots, n_k)$ tels que

$$\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot F \neq 0 .^{1)}$$

En effet, il nous suffira de démontrer l'inclusion: $\sum_{\nu \in F} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu \in F} E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Soit p un point de $\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu \in F} E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Alors, pour tout k, il existe des systèmes $(m_1^k, m_2^k, \dots\dots, m_k^k)$ tels que $p \in E_{m_1^k, m_2^k, \dots, m_k^k}$ et que $\delta_{m_1^k, m_2^k, \dots, m_k^k} \cdot F \neq 0$. D'après l'hypothèse, il n'en existe qu'un nombre fini. Comparaisons deux systèmes de cette nature:

$$(m_1^k, m_2^k, \dots\dots, m_k^k) \quad \text{et} \quad (m_1^{k+\nu}, m_2^{k+\nu}, \dots\dots, m_{k+\nu}^{k+\nu}).$$

1) Cf. C. Kuratowski, loc. cit. p. 6.

Nous voyons bien que, d'après l'inclusion $E_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \supseteq E_{n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}}$ le système $(m_1^{k+\nu}, m_2^{k+\nu}, \ldots\ldots, m_k^{k+\nu})$ se trouve parmi $(m_1^k, m_2^k, \ldots\ldots, m_k^k)$. Nous disons que $(m_1^{k+\nu}, m_2^{k+\nu}, \ldots\ldots m_{k+\nu}^{k+\nu})$ est un successeur de $(m_1^k, m_2^k, \ldots\ldots, m_k^k)$, lorsque $(m_1^k, m_2^k \ldots\ldots, m_k^k) = (m_1^{k+\nu}, m_2^{k+\nu}, \ldots\ldots, m_k^{k+\nu})$. Si, pour tout ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots\ldots$, il existe un successeur $(m_1^{k+\nu}, m_2^{k+\nu}, \ldots\ldots, m_{k+\nu}^{k+\nu})$ de $(m_1^k, m_2^k, \ldots\ldots, m_k^k)$, nous disons encore que *l'indice de* $(m_1^k, m_2^k, \ldots\ldots, m_k^k)$ *est l'infini*. Il existe alors au moins un m_1', soit m_1, dont l'indice est infini. Il existe de même au moins un (m_1^2, m_2^2), soit (m_1, m_2), successeur de m_1 dont l'indice est infini, et ainsi de suite.

Ainsi nous avons une suite d'entiers positifs $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_k, \ldots\ldots$ telle que $\nu = (m_1, m_2, \ldots\ldots, m_k, \ldots\ldots) \in F$ et que $p \in E_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ pour tout k, $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ c. q. f. d.

3. Réduction du problème. Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble de tous les points (x, y) de M, tels que la droite parallèle à l'axe OY, passant par le point (x, y), coupe M en un ensemble non fermé. M. W. Sierpiński a démontré que l'ensemble $\mathfrak{M}$ et sa projection $\mathfrak{E}$ sur l'axe OX sont des ensembles analytiques.[1]

Désignons par R_n l'ensemble de tous les points (x, y) dont les coordonnées satisfont aux inégalités: $-n \leq x \leq n$, $-n \leq y \leq n$. Alors la formule:

$$\Gamma(M) = C\mathfrak{E} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(R_n \cdot M)$$

montre qu'il nous suffit de voir que $\Gamma(R_n \cdot M)$ est un complémentaire analytique. Sans restreindre la généralité, nous pouvons donc supposer que M est un G_δ *borné*.

Rangeons tous les nombres rationnels en une suite simple:

$$r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n, \ldots\ldots$$

Désignons par A_n et B_n l'intersection de la droite $y = r_n$ avec l'ensemble M et $M - \mathfrak{M}$ respectivement. Alors la formule:

$$\Gamma(M) = \Gamma(M) \{C \sum_{n=1}^{\infty} A_n\} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n$$

montre qu'il nous suffit de voir que $\{C \sum_{n=1}^{\infty} A_n\} \Gamma(M)$ est un complémentaire analytique. Or, $C \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ est un ensemble $F_{\sigma\delta}$, et il est une image d'une homéomorphie généralisée (0, 2) d'un ensemble fermé relativement à N.[2] En transformant l'axe OX par cette homéomorphie généralisée, nous pouvons supposer que l'ensemble M lui-même est un G_δ contenu dans $N \times N$.[3]

---

1) W. Sierpiński, Sur une classe d'opérations sur les ensembles de points. Mathematica. vol. V (1931), p. 56.

2) C. Kuratowski, loc. cit. p. 231.

3) Tout complémentaire analytique est transformé en un complémentaire analytique par des homéomorphies généralisées. Cf. C. Kuratowski et E. Szpilrajn: Sur les cribles fermés et leurs applications. Lemmes sur les fonctions mesurables (B), (III). Fund. Math. t. XVIII (1932), p. 162.

M étant un ensemble G_δ et 0-dimensionnel, d'après le théorème de M. Mazurkiewicz,[1] M est homéomorphe à un sous-ensemble Z fermé relativement à N. Désignons par $x=g(t)$, $t \in Z$ cette homéomorphie, et posons encore

$$h(t)=\text{projection de } g(t) \text{ sur l'axe } OX.$$

$g(t)$ étant une homéomorphie, $\Gamma(M)$ sera indentique avec $\Gamma(I)$ où I désigne la courbe représentée par la fonction $h(t)$. Donc, enfin, nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que M est une courbe représentée par la fonction continue définie sur un ensemble Z fermé relativement à N.

4. Nous avons vu que l'espace $H=2^Z$ est plongé dans 2^N. Puisque Z est un ensemble fermé relativement à N, il existe un ensemble fermé et borné (non vide) tel que $Z=F\cdot N$. F étant compact en soi, la formule $2^Z=2^F\cdot 2^N$ montre que l'ensemble 2^Z est fermé relativement à 2^N. Donc l'ensemble H sera transformé par la fonction inverse de $\theta(\xi)$ en un ensemble K fermé relativement à N. Étant donné un nombre ξ de K, désignons par $F(\xi)$, l'ensemble de tous les points x tels que $x=h(t)$; $t \in A$, $A=\theta(\xi)$. Pour tout ξ de K, A appartient à 2^Z; donc $F(\xi)$ n'est pas vide. Or, nous pouvons démontrer que l'ensemble K^* de tous les nombres ξ de K, tels que $F(\xi)$ se compose d'un seul point est un sous-ensemble de K, qui est *fermé* relativement à K, et que $F(\xi)$ (qui est univoque sur K^*) est continue sur K^*.

5. Or, $\Gamma(M)$ est contenu dans l'image A de K^* transformée par la fonction $F(\xi)$. En effet, p étant un point de $\Gamma(M)$, l'ensemble $\Delta=[h^{-1}(p)]$[2] est un ensemble fermé, non vide et contenu dans Z. Posons $\Delta=\theta(\xi)$. $F(\xi)$ ne contenant qu'un point, ξ appartient à K^*. Donc p appartient à l'ensemble A, transformé de K^* au moyen de $F(\xi)$.

D'autre part, on a $A=\sum_{\xi \in K^*} F(\prod_{k=1}^{\infty} \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k})$. Si nous posons $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}=F(\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\cdot K^*)$, cette formule devient:

$$A=\sum_{\nu \in K^*} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_1, n_2, \dots, n_k}. \tag{1}$$

Et, comme la fonction $F(\xi)$ est continue sur K^*, nous pouvons encore écrire

$$A=\sum_{\nu \in K^*} \prod_{k=1}^{\infty} \overline{E}_{n_1, n_2, \dots, n_k} \tag{2}$$

où $\overline{E}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ désigne la fermeture de $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. $\delta_{n_1, n_2, \dots, n_k}\cdot K^*$ étant un G_δ, $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, comme son image continue, est un ensemble analytique. Par conséquent, l'ensemble limite complet de $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ (k étant fixe), que nous désignerons par D_k, est aussi un ensemble analytique. Donc la somme $D=\sum_{k=1}^{\infty} D_k$ l'est également.

1) Chaque ensemble G_δ dans un espace complet, séparable et 0-dimensionnel est homéomorphe à un ensemble fermé relativement à N. Pour la démonstration, voir C. Kuratowski, loc. cit. p. 200 et 224.

2) $[h^{-1}(p)]$ est l'ensemble de tous les t tels que $p=h(t)$.

Or, nous allons démontrer que D coïncide avec la projection $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{M}$. (voir p. 92). En effet, si p appartient à $\Gamma(M)$, l'ensemble $[h^{-1}(p)]$ est fermé et contenu dans Z. Donc si, de plus, p appartient à D_k (pour un k), p appartient à une infinité de $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Il existe donc une infinité de systèmes $(n_1, n_2, \dots\dots, n_k)$ tels que $p = F(\xi)$, $\xi \in \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot K^*$. Posons $Z_1 = \theta(\xi)$. On a $Z_1 \supseteq [h^{-1}(p)]$, $Z_1 \in \mathfrak{H}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

$[h^{-1}(p)]$ étant compact en soi, il existe un nombre fini des intervalles de Baire, soit $I_1, I_2, \dots\dots, I_n$, qui contiennent au moins un point de $[h^{-1}(p)]$.

$Z_1 \subseteq [h^{-1}(p)]$ et $Z_1 \in \mathfrak{H}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ entraînent le fait que tous les intervalles de $\delta^*_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ (voir lemme I, p. 91) se trouvent parmi $I_1, I_2, \dots\dots, I_n$. Donc, il n'existe qu'un nombre fini des système $(n_1, n_2, \dots\dots, n_k)$ tels que $p \in F(\xi)$, $\xi \in \delta_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot K^*$, ce qui est une contradiction. Ceci montre que

$$CA + \Gamma(M) \subseteq CD. \tag{3}$$

D'autre part, si un point p appartient à $A \cdot C\Gamma(M)$, $[h^{-1}(p)]$ est non vide, et n'est pas un ensemble fermé. $[h^{-1}(p)]$ étant un ensemble fermé relativement à Z, et par suite, relativement à N, il existe un nombre rationnel r qui est un point-limite de $[h^{-1}(p)]$. Par suite, il existe un nombre entier positif k, tel que r n'est pas un point limite d'aucun des intervalles de Baire d'ordre k. $[h^{-1}(p)]$ possède alors les points communs avec une infinité des intervalles de Baire d'ordre k, par suite avec une infinité des $\delta^*_{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Donc p appartient à une infinité des $E_{n_1, n_2, \dots, n_k}$, d'où $p \in D_k$. Cela veut dire

$$A \cdot C\Gamma(M) \subseteq D. \tag{4}$$

Les formules (3) et (4) montrent que $D = A \cdot C\Gamma(M)$. Ainsi, l'inclusion $\Gamma(M) \subseteq A$, entraîne l'égalité:

$$\begin{aligned} \Gamma(M) &= A - D \\ &= \sum_{\nu \in K^*} \prod_{k=1}^{\infty} (E_{n_1, n_2, \dots, n_k} - D) = \sum_{\nu \in K^*} \prod_{k=1}^{\infty} (\overline{E}_{n_1, n_2, \dots, n_k} - D). \end{aligned}$$

M. Liapounoff[1] a démontré que si l'on supprime d'un infinité d'ensemble analytiques leur ensemble limite complet, les parties restantes peuvent être enfermées dans des complémentaires analytiques H_n ($n = 1, 2, 3, \dots\dots$), d'une telle façon que

$$\overline{\lim}\, H_n = 0.$$

En vertu de ce théorème, il existe des complémentaires analytiques $H_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ tel que $E_{n_1, n_2, \dots, n_k} - D_k \subseteq H_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ et que la limite complet de $H_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ soit vide. Posons

$$H^*_{n_1, n_2, \dots, n_k} = H_{n_1} \cdot H_{n_1, n_2} \cdot H_{n_1, n_2, n_3} \cdot \dots\dots H_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot (\overline{E}_{n_1, n_2, \dots, n_k} - D).$$

1) A. Liapounoff, Contribution à l'étude de la séparabilité multiple. Recueil mathématique, Nouvelle série, T. 1 (43), (1936), p. 505.

$H^*_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ satisfait à la double inclusion :

$$E_{n_1, n_2, \dots, n_k} - D \subseteq H^*_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq \bar{E}_{n_1, n_2, \dots, n_k} - D\,.$$

Par suite, nous avons

$$\Gamma(M) = \sum_{\nu \in K^*} \prod_{k=1}^{\infty} H^*_{n_1, n_2, \dots, n_k}\,. \tag{5}$$

Or, il est clair que, pour tout k, $H^*_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supseteq H^*_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}$ et la limite complet de $H^*_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ (k étant fixe) est vide. Donc, K^* étant un ensemble fermé relativement à N, en vertu du Lemme II, nous avons

$$\Gamma(M) = \prod_{k} \sum_{\nu \in K^*} H^*_{n_1, n_2, \dots, n_k}\,. \tag{6}$$

Comme $H^*_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ sont des complémentiares analytique, l'identité (6) montre bien que $\Gamma(M)$ l'est également. c. q. f. d.[1]

---

1) Les détails et quelques généralisations de ces résultats seront publiés dans "Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University," Series I.