43. Über die Riemannsche Fläche algebraischer Funktionen.

Von Yukiyosi KAWADA.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1938.)

1. Wenn k der komplexe Zahlkörper (kurz: k. Z.) und y eine algebraische Funktion von einer unabhängigen Variablen x ist, so gilt bekanntlich, dass (A) alle Funktionen des Funktionenkörpers $K=k(x, y)$ auf seiner Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_K^*$ bis auf endlich viele Pole überall regulär sind und umgekehrt, und dass (B) jeder Punkt $\mathfrak{p}^*$ auf $\mathfrak{R}_K^*$ einem Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K, den man wie üblich nach der Bewertung von K definiert, umkehrbar eindeutig zugeordnet ist, und die formale Entwicklung von $z \in K$ nach der Bewertungstheorie in einem Primdivisor $\mathfrak{p}$ mit einem Primelement t:

$$(1) \qquad z=\sum_{n \geq r} a_n t^n, \qquad a_n \in k, \qquad a_r \neq 0$$

mit der gewöhnlichen funktionentheoretischen Entwicklung im $\mathfrak{p}$ zugeordneten Punkt $\mathfrak{p}^*$ auf $\mathfrak{R}_K^*$ übereinstimmt.

Wenn der Konstantenkörper k nicht der k. Z. ist, werden wir nun die Riemannsche Fläche des algebraischen Funktionenkörpers K durch diese Eigenschaften (A), (B) definieren. Für diesen Zweck setzen wir bezl. k folgende Axiome voraus:

Axiom 1. Der Konstantenkörper k ist algebraisch abgeschlossen.

Axiom 2. k ist ein topologischer Körper[1]: in k ist eine Topologie so gegeben, dass 1) k ein Hausdorffscher Raum mit dem ersten Abzählbarkeitsaxiom (kurz: 1. A. A.) ist, und 2) aus $a_i \to a$, $b_i \to b$ die Konvergenzen $a_i \pm b_i \to a \pm b$, $a_i b_i \to ab$ und $a_i b_i^{-1} \to ab^{-1}$ $(b \neq 0)$ folgen.

Wir definieren den Funktionswert $z(\mathfrak{p})$ von $z \in K$ bei $\mathfrak{p}$ durch die Eigenschaft (B), so dass $z(\mathfrak{p})=a_0$, wenn bei (1) $r \geqq 0$ ist, und $z(\mathfrak{p})=\infty$, wenn $r<0$. Wir denken uns die absolute Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_K$ von K, die aus allen Primdivisoren von K besteht, und definieren die Topologie von $\mathfrak{R}_K$ folgenderweise:

Def. 1. Auf $\mathfrak{R}_K$ gilt die Konvergenz $\mathfrak{p}_i \to \mathfrak{p}$ dann und nur dann, wenn für alle z mit $z(\mathfrak{p}) \neq \infty$ die Konvergenzen $z(\mathfrak{p}_i) \to z(\mathfrak{p})$ in k gelten.

Damit wird $\mathfrak{R}_K$ nach diesem Konvergenzbegriff als Konvergenzraum[2] bestimmt. Wenn k der k. Z. ist, so ist unsere Definition der Topologie von $\mathfrak{R}_K$ mit der klassischen äquivalent. Denn nach den Eigenschaften (A), (B) ist die eineindeutige Zuordnung $\mathfrak{p}^* \to \mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}_K^*$ auf $\mathfrak{R}_K$ eineindeutig stetig, und aus der Kompaktheit von $\mathfrak{R}_K^*$ folgt die Homöomorphie von $\mathfrak{R}_K^*$ und $\mathfrak{R}_K$.

Bekannt sind folgende Eigenschaften von $\mathfrak{R}_K$, wenn k der k. Z. ist: (C) $\mathfrak{R}_K$ ist ein Hausdorffscher Raum. (D) Eine passend gewählte Umgebung jedes Punktes $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{R}_K$ ist mit einer Umgebung von 0 auf k

---

1) Vgl. D. van Dantzig, Studien over topologische algebra, Diss. Groningen, 1931. S. Kakutani, Über eine Metrisation der topologischen Gruppen. Proc. **12** (1936). Darin wird gezeigt, dass k mit Axiom 2 sogar metrisierbar ist.

2) Vgl. Alexandroff-Hopf, Topologie I. 1935.

homöomorph. (E) $\mathfrak{R}_K$ ist zusammenhängend. (F) $\mathfrak{R}_K$ ist metrisierbar. (G) $\mathfrak{R}_K$ ist kompakt.

Nun gelten im allgemeinen folgende Sätze:

Satz 1. *$\mathfrak{R}_K$ ist ein Hausdorffscher Raum mit dem 1. A. A.*

Satz 2. *Wenn das Geschlecht von K Null ist, so gilt in $\mathfrak{R}_K$ die Eigenschaft (D); und k ist mit $\mathfrak{R}_K - \mathfrak{p}$ homöomorph, wo $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{R}_K$ bedeutet.*

Im folgenden setzen wir jedoch ein weiteres Axiom voraus:

Axiom 3. *Aus $a_i b_i \to 0$ folgt $b_i \to 0$, wenn $\{a_i\}$ eine Fundamentalfolge, die keine Nullfolge ist, oder eine absolut divergente Folge (eine Folge, die keine Fundamentalteilfolge besitzt) ist.*

Dieses Axiom gilt in folgenden Fällen: 1) wenn die Topologie von k durch die Bewertung (oder durch die Pseudobewertung, welche die direkte Summe von gewöhnlichen Bewertungen ist) definiert ist, oder 2) wenn k im Kleinen kompakt ist. Denn $b_i \to 0$ folgt im Falle 1) aus $|a_i b_i| \to 0$, $|a_i| > \varepsilon > 0$, und im Falle 2) daraus, dass in k alle Fundamentalfolgen konvergieren und $a_i^{-1} \to 0$, wenn $\{a_i\}$ eine absolut divergente Folge ist.

Es lässt sich auch leicht zeigen, dass Axiom 3 damit äquivalent ist, dass aus $a_i b_i \to 0$ die Existenz der Nullteilfolge $a_{n_i} \to 0$ oder $b_{m_i} \to 0$ von $\{a_i\}$ bzw. $\{b_i\}$ gefolgert wird.

Aus Axiom 3 ergeben sich folgende Sätze 3–6:

Satz 3. *$\mathfrak{R}_K$ hat die Eigenschaft (D), also ist es im Kleinen mit k homöomorph. Es ist ferner ein regulärer Raum.*

Satz 4. *$\mathfrak{R}_K$ ist dann und nur dann zusammenhängend (kurz. z. h.), wenn k z. h. ist. Wenn k nicht z. h. ist, ist $\mathfrak{R}_K$ soger nulldimensional.*

Satz 5. *$\mathfrak{R}_K$ erfüllt das 2. A. A. dann und nur dann, wenn k auch dasselbe Axiom erfüllt.*

Aus den Sätzen 3, 5 und dem Urysohn-Tychonoffschen Metrisationssatz folgt das

Korollar. *Wenn k das 2. A. A. erfüllt, dann ist $\mathfrak{R}_K$ metrisierbar.*

Satz 6. *$\mathfrak{R}_K$ ist dann und nur dann kompakt (oder im Kleinen kompakt), wenn k im Kleinen kompakt ist.*

Wenn k der k. Z. ist, gelten Axiome 1, 2, 3 und die Bedingungen von Sätzen 4–6, somit werden die Eigenschaften (C), (D), (E), (F), (G) für den k. Z. aufs neue bewiesen.

Nach D. van Dantzig[1] ist der k. Z. der einzige Körper, der die Axiome 1, 2 erfüllt und sogar im Kleinen kompakt ist. Also folgt aus Satz 6 das

Korollar. *$\mathfrak{R}_K$ ist dann und nur dann kompakt, wenn der Konstantenkörper k der komplexe Zahlkörper ist.*

2. Def. 2. Ω sei ein Unterkörper von K mit demselben Konstantenkörper k, und ein Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K sei ein Teiler eines Primdivisors $\mathfrak{p}^*$ von Ω. Wir schreiben dann $\mathfrak{p}^* = P_{K\Omega}(\mathfrak{p})$[2]; und bezeichnen mit $U_{K\Omega}(\mathfrak{p}^*)$ die Gesamtheit derjenigen Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K, die Teiler des Primdivisors $\mathfrak{p}^*$ von Ω sind. Im ähnlichen Sinne sollen die Be-

1) Vgl. D. van Dantzig, loc. cit.

2) Wir nennen die Zuordnung $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^*$ eine Projektion.

zeichnungen $P_{K\Omega}(\mathfrak{A})$, $U_{K\Omega}(\mathfrak{A}^*)$ gebraucht werden, wenn $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}^*$ eine Menge von Punkten von $\mathfrak{R}_K$ bzw. $\mathfrak{R}_\Omega$ bedeuten.

Hilfssatz 1. Es sei $K \supset \Omega$. Die Projektion $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^* = P_{K\Omega}(\mathfrak{p})$ bildet alsdann $\mathfrak{R}_K$ auf $\mathfrak{R}_\Omega$ stetig ab.

Beweis. Wenn $z^* \in \Omega$ ist, wird $z^*(\mathfrak{p}) = z^*(\mathfrak{p}^*)$. Also folgt $\mathfrak{p}_i^* \to \mathfrak{p}^*$ auf $\mathfrak{R}_\Omega$ aus $\mathfrak{p}_i \to \mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{R}_K$, w. z. b. w.

Hilfssatz 2. Es sei σ ein Automorphismus von K, der k elementweise festbleiben lässt. Dann bildet die Zuordnung $\mathfrak{p} \leftrightarrow \mathfrak{p}^\sigma$ $\mathfrak{R}_K$ auf sich selbst homöomorph ab.

Beweis. Es ist $z(\mathfrak{p}) = z^\sigma(\mathfrak{p}^\sigma)$; also folgt $\mathfrak{p}_i^\sigma \to \mathfrak{p}^\sigma$ aus $\mathfrak{p}_i \to \mathfrak{p}$ und umgekehrt, w. z. b. w.

Hilfssatz 3. Wir können abzählbar viele Elemente z_n aus der Maximalordnung $K_\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p}$, die die Menge aller Elemente $z \in K$ mit $z(\mathfrak{p}) \neq \infty$ bedeutet, so wählen, dass $\mathfrak{p}_i \to \mathfrak{p}$ aus $z_n(\mathfrak{p}_i) \to z_n(\mathfrak{p})$ $(n=1, 2, \dots)$ folgt.

Beweis. Es sei $K = k\,(x_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(r)})$ $(x_0, y_0^{(1)}, \dots, y^{(r)}$ aus $K_\mathfrak{p})$, und t ein Primelement für $\mathfrak{p}$. Es seien ferner $x_0(\mathfrak{p}) = \alpha_0$, $y_0^{(s)}(\mathfrak{p}) = \beta_0^{(s)}$, $x_n = (x_{n-1} - \alpha_{n-1}) \cdot t^{-1}$, $\alpha_n = x_n(\mathfrak{p})$, $y_n^{(s)} = (y_{n-1}^{(s)} - \beta_{n-1}^{(s)})\, t^{-1}$, $y_n^{(s)}(\mathfrak{p}) = \beta_0^{(s)}$ $(n=1, 2, \dots;$ $s=1, \dots, r)$. Dabei liegen alle x_n, $y_n^{(s)}$ in $K_\mathfrak{p}$, da aus $z(\mathfrak{p}) = 0$ $zt^{-1} \in K_\mathfrak{p}$ folgt; also sind α_n, $\beta_n^{(s)} \neq \infty$. Wir zeigen nun, dass solche t, x_n, $y_n^{(s)}$ $(n=0, 1, 2, \dots;\ s=1, \dots, r)$ für $\{z_n\}$ gesetzt werden können. Es gibt in der Tat ein j, so dass $\alpha_j \neq 0$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_{j-1} = 0$. Es sei nun $t(\mathfrak{p}_i) \to 0$, $x_n(\mathfrak{p}_i) \to \alpha_n$, $y_n^{(s)}(\mathfrak{p}_i) \to \beta_n^{(s)}$, und z sei ein beliebiges Element aus K. Dann ist $z = g(x_0)^{-1} \cdot f(x_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(r)})$, wobei g und f Polynome in x_0 bzw. in $x_0, y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(r)}$ sind. Wir setzen $g(x_0) = (x_0 - \alpha_0)^h \cdot g_1(x_0)$, $(g_1(x_0), x_0 - \alpha_0) = 1$; und ersetzen x_0 und $y_0^{(s)}$ durch $x_0 = \alpha_0 + \dots + \alpha_{hj} t^{hj} + x_{hj+1} t^{hj+1}$ bzw. $y_0^{(s)} = \beta_0^{(s)} + \dots + \beta_{hj}^{(s)} t^{hj} + y_{hj+1}^{(s)} t^{hj+1}$.

Dann wird z in der Form dargestellt:

$$z = g_1(x_0)^{-1} \cdot x_j^{-h} \Big(F(t) \cdot t^{-hj} + G(t, x_{hj+1}, y_{hj+1}^{(1)}, \dots, y_{hj+1}^{(r)}) \Big)\,, \tag{2}$$

wo $F=0$ oder ein Polynom in t höchstens vom Grad $hj-1$, und G ein Polynom in t, x_{hj+1}, $y_{hj+1}^{(1)}, \dots, y_{hj+1}^{(r)}$ ist. Wenn $z(\mathfrak{p}) \neq \infty$, so muss $F=0$ und $z(\mathfrak{p}_i) \to g_1(\alpha_0)^{-1} \cdot \alpha_j^{-h} \cdot G(0, \alpha_{hj+1}, \beta_{hj+1}^{(1)}, \dots, \beta_{hj+1}^{(r)}) = z(\mathfrak{p})$, w. z. b. w.

Wir beweisen nun einen Teil des Satzes 1, dass $\mathfrak{R}_K$ ein topologischer Raum ist. Dass $\mathfrak{R}_K$ die Axiome I, II, IV von Kuratowski[1] erfüllt, ist ohne weiteres klar, also kommt es nur auf das dritte Axiom an. Es genügt dafür zu zeigen, dass aus $\mathfrak{p}_{ij} \to \mathfrak{p}_i$ $(j \to \infty)$, und $\mathfrak{p}_i \to \mathfrak{p}$ $(i \to \infty)$ für passend gewählten Index $j = j\,(i)$ $\mathfrak{p}_{ij} \to \mathfrak{p}$ $(i \to \infty)$ folgt. Aber da in k das 1. A. A. gilt, können wir durch das Diagonalverfahren $j = j\,(i)$ so wählen, dass für abzählbar viele Elemente $\{z_n\}$ aus $K_\mathfrak{p}$ $z_n(\mathfrak{p}_{ij}) \to z_n(\mathfrak{p})$ $(i \to \infty)$ gelten. Hilfssatz 3 zeigt, dass daraus $\mathfrak{p}_{ij} \to \mathfrak{p}$ folgt, w. z. b. w.

Nunmehr beweisen wir den Satz 2. K habe das Geschlecht 0, also sei $K = k(x)$. Jedes Primhauptideal $(x-a)$, $a \in k$ von $k\,[x]$ ist eindeutig einem Primdivisor $\mathfrak{p}_a$ von K mit $x(\mathfrak{p}_a) = a$ zugeordnet und der einzige Ausnahmeprimdivisor mit $x(\mathfrak{p}) = \infty$ sei mit $\mathfrak{p}_\infty$ bezeichnet. Es gilt dann

1) Vgl. z. B. Alexandroff-Hopf, loc. cit.

$f(x)(\mathfrak{p}_a)=f(a)$, also ist die Zuordnung $\mathfrak{p}_a \leftrightarrow a$ von $\mathfrak{R}_K-\mathfrak{p}_\infty$ und k homöomorph, wie leicht zu zeigen ist. Wir können x so wählen, dass der gegebene $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}_\infty$ wird. Aus dieser homomorphen Zuordnung von k und $\mathfrak{R}_K-\mathfrak{p}_\infty$ folgt, dass $\mathfrak{R}_K$ ein Hausdorffscher Raum mit dem 1. A. A. ist, und die Eigenschaft (D) hat, weil $\mathfrak{R}_K$ schon ein topologischer Raum ist. w. z. b. w.

Um das Trennungsaxiom im allgemeinen zu beweisen, seien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ zwei gegebene Primdivisoren und x sei so gewählt, dass $x(\mathfrak{p}) \neq x(\mathfrak{q})$ ist. Dann wird $\mathfrak{p}^*=P_{K\Omega}(\mathfrak{p}) \neq \mathfrak{q}^*=P_{K\Omega}(\mathfrak{q})$ auf $\mathfrak{R}_\Omega$, wo $\Omega=k(x)$ ist. Wählen wir nach Satz 2 disjunkte Umgebungen $\mathfrak{U}^*(\mathfrak{p}^*)$ und $\mathfrak{U}^*(\mathfrak{q}^*)$ auf $\mathfrak{R}_\Omega$, so sind nach Hilfssatz 1 die gewünschten Umgebungen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ auf $\mathfrak{R}_K$ $U_{K\Omega}(\mathfrak{U}^*(\mathfrak{p}^*))$ und $U_{K\Omega}(\mathfrak{U}^*(\mathfrak{q}^*))$.

Um zu beweisen, dass $\mathfrak{R}_K$ das 1. A. A. erfüllt, fassen wir $\mathfrak{R}_K$ als Umgebungsraum auf: bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}(\mathfrak{p}_0, z, \mathfrak{u})$ die Gesamtheit aller Punkte $\mathfrak{p}$ mit $z(\mathfrak{p}) \in \mathfrak{u}(z(\mathfrak{p}_0))$, $z(\mathfrak{p}_0) \neq \infty$, wo $\mathfrak{u}$ eine Umgebung in k bedeutet, so ist $\mathfrak{U}(\mathfrak{p}_0, z, \mathfrak{u})$ eine offene Menge von $\mathfrak{R}_K$ nach Satz 2 und Hilfssatz 1. Wenn wir uns $\mathfrak{R}_K$ als Umgebungsraum mit dem Umgebungssystem $\left\{\prod_{i=1}^{r} \mathfrak{U}(\mathfrak{p}, z_i, \mathfrak{u}_i)\right\}$ $\left(z_i(\mathfrak{p}) \neq \infty\right)$ denken, so ist die Kongruenzbegriff in $\mathfrak{R}_K$ mit Def. 1 identisch, wie leicht zu sehen ist; um sogar topologische Äquivalenz zu bestätigen, genügt zu zeigen, dass in diesem Fall das 1. A. A. besteht. Das folgt aus (2), wenn wir als abzählbar viele Umgebungen um $\mathfrak{p}$ die Durchschnitte endlich vieler $\mathfrak{U}(\mathfrak{p}, z_n, \mathfrak{u}_m^{(n)})$ wählen, wo z_n genauso wie im Hilfssatz 3 gewählt sind und $\mathfrak{u}_m^{(n)}$ die abzählbar viele Umgebungen um $z_n(\mathfrak{p}) \neq \infty$ in k sind, die mit allen Umgebungen um $z_n(\mathfrak{p})$ äquivalent sind. Also ist somit zugleich bewiesen, dass $\mathfrak{R}_K$ von Def. 1 das 1. A. A. erfüllt. Damit ist Satz 1 vollständig erledigt.

Im folgenden setzen wir Axiom 3 voraus. Alsdann gilt

Hilfssatz 4. Es sei K eine endliche separable Erweiterung von Ω. Wenn $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene Menge auf $\mathfrak{R}_K$ ist, so ist auch $\mathfrak{A}^*=P_{K\Omega}(\mathfrak{A})$ eine abgeschlossene Menge auf $\mathfrak{R}_\Omega$.

Aus diesem Hilfssatz, den wir in Nr. 3 beweisen werden, ergibt sich der Satz 3: Beweis, dass $\mathfrak{R}_K$ die Eigenschaft (D) hat. Nach dem Riemann-Rochschen Satz können wir x so wählen, dass $K/\Omega\left(\Omega=k(x)\right)$ separabel ist und x nur Pole erster Ordnung und insbesondere den gegebenen Primdivisor $\mathfrak{p}$ als Pol hat. Es sei K'/Ω der kleinste K enthaltende galoissche Körper, dann zerfällt $\mathfrak{p}^*=P_{K\Omega}(\mathfrak{p})$ in K' voll. Also ist nun genug zu zeigen, dass, wenn K'/Ω galoissch ist und $\mathfrak{p}^*$ aus $\mathfrak{R}_\Omega$ in K' vollzerfällt, eine genügend kleine Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{R}_{K'}$ durch die Projektion der Umgebung $\mathfrak{U}^*=P_{K'\Omega}(\mathfrak{U})$ von $\mathfrak{p}^*$ homöomorph zugeordnet ist, weil die Eigenschaft (D) im Falle vom Geschlecht 0 sicherlich besteht. Nach Hilfssätzen 1 und 4 ist hierfür nur die Eineindeutigkeit der Zuordnung $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^*$ der Projektion in $\mathfrak{U}$ zu fordern. Angenommen, dass das nicht gälte, also $\mathfrak{U}_i$ wenigstens zwei Primdivisoren $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}_i^{\sigma_i}$ (σ_i ist ein nicht identischer Automorphismus aus der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ von K'/Ω) enthielte, wo $\mathfrak{U}_i$ die abzählbar vielen

Umgebungen bedeutet, die mit allen Umgebungen von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{R}_{K'}$ äquivalent sind. Aber es gibt mindestens ein nicht identisches Element σ aus $\mathfrak{G}$, die unendlich oft als σ_{n_i} vorkommt. Aus $\mathfrak{p}_{n_i}, \mathfrak{p}^{\sigma}_{n_i} \in \mathfrak{U}_{n_i}$ würde folgen: $\mathfrak{p}_{n_i} \to \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}^{\sigma}_{n_i} \to \mathfrak{p}$, was mit $\mathfrak{p}_{n_i} \to \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}^{\sigma}_{n_i} \to \mathfrak{p}^{\sigma} \neq \mathfrak{p}$ widerspricht, w. z. b. w.

Analog können wir aus der Regularität von k folgern, dass $\mathfrak{R}$ regulär ist.

Beweis des Satzes 4. Zunächst zeigen wir, dass k nicht z. h. ist, wenn $\mathfrak{R}_K$ nicht z. h. ist. Wir können x so wählen, dass K/Ω $\big(\Omega = k(x)\big)$ separabel ist und x nur einen Pol hat. Es sei K'/Ω eine K enthaltende galoissche Erweiterung, deren Galoisgruppe mit $\mathfrak{G} = \{\tau_i\}$ bezeichnet werde. Nach der Voraussetzung ist $\mathfrak{R}_K$ nicht z. h., also ist $\mathfrak{R}_K = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \frown \mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{A} \neq 0$, $\mathfrak{B} \neq 0$, wobei $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ beide offen sind, und $\mathfrak{p}$ sei in $\mathfrak{A}$ enthalten. Falls $\mathfrak{A}' = \prod\limits_i U_{K'K}(\mathfrak{A})^{\tau_i}$, $\mathfrak{B}' = \sum\limits_i U_{K'K}(\mathfrak{B})^{\tau_i}$, dann ist $\mathfrak{R}_{K'} = \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{A}' \frown \mathfrak{B}' = 0$, wobei $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ offen, $\mathfrak{A}'^{\tau_i} = \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'^{\tau_i} = \mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{A}' \supset U_{K'K}(\mathfrak{p})$, also $\mathfrak{A}' \neq 0$. Daraus folgt $\mathfrak{R}_{\Omega} = \mathfrak{A}^* + \mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{A}^* \frown \mathfrak{B}^* = 0$, $\mathfrak{A}^* \neq 0$, $\mathfrak{B}^* \neq 0$, wo $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$ offen sind, wenn wir $\mathfrak{A}^* = P_{K'\Omega}(\mathfrak{A}')$, $\mathfrak{B}^* = P_{K'\Omega}(\mathfrak{B}')$ setzen. Da k mit $\mathfrak{R}_{\Omega} - \mathfrak{p}_{\infty}$ homöomorph ist, ist also k nicht z. h. Nun sei k nicht z. h. Dann ist k sogar nulldimensional. Daraus ergibt sich analogerweise mit Hilfe des Satzes 3, dass $\mathfrak{R}_K$ auch nulldimensional ist, w. z. b. w.

Die Sätze 5, 6 lassen sich unter Zuhilfsnahme des Satzes 3 und des Hilfssatzes 4 ähnlicherweise erledigen.

3. Zum Schluss beweisen wir Hilfssatz 4. Wir können o. B. d. A annehmen, dass K/Ω galoissch ist. Denn andernfalls sei $K' \supset K$ und K'/Ω galoissch. Dann wird $\mathfrak{A}^* = P_{K'\Omega}\big(U_{K'K}(\mathfrak{A})\big)$ abgeschlossen. Wenn K/Ω galoissch ist, so ist genug zu zeigen, dass aus $\mathfrak{p}^*_i \to \mathfrak{p}^*_0$ auf $\mathfrak{R}_{\Omega}$ für passend gewählte Teilfolge $\{r_i\}$ aus $\{i\}$ $\big(\mathfrak{p}_{r_i}$ aus $U_{K\Omega}(\mathfrak{p}^*_{r_i})$, $\mathfrak{p}_0$ aus $U_{K\Omega}(\mathfrak{p}^*_0)\big)$ $\mathfrak{p}_{r_i} \to \mathfrak{p}_0$ folgt. Denn für Primdivisoren $\mathfrak{p}^*_i$ aus $\mathfrak{A}^*$ gehören unendlich viele Primdivisoren aus $\{\mathfrak{p}^{\sigma}_{r_i}\}$ zu $\mathfrak{A}$, wenn σ ein passendes Element aus der Galoisgruppe von K/Ω bedeutet. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{p}^{\sigma}_{r_i} \to \mathfrak{p}^{\sigma}_0$ gehört $\mathfrak{p}^{\sigma}_0$ zu $\mathfrak{A}$, und also $\mathfrak{p}^*_0$ zu $\mathfrak{A}^*$, womit die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}^*$ gezeigt ist. Es sei also $K = \Omega(z) = k(x, y, z)$, dessen Galoisgruppe $\mathfrak{G} = \{\sigma_j\}$ $(\sigma_1 = 1)$, und $(K:\Omega) = m$. Wir zeigen zunächst, dass $\mathfrak{p}_{r_i}$ sich so wählen lassen, dass für abzählbar viele Elemente $\{z_n\}$ aus $K_{\mathfrak{p}^*} = K_{\mathfrak{p}^{\sigma_1}} \frown \cdots \frown K_{\mathfrak{p}^{\sigma_m}}$ $z_n(\mathfrak{p}_{r_i}) \to \bar{z}_n \in k$ gelten. Dazu sei die zu z_n gehörige irreduzible Gleichung in Ω $f_n(x, y, z_n) = 0$, dessen Grad in z_n gleich s_n sei. Dann wird

$$f_n(x, y, t)^{\frac{m}{s_n}} = \prod_{j=1}^{m} (t - z_n^{\sigma_j}), \quad f_n\big(x(\mathfrak{p}^*_i), y(\mathfrak{p}^*_i), t\big)^{\frac{m}{s_n}} = \prod_{j=1}^{m} \big(t - z_n(\mathfrak{p}'^{\sigma_j}_i)\big),$$

wobei $\mathfrak{p}'_i$ ein Primdivisor aus $U_{K\Omega}(\mathfrak{p}^*_i)$ ist. Nach Axiom 3 gilt $z_n(\mathfrak{p}_{n_i}) \to z_n(\mathfrak{p}_0)$ für geeignet gewählte Teilfolge $\{n_i\}$ aus $\{i\}$ $\big(\mathfrak{p}_{n_i}$ aus $\mathfrak{p}'^{\sigma_j}_{n_i}$ $(j = 1, \ldots, m)\big)$, da $f_n\big(x(\mathfrak{p}^*_i), y(\mathfrak{p}^*_i), z_n(\mathfrak{p}_0)\big) \to 0$ $(i \to \infty)$. Wenn wir

$$f_n\left(x(\mathfrak{p}^*_{n_i}),\, y(\mathfrak{p}^*_{n_i}),\, t\right)^{\frac{m}{s_n}} \cdot \left(t-z_n(\mathfrak{p}_{n_i})\right)^{-1} \quad \text{statt} \quad f_n\left(x(\mathfrak{p}^*_i),\, y(^*_i),\, t\right)^{\frac{m}{s_n}}, \ldots$$

setzen, können wir in gleicher Weise[1] die Teilfolge $\{m_i\}$ aus $\{n_i\}$ so wählen, dass die Konvergenzen $z_n(\mathfrak{p}^{\sigma_j}_{m_i}) \to \bar{z}^{(j)}_n$ $(j=1, \ldots, m)$ bestehen, wo $\bar{z}^{(j)}_n$ im ganzen mit $z_n(\mathfrak{p}^{\sigma_j}_0)$ $(j=1, \ldots, m)$ identisch sind. Nach dem Diagonalverfahren gelten durch die nochmalige Auswahl $\{r_i\}$ aus $\{m_i\}$, die geeignete Auswahl $\mathfrak{p}_{r_i}$ aus $U_{K\mathfrak{Q}}(\mathfrak{p}^*_{r_i})$ und die Umordnung der Oberindizes j von $\bar{z}^{(j)}_n$ die Konvergenzen $z_n(\mathfrak{p}^{\sigma_j}_{r_i}) \to \bar{z}^{(j)}_n$ $(j=1, \ldots, m;\ n=1, 2, \ldots)$, wo auch $\bar{z}^{(j)}_n$ im ganzen mit $z_n(\mathfrak{p}^{\sigma_j}_0)$ identisch sind.

Nun erledigen wir zwei spezielle Fälle, daraus folgt ersichtlich der Beweis des allgemeinen Falls. 1) Alle $\mathfrak{p}^{\sigma_j}_0$ $(j=1, \ldots, m)$ sind von einander verschieden. Es sei nun t ein Primelement für $\mathfrak{p}_0$ und $t(\mathfrak{p}^{\sigma_j}_0)=1$ $(j \neq 1)$. Dann können wir u so wählen, dass $K=k(x, t^{\sigma_1}, \ldots, t^{\sigma_m}, u)$, $u \in K_{\mathfrak{p}*}$ und $u(\mathfrak{p}_0)=u(\mathfrak{p}^{\sigma_j}_0)$ $(j=1, \ldots, m)$. Wir nehmen im Hilfssatz 3 statt $y^{(1)}_0, \ldots, y^{(r)}_0, t^{\sigma_1}, \ldots, t^{\sigma_m}, u$, und statt oben gebrauchte $\{z_n\}$, wie im Hilfssatz 3, $x_n, y^{(s)}_n$ $(s=1, \ldots, m+1;\ n=0, 1, \ldots)$. Es sei $t(\mathfrak{p}_{r_i}) \to 0$. Es bleibt dann noch übrig zu zeigen, dass $x_n(\mathfrak{p}_{r_i}) \to x_n(\mathfrak{p}_0)=a_n \in k$ und $y^{(s)}_n(\mathfrak{p}_{r_i}) \to y^{(s)}_n(\mathfrak{p}_0)=\beta^{(s)}_n \in k$. Für $n=0$ gilt es natürlich. Angenommen, dass dies schon für $n<h$ gelten. Es sei nun z. B. $t^{\sigma_2}=y_0=\sum_{i=0}^{h-1}\beta_i t^i+y_h \cdot t^h$, $\beta_i \in k$. Da $\beta_{h-1}=y_{h-1}(\mathfrak{p}_0)$ ist, gehört $y_h=(y_{h-1}-\beta_h)\cdot t^{-1}$ zu $K_{\mathfrak{p}*}$, weil in $K_{\mathfrak{p}*}$ aus $y(\mathfrak{p}_0)=0$ $yt^{-1} \in K_{\mathfrak{p}*}$ folgt. Da $y_h(\mathfrak{p}^{\sigma_l}_{r_i}) \to 1-\sum_{i=0}^{h-1}\beta_i=y_h(\mathfrak{p}^{\sigma_l}_0)$ $(\sigma_l \neq \sigma_1, \sigma_2^{-1})$ und $y_h(\mathfrak{p}^{\sigma_2^{-1}}_{r_i}) \to \sum_{i=0}^{h-1}\beta_i=y_h(\mathfrak{p}^{\sigma_2^{-1}}_0)$, konvergiert $y_h(\mathfrak{p}_{r_i}) \to \beta_k=y_h(\mathfrak{p}_0)$ w. z. b. w.

2) Alle $\mathfrak{p}^{\sigma_j}_0$ $(j=1, \ldots, m)$ sind einander gleich. Da $z_n(\mathfrak{p}^{\sigma_j}_0)=z_n(\mathfrak{p}_0)=\bar{z}^{(j)}_m$ ist, erhalten wir den Beweis ohne weiteres.

---

1) Hier brauchen wir die folgende Tatsache: es sei $f_n(x)=x^r+a^{(r-1)}_n x^{r-1}+\cdots+a^{(0)}_n$, $f_n(\omega_n)=0$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ und $a^{(j)}_n \to a^{(j)}_0$, $\omega_n \to \omega_0$ $(n \to \infty;\ j=0, 1, \ldots, r-1)$; es sei ferner $f_n(x)\cdot(x-\omega_n)^{-1}=x^{r-1}+b^{(r-2)}_n x^{r-2}+\cdots+b^{(0)}_n$, so ist $b^{(j)}_n \to b^{(j)}_0$ $(n \to \infty;\ j=0, \ldots, r-2)$.