63. *Sur les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann.*

Par Kentaro YANO.
Institut de Mathématiques, Université Impériale de Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1939.)

Le but de cette Note est de trouver les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann et d'en tirer quelques conséquences.

1. Considérons un espace de Riemann V_n dont la forme fondamentale est

$$ds^2=g_{\mu\nu}du^\mu du^\nu\,, \qquad (\lambda, \mu, \nu, \ldots=1, 2, 3, \ldots, n)\,. \tag{1.1}$$

Quand on effectue une transformation conforme du tenseur fondamental

$$\bar{g}_{\mu\nu}=\rho^2 g_{\mu\nu}\,, \tag{1.2}$$

les symboles de Christoffel

$$\left\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\right\}=\frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(g_{\alpha\mu,\nu}+g_{\alpha\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\alpha}) \tag{1.3}$$

où la virgule désigne la dérivée partielle par rapport à u^ν, se transforment en $\overline{\left\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\right\}}$ suivant les formules

$$\overline{\left\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\right\}}=\left\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\right\}+\delta^\lambda_\mu\rho_\nu+\delta^\lambda_\nu\rho_\mu-g^{\lambda\alpha}\rho_\alpha g_{\mu\nu}\,, \tag{1.4}$$

où

$$\rho_\nu=(\log\rho)_{,\nu}\,, \tag{1.5}$$

et le tenseur de Riemann-Christoffel

$$R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=\left\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\right\}_{,\omega}-\left\{{}^{\lambda}_{\mu\omega}\right\}_{,\nu}+\left\{{}^{\alpha}_{\mu\nu}\right\}\left\{{}^{\lambda}_{\alpha\omega}\right\}-\left\{{}^{\alpha}_{\mu\omega}\right\}\left\{{}^{\lambda}_{\alpha\nu}\right\} \tag{1.6}$$

en $\bar{R}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$ d'après

$$\bar{R}^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-\rho_{\mu\nu}\delta^\lambda_\omega+\rho_{\mu\omega}\delta^\lambda_\nu-g_{\mu\nu}\rho_{\alpha\omega}g^{\alpha\lambda}+g_{\mu\omega}\rho_{\alpha\nu}g^{\alpha\lambda} \tag{1.7}$$

où

$$\rho_{\mu\nu}=\rho_{\mu,\nu}-\rho_\alpha\left\{{}^{\alpha}_{\mu\nu}\right\}-\rho_\mu\rho_\nu+\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta g_{\mu\nu}\,. \tag{1.8}$$

En éliminant $\rho_{\mu\nu}$ de (1.7), l'on trouve que

$$C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-\frac{1}{n-2}(R_{\mu\nu}\delta^\lambda_\omega-R_{\mu\omega}\delta^\lambda_\nu+g_{\mu\nu}R^{\lambda}_{\cdot\omega}-g_{\mu\omega}R^{\lambda}_{\cdot\nu})$$
$$+\frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{\mu\nu}\delta^\lambda_\omega-g_{\mu\omega}\delta^\lambda_\nu)\,, \tag{1.9}$$

où

$$R_{\mu\nu}=R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\lambda}\,, \quad R^{\lambda}_{\cdot\nu}=g^{\lambda\mu}R_{\mu\nu}\,, \quad R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\,, \tag{1.10}$$

est un tenseur invariant par rapport à la transformation conforme (1.2). C'est ce qu'on appelle le tenseur conforme de courbure de M. Weyl.

2. Considérons ensuite un sous-espace V_m dans V_n défini par les équations

$$u^\lambda = u^\lambda(\dot{u}^1, \dot{u}^2, \dots, \dot{u}^m), \tag{2.1}$$

alors le tenseur fondamental de V_m est donné par

$$g_{jk} = B_j^{\cdot\mu} B_k^{\cdot\nu} g_{\mu\nu} \qquad (i, j, k, \dots = \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dots, \dot{m}) \tag{2.2}$$

où

$$B_j^{\cdot\mu} = \frac{\partial u^\mu}{\partial u^j} \tag{2.3}$$

est un tenseur mixte et invariant par rapport à la transformation conforme (1.2).

Les symboles de Christoffel de V_m étant

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{1}{2} g^{ia}(g_{aj,k} + g_{ak,j} - g_{jk,a}) \tag{2.4}$$

le tenseur de courbure d'Euler-Schouten $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$ est défini par

$$H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = B_{j;k}^{\cdot\lambda} = B_{j,k}^{\cdot\lambda} + B_j^{\cdot\alpha} \left\{ {\lambda \atop \alpha\nu} \right\} B_k^{\cdot\nu} - B_a^{\cdot\lambda} \left\{ {a \atop jk} \right\} \tag{2.5}$$

où le point-virgule désigne la dérivée covariante.

On sait que le tenseur $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$ est symétrique par rapport aux deux indices j et k, et que si l'on regarde $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$ comme des vecteurs contrevariants de V_n par rapport à l'indice λ, ils sont orthogonaux à V_m.

Donc si l'on désigne par $B_A^{\cdot\lambda}$ $(A, B, \dots = \dot{m}+\dot{1}, \dot{m}+\dot{2}, \dots, \dot{n})$ $n-m$ vecteurs unitaires et orthogonaux entre eux qui se trouvent dans les directions normales à V_m, on peut écrire $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$ comme il suit

$$H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = H_{jkA} B_A^{\cdot\lambda}. \tag{2.6}$$

Quand on effectue une transformation conforme de la forme (1.2), le tenseur $B_j^{\cdot\mu}$ étant invariant, les g_{jk} se transforment en $\bar{g}_{jk}$ suivant les formules

$$\bar{g}_{jk} = \rho^2 g_{jk}, \tag{2.7}$$

par conséquent, les symboles de Christoffel $\left\{ {i \atop jk} \right\}$ en $\overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}}$ d'après

$$\overline{\left\{ {i \atop jk} \right\}} = \left\{ {i \atop jk} \right\} + \delta_j^i \rho_k + \delta_k^i \rho_j - g^{ia} \rho_a g_{jk}, \tag{2.8}$$

où

$$\rho_k = (\log \rho)_{,k}. \tag{2.9}$$

Donc, en tenant compte de (1.4) et de (2.8), on trouve que la loi de transformation du tenseur $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$ par rapport à (1.2) est donnée par

$$\bar{H}_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} - \rho_A B_A^{\cdot\lambda} g_{jk}, \tag{2.10}$$

où

$$\rho_A = \rho_\nu B_A^{\cdot\nu}. \tag{2.11}$$

En contractant g^{jk}, on tire de (2.10)

$$\rho^2 \bar{g}^{jk} \bar{H}_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = g^{jk} H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} - m\rho_A B_A^{\cdot\lambda} ,$$

et par suite

$$\bar{H}_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} - \frac{1}{m} \bar{g}^{ab} \bar{H}_{ab}^{\cdot\cdot\lambda} \bar{g}_{jk} = H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} - \frac{1}{m} g^{ab} H_{ab}^{\cdot\cdot\lambda} g_{jk} . \tag{2.12}$$

(2.12) nous montre que le tenseur

$$M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} - \frac{1}{m} g^{ab} H_{ab}^{\cdot\cdot\lambda} g_{jk} \tag{2.13}$$

reste invariant pendant la transformation (1.2). Le point où le tenseur $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$ s'annule s'appelle ombilic. Si $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = 0$ sur tout l'espace V_m, nous appelons V_m sous-espace totalement ombiliqué. Il est évident que ce sont les propriétés conformes des espaces de Riemann.

3. Les équations de Gauss pour le sous-espace V_m s'écrivent

$$R^{i}_{\cdot jkh} = B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh} R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} + H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} H^{i}_{\cdot h\lambda} - H_{jh}^{\cdot\cdot\lambda} H^{i}_{\cdot k\lambda} \tag{3.1}$$

où

$$R^{i}_{\cdot jkh} = \left\{ {i \atop jk} \right\}_{,h} - \left\{ {i \atop jh} \right\}_{,k} + \left\{ {a \atop jk} \right\} \left\{ {i \atop ah} \right\} - \left\{ {a \atop jh} \right\} \left\{ {i \atop ak} \right\} , \tag{3.2}$$

$$B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh} = B^{i}_{\cdot\lambda} B_j^{\cdot\mu} B_k^{\cdot\nu} B_h^{\cdot\omega} , \quad B^{i}_{\cdot\lambda} = g^{ij} g_{\lambda\mu} B_j^{\cdot\mu} , \quad H^{i}_{\cdot h\lambda} = g^{ik} g_{\lambda\mu} H_{kh}^{\cdot\cdot\mu} . \tag{3.3}$$

Dans ce Paragraphe, nous allons chercher les équations conformes correspondant aux équations de Gauss (3.1). Pour cet effet, contractons $B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh}$ à (1.9), alors on aura

$$\begin{aligned} B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh} R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} &- \frac{1}{n-2} (B^{\mu\nu}_{jk} R_{\mu\nu} \delta^i_h - B^{\mu\omega}_{jh} R_{\mu\omega} \delta^i_k \\ &+ g_{jk} B^{i\omega}_{\lambda h} R^{\lambda}_{\cdot\omega} - g_{jh} B^{i\nu}_{\lambda k} R^{\lambda}_{\cdot\nu}) \\ &+ \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_{jk} \delta^i_h - g_{jh} \delta^i_k) \end{aligned} \tag{3.4}$$

en vertu des relations

$$B^{\mu\nu}_{jk} g_{\mu\nu} = g_{jk} , \qquad B^{i}_{\cdot\lambda} B_h^{\cdot\lambda} = \delta^i_h , \tag{3.5}$$

où

$$B^{\mu\nu}_{jk} = B_j^{\cdot\mu} B_k^{\cdot\nu} , \qquad B^{i\omega}_{\lambda h} = B^{i}_{\cdot\lambda} B_h^{\cdot\omega} . \tag{3.6}$$

En substituant (3.1) dans (3.4) et en remarquant que $B^{i\omega}_{\lambda h} R^{\lambda}_{\cdot\omega} = g^{ia} B^{\lambda\omega}_{ah} R_{\lambda\omega}$, on a

$$\begin{aligned} B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = R^{i}_{\cdot jkh} &- H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} H^{i}_{\cdot h\lambda} + H_{jh}^{\cdot\cdot\lambda} H^{i}_{\cdot k\lambda} \\ &- \frac{1}{n-2} (B^{\mu\nu}_{jk} R_{\mu\nu} \delta^i_h - B^{\mu\omega}_{jh} R_{\mu\omega} \delta^i_k + g_{jk} g^{ia} B^{\lambda\omega}_{ah} R_{\lambda\omega} - g_{jh} g^{ia} B^{\lambda\nu}_{ak} R_{\lambda\nu}) \\ &+ \frac{R}{(n-1)(n-2)} (g_{jk} \delta^i_h - g_{jh} \delta^i_k) . \end{aligned} \tag{3.7}$$

En contractant par rapport à i et h dans (3.7), on trouve

$$(3.8)\qquad B^{\mu\nu}_{jk} B^{\omega}_{\lambda} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = R_{jk} - H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} H^{a}_{\cdot a\lambda} + H_{ja}^{\cdot\cdot\lambda} H^{a}_{\cdot k\lambda}$$
$$- \frac{1}{n-2}[(m-2)B^{\mu\nu}_{jk}R_{\mu\nu} + g_{jk}B^{\mu\nu}R_{\mu\nu}] + \frac{(m-1)g_{jk}R}{(n-1)(n-2)},$$

où

$$(3.9)\qquad B^{\omega}_{\lambda} = B^{a}_{\cdot\lambda} B^{\cdot\omega}_{a}, \quad R_{jk} = R^{a}_{\cdot jka}, \quad B^{\mu\nu} = B^{\mu\nu}_{ab} g^{ab}.$$

En contractant encore g^{jk} à (3.8), on obtient

$$B^{\mu\nu}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = g^{ab}R_{ab} - H^{b\cdot\lambda}_{\cdot b} H^{a}_{\cdot a\lambda} + H^{b\cdot\lambda}_{\cdot a} H^{a}_{\cdot b\lambda}$$
$$- \frac{2(m-1)}{n-2}B^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \frac{m(m-1)R}{(n-1)(n-2)},$$

d'où

$$(3.10)\qquad -\frac{B^{\mu\nu}R_{\mu\nu}}{n-2} = \frac{1}{2(m-1)}(B^{\mu\nu}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - g^{ab}R_{ab}$$
$$+ H^{b\cdot\lambda}_{\cdot b} H^{a}_{\cdot a\lambda} - H^{b\cdot\lambda}_{\cdot a} H^{a}_{\cdot b\lambda}) - \frac{mR}{2(n-1)(n-2)},$$

où nous avons posé

$$H^{b\cdot\lambda}_{\cdot a} = g^{bc} H_{ca}^{\cdot\cdot\lambda}.$$

(3.10) étant obtenu, en substituant (3.10) dans (3.8), on trouve

$$B^{\mu\nu}_{jk} B^{\omega}_{\lambda} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = R_{jk} - H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} H^{a}_{\cdot a\lambda} + H_{ja}^{\cdot\cdot\lambda} H^{a}_{\cdot k\lambda} - \frac{m-2}{n-2}B^{\mu\nu}_{jk}R_{\mu\nu}$$
$$+ \frac{g_{jk}}{2(m-1)}(B^{\mu\nu}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - g^{ab}R_{ab} + H^{b\cdot\lambda}_{\cdot b} H^{a}_{\cdot a\lambda} - H^{b\cdot\lambda}_{\cdot a} H^{a}_{\cdot b\lambda})$$
$$- \frac{mg_{jk}R}{2(n-1)(n-2)} + \frac{(m-1)g_{jk}R}{(n-1)(n-2)},$$

d'où

$$(3.11)\qquad -\frac{1}{n-2}B^{\mu\nu}_{jk}R_{\mu\nu} = \frac{1}{m-2}[B^{\mu\nu}_{jk} B^{\omega}_{\lambda} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - R_{jk} + H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} H^{a}_{\cdot a\lambda} - H_{ja}^{\cdot\cdot\lambda} H^{a}_{\cdot k\lambda}]$$
$$- \frac{g_{jk}}{2(m-1)(m-2)}[B^{\mu\nu}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - g^{ab}R_{ab} + H^{b\cdot\lambda}_{\cdot b} H^{a}_{\cdot a\lambda} - H^{b\cdot\lambda}_{\cdot a} H^{a}_{\cdot b\lambda}]$$
$$- \frac{g_{jk}R}{2(n-1)(n-2)}.$$

En substituant enfin (3.11) dans (3.7), on obtient

$$(3.12)\qquad R^{i}_{\cdot jkh} - \frac{1}{m-2}(R_{jk}\delta^{i}_{h} - R_{jh}\delta^{i}_{k} + g_{jk}R^{i}_{\cdot h} - g_{jh}R^{i}_{\cdot k})$$
$$+ \frac{g^{ab}R_{ab}}{(m-1)(m-2)}(g_{jk}\delta^{i}_{h} - g_{jh}\delta^{i}_{k})$$
$$= B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - \frac{1}{m-2}(B^{\mu\nu}_{jk}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\delta^{i}_{h} - B^{\mu\nu}_{jh}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\delta^{i}_{k}$$
$$+ g_{jk}B^{\mu\nu}_{ah}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g^{ai} - g_{jh}B^{\mu\nu}_{ak}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g^{ai})$$
$$+ \frac{B^{\mu\nu}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}}{(m-1)(m-2)}(g_{jk}\delta^{i}_{h} - g_{jh}\delta^{i}_{k})$$

$$+H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}H^{i}_{\cdot h\lambda}-H_{jh}^{\cdot\cdot\lambda}H^{i}_{\cdot k\lambda}-\left[\frac{1}{m-2}(H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}H^{a}_{\cdot a\lambda}-H_{ja}^{\cdot\cdot\lambda}H^{a}_{\cdot k\lambda})\right.$$

$$\left.-\frac{g_{jk}}{2(m-1)(m-2)}(H^{b\cdot\lambda}_{\cdot b}H^{a}_{\cdot a\lambda}-H^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}H^{a}_{\cdot b\lambda})\right]\delta^{i}_{h}$$

$$+\left[\frac{1}{m-2}(H_{jh}^{\cdot\cdot\lambda}H^{a}_{\cdot a\lambda}-H_{ja}^{\cdot\cdot\lambda}H^{a}_{\cdot h\lambda})\right.$$

$$\left.-\frac{g_{jh}}{2(m-1)(m-2)}(H^{b\cdot\lambda}_{\cdot b}H^{a}_{\cdot a\lambda}-H^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}H^{a}_{\cdot b\lambda})\right]\delta^{i}_{k}$$

$$-g_{jk}\left[\frac{1}{m-2}(H^{i\cdot\lambda}_{\cdot h}H^{a}_{\cdot a\lambda}-H^{i\cdot\lambda}_{\cdot a}H^{a}_{\cdot h\lambda})\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}(H^{b\cdot\lambda}_{\cdot b}H^{a}_{\cdot a\lambda}-H^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}H^{a}_{\cdot b\lambda})\delta^{i}_{h}\right]$$

$$+g_{jh}\left[\frac{1}{m-2}(H^{i\cdot\lambda}_{\cdot k}H^{a}_{\cdot a\lambda}-H^{i\cdot\lambda}_{\cdot a}H^{a}_{\cdot k\lambda})\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2(m-1)(m-2)}(H^{b\cdot\lambda}_{\cdot b}H^{a}_{\cdot a\lambda}-H^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}H^{a}_{\cdot b\lambda})\delta^{i}_{k}\right].$$

Le premier membre de (3.12) nous donne le tenseur conforme de courbure du sous-espace V_m. Nous le désignerons par $C^{i}_{\cdot jkh}$.

En utilisant le tenseur conforme $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$ donné par (2.13), on peut encore écrire (3.12) sous la forme suivante:

$$(3.14)\qquad C^{i}_{\cdot jkh}=\left[B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-\frac{1}{m-2}(B^{\mu\nu}_{jk}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\delta^{i}_{h}-B^{\mu\nu}_{jh}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\delta^{i}_{k}\right.$$

$$+g_{jk}B^{\mu\nu}_{ah}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g^{ai}-g_{jh}B^{\mu\nu}_{ak}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g^{ai})$$

$$\left.+\frac{B^{\mu\nu}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}}{(m-1)(m-2)}(g_{jk}\delta^{i}_{h}-g_{jh}\delta^{i}_{k})\right]$$

$$+\left[M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}M^{i}_{\cdot h\lambda}-M_{jh}^{\cdot\cdot\lambda}M^{i}_{\cdot k\lambda}+\frac{1}{m-2}(M_{ja}^{\cdot\cdot\lambda}M^{a}_{\cdot k\lambda}\delta^{i}_{h}\right.$$

$$-M_{ja}^{\cdot\cdot\lambda}M^{a}_{\cdot h\lambda}\delta^{i}_{k}+g_{jk}M^{i\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot h\lambda}-g_{jh}M^{i\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot k\lambda})$$

$$\left.-\frac{M^{a\cdot\lambda}_{\cdot b}M^{b}_{\cdot a\lambda}}{(m-1)(m-2)}(g_{jk}\delta^{i}_{h}-g_{jh}\delta^{i}_{k})\right]$$

où

$$M^{i\cdot\lambda}_{\cdot j}=g^{ia}M_{aj}^{\cdot\cdot\lambda},\qquad M^{i}_{\cdot j\lambda}=g^{ia}g_{\lambda\mu}M_{aj}^{\cdot\cdot\mu},$$

ce sont les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann.

Le premier membre et le premier terme dans le deuxième membre étant invariants conformes, il est évident que le deuxième terme l'est aussi. Nous le désignerons par $N^{i}_{\cdot jkh}$ et l'appellerons le tenseur conforme de courbure de V_m relatif à V_n.

Si le sous-espace est totalement ombiliqué, c'est-à-dire si l'on a $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=0$ sur tous les points de V_m, le tenseur $N^{i}_{\cdot jkh}$ s'annule.

On sait que si un espace riemannien $V_n (n > 3)$ est conforme à un espace euclidien, son tenseur conforme de courbure de M. Weyl s'annule et vice versa, donc on a immédiatement, de (3.14), les théorèmes suivants:

Si le tenseur conforme de courbure $N^{i}_{.jkh}$ d'un sous-espace V_m relatif à un espace ambiant de Riemann conforme à un espace euclidien s'annule, V_m est nécessairement conforme à un espace euclidien $(n > m > 3)$.

En particulier,

Si un espace V_m dans un espace de Riemann V_n conforme à un espace euclidien est totalement ombiliqué, il est nécessairement conforme à un espace euclidien $(n > m > 3)$.