61. *Sur la théorie des hypersurfaces dans un espace à connexion conforme.*

Par Kentaro YANO et Yosio MUTÔ.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., July 12, 1940.)

Dans un Mémoire récent, un des présents auteurs[1] a étudié la théorie des espaces à connexion conforme à l'aide du repère mobile naturel de M. E. Cartan et a examiné en détail la relation entre la théorie de M. E. Cartan[2] et celle de l'Ecole de Princeton.[3] Il a étudié aussi la théorie des courbes, en particulier, la théorie des circonférences généralisées[4] dans cet espace à connexion conforme.

Nous avons continué cette étude en considérant hypersurfaces et courbes sur ces hypersurfaces dans l'espace à connexion conforme. Dans cette Note, nous en exposerons quelques résultats. Le détail sera publié ailleurs.

§ 1. Considérons une variété à connexion conforme. Dans chaque espace conforme tangent à un point courant A_0, on prend un repère mobile $(n+2)$-sphérique formé avec deux points A_0 et A_∞ et n sphères A_i $(i, j, k, \ldots=1, 2, 3, \ldots, n)$ passant par A_0 et A_∞ de manière qu'on ait

$$(1.1) \qquad A_0A_0=A_\infty A_\infty=A_0A_i=A_\infty A_i=0\,, \quad A_0A_\infty=-1 \text{ et } A_jA_k=g_{jk}$$

où les g_{jk} sont, en général, les fonctions des coordonnées u^i.

Cela étant, la connexion conforme est donnée par les équations de la forme

$$(1.2) \qquad dA_B=\omega_B^C A_C \qquad (A, B, C, \ldots=0, 1, 2, \ldots, n, \infty)$$

où les ω_B^C sont les formes de Pfaff satisfaisant aux relations

$$(1.3) \qquad \begin{gathered} \omega_0^\infty=\omega_\infty^0=0\,, \quad \omega_0^i g_{ij}-\omega_j^\infty=0\,, \quad \omega_\infty^i g_{ij}-\omega_j^0=0\,, \\ \omega_0^0+\omega_\infty^\infty=0\,, \quad \omega_j^i g_{ik}+\omega_k^i g_{ij}=dg_{jk}\,. \end{gathered}$$

Or, on peut facilement démontrer que le repère mobile $(n+2)$-sphérique $[A_0, A_i, A_\infty]$ peut être choisi de manière à avoir

$$(1.4) \qquad \omega_0^0=p_i du^i=du^0, \qquad \omega_0^i=du^i.$$

On appelle repère mobile semi-naturel un repère $[A_0, A_i, A_\infty]$ satisfaisant aux conditions (1.4). La connexion conforme étant complètement déterminée par

1) K. Yano: Sur la théorie des espaces à connexion conforme. Journal of the Faculty of Science. Imperial University of Tokyo. Section I. Tome **4** (1939), 1-59.

2) E. Cartan: Les espaces à connexion conforme. Annales de la Soc. Polonaise de Math. **2** (1923), 171-221.

3) T. Y. Thomas: Differential invariants of generalized spaces. Cambridge University Press. 1935.

4) K. Yano: Sur les circonférences généralisées dans un espace à connexion conforme. Proc. **14** (1938), 329-332.

$$\text{(1.5)} \qquad \Pi^A_{B0}=\delta^A_B \quad \text{et} \quad \Pi^A_{Bk}=\omega^A_{Bk}-\delta^A_B p_k \quad \text{où} \quad \omega^A_{Bk}du^k=\omega^A_B\,,$$

nous appelons Π^A_{B0} et Π^A_{Bk} les composantes de la connexion conforme.

Cela étant, les équations (1.3) et (1.5) nous donnent, dans le cas de sans torsion,

$$\text{(1.6)} \qquad \begin{cases} \Pi^0_{jk}=\omega^0_{jk}\,, & \Pi^0_{\infty k}=\Pi^\infty_{0k}=0\,, \\ \Pi^i_{jk}=\left\{{i \atop jk}\right\}-\delta^i_j p_k-\delta^i_k p_j+g^{ia}p_a g_{jk}\,, & \Pi^i_{0k}=\delta^i_k\,, \\ \Pi^\infty_{jk}=g_{jk}\,, & \Pi^\infty_{\infty k}=-2p_k\,, \\ \Pi^i_{\infty k}=g^{ij}\Pi^0_{jk}\,, & \Pi^A_{B0}=\delta^A_B\,, \quad \Pi^A_{0i}=\delta^A_i\,, \end{cases}$$

où les $\left\{{i \atop jk}\right\}$ sont les symboles de Christoffel formés avec les g_{jk}.

En tenant compte du fait que le repère $(n+2)$-sphérique $[A_0, A_i, A_\infty]$ admet deux sortes de transformation, transformation du tenseur fondamental et transformation du point de l'infini, données respectivement par

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \bar{A}_0=\lambda A_0\,, \\ \bar{A}_i=\lambda A_i\,, \\ \bar{A}_\infty=\dfrac{1}{\lambda}A_\infty\,, \end{cases} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{cases} \bar{A}_0=A_0\,, \\ \bar{A}_i=\phi_i A_0+A_i\,, \\ \bar{A}_\infty=\dfrac{1}{2}g_{ij}\phi^i\phi^j A_0+g^{ij}\phi_i A_j+A_\infty\,, \end{cases}$$

on voit que nous pouvons uniquement déterminer un repère semi-naturel particulier satisfaisant aux conditions supplémentaires suivantes:

$$\text{(1.7)} \qquad p_k=0\,, \qquad \Pi^i_{ik}=0\,.$$

Dans ce cas, nous avons l'expression suivante pour les composantes de la connexion

$$\text{(1.8)} \qquad \begin{cases} \Pi^0_{0k}=\Pi^\infty_{\infty k}=\Pi^0_{\infty k}=\Pi^\infty_{0k}=0\,, \qquad \Pi^i_{0j}=\delta^i_j\,, \\ \Pi^i_{jk}=\dfrac{1}{2}G^{ia}(G_{aj,k}+G_{ak,j}-G_{jk,a})\,, \\ \Pi^\infty_{jk}=G_{jk}\,, \qquad \Pi^0_{jk}=G_{ij}\Pi^i_{\infty k}\,, \end{cases}$$

où $G_{ij}=g_{ij}/|g_{ab}|^{\frac{1}{n}}$ et la virgule désigne la dérivée partielle ordinaire.

Nous appelons repère naturel le repère semi-naturel satisfaisant aux conditions supplémentaires (1.7). Le tenseur de courbure étant défini par

$$\text{(1.9)} \qquad \Omega^A_{Bkh}=\Pi^A_{Bk,h}-\Pi^A_{Bh,k}+\Pi^C_{Bk}\Pi^A_{Ch}-\Pi^C_{Bh}\Pi^A_{Ck}\,,$$

le tenseur $C^i_{jkh}=\Omega^i_{jkh}-\delta^i_j\Omega^0_{0kh}$ joue un rôle très important dans la théorie des espaces à connexion conforme. Quand le tenseur C^i_{jkh} satifait à la condition $C^i_{jki}=0$, la connexion sera dite normale. Si la connexion est normale, on peut choisir, parmi les repères mobiles semi-naturels, un repère prévilégié pour lequel les composantes de la connexion seront

$$(1.10)\quad \begin{cases} \Pi^0_{0i}=\Pi^\infty_{\infty i}=\Pi^0_{\infty i}=\Pi^\infty_{0i}=0\,, \quad \Pi^i_{0i}=\delta^i_j \\ \Pi^i_{jk}=\left\{ {i \atop jk} \right\}=\dfrac{1}{2}g^{ia}(g_{aj,k}+g_{ak,j}-g_{jk,a})\,, \qquad \Pi^\infty_{jk}=g_{jk}\,, \\ \Pi^0_{jk}=-\dfrac{R_{jk}}{n-2}+\dfrac{g_{jk}R}{2(n-1)(n-2)}\,, \\ \Pi^i_{\infty k}=-\dfrac{R^i{}_k}{n-2}+\dfrac{\delta^i_k R}{2(n-1)(n-2)}\,, \end{cases}$$

où $\qquad R_{jk}=R^i_{jki}\,, \qquad R^i{}_k=g^{ij}R_{jk}\,, \qquad R=g^{ij}R_{ij}\,,$

et $\quad R^i_{jkh}=\left\{ {i \atop jk} \right\}_{,h}-\left\{ {i \atop jh} \right\}_{,k}+\left\{ {a \atop jk} \right\}\left\{ {i \atop ah} \right\}-\left\{ {a \atop jh} \right\}\left\{ {i \atop ak} \right\}.$

Nous appelons ce repère le repère de M. O. Veblen.[1)]

§ 2. Une hypersurface C_{n-1} dans un espace C_n à connexion conforme peut être représentée par les équations paramétriques de la forme

$$u^i=u^i\,(u^{\dot 1}, u^{\dot 2}, \dots, u^{\dot n-\dot 1})$$

ou plus simplement par

$$(2.1)\qquad u^i=u^i\,(u^a) \qquad (a, \beta, \gamma, \dots = \dot 1, \dot 2, \dots, \dot n-\dot 1)\,.$$

Sur chaque point de l'hypersurface, nous définissions un repère mobile $[A_{\dot 0}, A_a, A_{\dot n}, A_{\dot\infty}]$ de l'hypersurface par les équations

$$(2.2)\quad \begin{cases} A_{\dot 0}=a^{-\frac{1}{n-1}}A_0\,, \\ A_a=a^{-\frac{1}{n-1}}\left(\dfrac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^a}A_0+\dfrac{\partial u^i}{\partial u^a}A_i\right), \\ A_{\dot n}=N^0A_0+N^iA_i\,, \\ A_{\dot\infty}=a^{\frac{1}{n-1}}\Bigg[\dfrac{1}{2}\left\{(N^0)^2+a^{-\frac{2}{n-1}}G^{a\beta}\dfrac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^a}\dfrac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\beta}\right\}A_0 \\ \qquad\qquad +\left\{N^0N^i+a^{-\frac{2}{n-1}}G^{a\beta}\dfrac{\partial u^i}{\partial u^a}\dfrac{\partial \log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\beta}\right\}A_i+A_\infty\Bigg] \end{cases}$$

où les N^i sont les fonctions de u^a telles que

$$G_{jk}\frac{\partial u^j}{\partial u^a}N^k=0\,, \qquad G_{jk}N^jN^k=1\,,$$

et a est le déterminant défini par $\quad a=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u^i}{\partial u^a} \\ N^i \end{vmatrix}\,,$

N^0 étant une fonction arbitraire. Alors, on voit facilement que les sphères $A_{\dot 0}$, A_a, $A_{\dot n}$ et $A_{\dot\infty}$ satisfont aux relations

$$(2.3)\quad \begin{cases} A_{\dot 0}A_{\dot 0}=A_{\dot\infty}A_{\dot\infty}=A_{\dot 0}A_a=A_{\dot\infty}A_a=0\,, \quad A_{\dot 0}A_{\dot n}=A_aA_{\dot n}=A_{\dot\infty}A_{\dot n}=0\,, \\ A_{\dot n}A_{\dot n}=1\,, \quad A_{\dot 0}A_{\dot\infty}=-1\,, \quad A_aA_\beta=G_{a\beta}=a^{-\frac{2}{n-1}}\dfrac{\partial u^i}{\partial u^a}\dfrac{\partial u^j}{\partial u^\beta}G_{ij}\,. \end{cases}$$

1) O. Veblen: Formalism for conformal geometry. Proc. Nat. Acad. Sci. **21** (1935), 168–173.

Si la connexion conforme de l'espace ambiant est normal, en partant du reprère mobile $[A_0, A_i, A_\infty]$ de M. O. Veblen, nous définissions le repère mobile de l'hypersurface par

$$\text{(2.4)}\qquad \begin{cases} A_{\dot{0}} = A_0 \\ A_a = \dfrac{\partial u^i}{\partial u^a} A_i \\ A_{\dot{n}} = B^0 A_0 + B^i A_i \\ A_{\dot{\infty}} = \dfrac{1}{2}(B^0)^2 A_0 + B^0 B^i A_i + A_\infty , \end{cases}$$

où B^i est un vecteur contrevariant défini sur l'hypersurface par

$$g_{jk}\frac{\partial u^j}{\partial u^a} B^k = 0 , \qquad g_{jk} B^j B^k = 1 ,$$

et B^0 est une fonction arbitraire de u^a. Alors, il sera facilement vérifié que les $A_{\dot{0}}$, A_a, $A_{\dot{n}}$ et $A_{\dot{\infty}}$ satisfont aux équations

$$A_{\dot{0}} A_{\dot{0}} = A_{\dot{\infty}} A_{\dot{\infty}} = A_{\dot{0}} A_a = A_{\dot{\infty}} A_a = 0 , \quad A_{\dot{0}} A_{\dot{n}} = A_a A_{\dot{n}} = A_{\dot{\infty}} A_{\dot{n}} = 0 ,$$

$$A_{\dot{n}} A_{\dot{n}} = 1 , \quad A_{\dot{0}} A_{\dot{\infty}} = -1 , \quad A_a A_\beta = g_{a\beta} = \frac{\partial u^i}{\partial u^a}\frac{\partial u^j}{\partial u^\beta} g_{ij} .$$

§ 3. Dans le paragraphe précédent, nous avons défini les repères mobiles sur l'hypersurface.

Mais, la fonction N^0 (B^0 dans le cas du repère mobile de M. O. Veblen) reste encore arbitraire, nous allons déterminer cette fonction en posant une condition intrinsèque.

Pour déterminer la fonction N^0, nous allons procéder de la manière suivante:

$dA_{\dot{0}}$ et $dA_{\dot{n}}$ étant donnés par

$$dA_{\dot{0}} = a^{-\frac{1}{n-1}}(d \log a^{-\frac{1}{n-1}} A_0 + du^i A_i)$$
$$dA_{\dot{n}} = (dN^0 + \Pi^0_{jk} N^j du^k) A_0 + (N^0 du^i + dN^i + \Pi^i_{hk} N^h du^k) A_i + G_{jk} N^j du^k A_\infty ,$$

nous avons

$$\text{(3.1)}\qquad dA_{\dot{0}} dA_{\dot{n}} = a^{\frac{1}{n-1}}(N^0 G_{a\beta} - a^{-\frac{2}{n-1}} N_{a\beta})\, du^a du^\beta$$

où

$$\text{(3.2)}\qquad N_{a\beta} = -\frac{\partial u^j}{\partial u^a}\left(\frac{\partial N_j}{\partial u^a} - \Pi^i_{jk} N_i \frac{\partial u^k}{\partial u^\beta}\right), \quad N_j = G_{ij} N^i.$$

Nous allons choisir la fonction N^0 de manière que la moyenne de $dA_{\dot{0}} dA_{\dot{n}}$ par rapport à du^a s'annule, soit

$$a^{\frac{1}{n-1}}(N^0 G_{a\beta} - a^{-\frac{2}{n-1}} N_{a\beta}) G^{a\beta} = 0 .$$

d'où

$$N^0 = \frac{a^{-\frac{2}{n-1}}}{n-1} G^{a\beta} N_{a\beta} .$$

En substituant cette valeur de N^0 dans (3.1), on obtient

$$(3.3)\quad dA_{\dot 0}dA_{\dot n}=-M_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta \quad \text{où} \quad M_{\alpha\beta}=a^{-\frac{1}{n-1}}\left(N_{\alpha\beta}-\frac{G^{\gamma\delta}N_{\gamma\delta}}{n-1}G_{\alpha\beta}\right).$$

Le tenseur symétrique $M_{\alpha\beta}$ va jouer le rôle du second tenseur fondamental.

La fonction N^0 étant ainsi déterminée, nous allons calculer les composantes de la connexion par rapport au repère $[A_{\dot 0}, A_\alpha, A_{\dot n}, A_{\dot\infty}]$. On aura d'abord les équations de la forme

$$(3.4)\quad \begin{cases} dA_{\dot 0}= & du^\alpha A_\alpha, \\ dA_\alpha=\Pi^{\dot 0}_{\alpha\beta}du^\beta A_{\dot 0}+\Pi^{\gamma}_{\alpha\beta}du^\beta A_\gamma+\Pi^{\dot n}_{\alpha\beta}du^\beta A_{\dot n}+\Pi^{\dot\infty}_{\alpha\beta}du^\beta A_{\dot\infty}, \\ dA_{\dot n}=\Pi^{\dot 0}_{\dot n\beta}du^\beta A_{\dot 0}+\Pi^{\gamma}_{\dot n\beta}du^\beta A_\gamma, \\ dA_{\dot\infty}= & \Pi^{\gamma}_{\dot\infty\beta}du^\beta A_\gamma+\Pi^{\dot n}_{\dot\infty\beta}du^\beta A_{\dot n}. \end{cases}$$

En tenant compte des équations (2.2), on obtient l'expression suivante pour les composantes de la connexion conforme par rapport au repère $[A_{\dot 0}, A_\alpha, A_{\dot n}, A_{\dot\infty}]$,

$$(3.5)\quad \begin{cases} \Pi^{\dot 0}_{\alpha\beta}=\Pi^{0}_{jk}\dfrac{\partial u^j}{\partial u^\alpha}\dfrac{\partial u^k}{\partial u^\beta}+\dfrac{\partial^2\log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}-\dfrac{\partial\log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\gamma}\Pi^{\gamma}_{\alpha\beta} \\ \qquad +\dfrac{\partial\log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\alpha}\dfrac{\partial\log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\beta} \\ \qquad -\dfrac{1}{2}G^{\gamma\delta}\dfrac{\partial\log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\gamma}\dfrac{\partial\log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\delta}G_{\alpha\beta} \\ \qquad -\left(a^{-\frac{2}{n-1}}\dfrac{G^{\gamma\delta}N_{\gamma\delta}}{n-1}\right)N_{\alpha\beta}, \\ \Pi^{\gamma}_{\alpha\beta}=a^{-\frac{1}{n-1}}B^{\gamma}_{\cdot i}\left(\Pi^{i}_{jk}\dfrac{\partial u^j}{\partial u^\alpha}\dfrac{\partial u^k}{\partial u^\beta}+\dfrac{\partial^2 u^i}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}\right)+\delta^\gamma_\alpha\dfrac{\partial\log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\beta} \\ \qquad +\delta^\gamma_\beta\dfrac{\partial\log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\alpha}-G^{\gamma\delta}\dfrac{\partial\log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\delta}G_{\alpha\beta}, \\ \Pi^{\dot 0}_{\dot n\beta}=\dfrac{1}{n-1}\dfrac{\partial a^{-\frac{1}{n-1}}G^{\gamma\delta}N_{\gamma\delta}}{\partial u^\beta}+a^{\frac{1}{n-1}}\Pi^{0}_{jk}N^j\dfrac{\partial u^k}{\partial u^\beta} \\ \qquad +a^{-\frac{1}{n-1}}\dfrac{\partial\log a^{-\frac{1}{n-1}}}{\partial u^\alpha}G^{\alpha\gamma}N_{\gamma\beta}, \\ \Pi^{\dot n}_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta},\quad \Pi^{\dot\infty}_{\alpha\beta}=G_{\alpha\beta},\quad \Pi^{\alpha}_{\dot n\beta}=-G^{\alpha\gamma}M_{\gamma\beta}, \\ \Pi^{\gamma}_{\dot\infty\beta}=G^{\gamma\alpha}\Pi^{\dot 0}_{\alpha\beta},\quad \Pi^{\dot n}_{\dot\infty\beta}=\Pi^{\dot 0}_{\dot n\beta}, \end{cases}$$

où $\qquad B^{\gamma}_{\cdot i}=G^{\gamma\delta}G_{ij}a^{-\frac{1}{n-1}}\dfrac{\partial u^j}{\partial u^\delta}.$

Une considération géometrique nous conduit à définir une connexion conforme induite sur l'hypersurface par

$$\begin{cases}\delta A_{\dot 0}=dA_{\dot 0}-(dA_{\dot 0}A_{\dot n})A_{\dot n}, \\ \delta A_a=dA_a-(dA_aA_{\dot n})A_{\dot n}, \\ \delta A_{\dot\infty}=dA_{\dot\infty}-(dA_{\dot\infty}A_{\dot n})A_{\dot n},\end{cases} \text{soit,} \begin{cases}\delta A_{\dot 0}= du^a A_a, \\ \delta A_a=\Pi^{\dot 0}_{a\beta}du^\beta A_{\dot 0}+\Pi^{\gamma}_{a\beta}du^\beta A_\gamma+\Pi^{\dot\infty}_{a\beta}du^\beta A_{\dot\infty}, \\ \delta A_{\dot\infty}= \Pi^{\gamma}_{\dot\infty\beta}du^\beta A_\gamma.\end{cases}$$

Dans le cas de la connexion normale, on peut prendre le repère de M. O. Veblen pour l'espace ambiant et un repère analogue défini par (2.4) pour l'hypersurface. Pour le repère de cette sorte, les composantes de la connexion seront données par

$$(3.6)\quad \begin{cases}\Pi^{\dot 0}_{a\beta}=\Pi^0_{jk}B^{\cdot j}_{a}B^{\cdot k}_{\beta}-\dfrac{1}{n-1}g^{\gamma\delta}H_{\gamma\delta}H_{a\beta}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1}g^{\gamma\delta}H_{\gamma\delta}\right)^2 g_{a\beta}, \\ \Pi^{\gamma}_{a\beta}=B^{\gamma}_{\cdot i}\left(\{{}^{i}_{jk}\}B^{\cdot j}_{a}B^{\cdot k}_{\beta}+\dfrac{\partial^2 u^i}{\partial u^a\partial u^\beta}\right), \\ \Pi^{\dot 0}_{\dot n\beta}=\dfrac{\partial}{\partial u^\beta}\left(\dfrac{1}{n-1}g^{\gamma\delta}H_{\gamma\delta}\right)+\Pi^0_{jk}B^{j}B^{\cdot k}_{\beta}, \\ \Pi^{\dot n}_{a\beta}=M_{a\beta},\quad \Pi^{\dot\infty}_{a\beta}=g_{a\beta},\quad \Pi^{a}_{\dot n\beta}=-g^{a\gamma}M_{\gamma\beta}, \\ \Pi^{\gamma}_{\dot\infty\beta}=g^{\gamma a}\Pi^{\dot 0}_{a\beta},\quad \Pi^{\dot n}_{\dot\infty\beta}=\Pi^{\dot 0}_{\dot n\beta},\end{cases}$$

où

$$\begin{cases}B^{\cdot j}_{a}=\dfrac{\partial u^j}{\partial u^a},\quad B^{\gamma}_{\cdot i}=g^{\gamma\delta}g_{ij}B^{\cdot j}_{\delta},\quad H_{a\beta}=H^{\cdot\cdot i}_{a\beta}B^{j}g_{ij},\quad M_{a\beta}=M^{\cdot\cdot i}_{a\beta}B^{j}g_{ij}, \\ H^{\cdot\cdot i}_{a\beta}=\dfrac{\partial^2 u^i}{\partial u^a\partial u^\beta}+\{{}^{i}_{jk}\}B^{\cdot j}_{a}B^{\cdot k}_{\beta}-B^{\cdot i}_{\gamma}\{{}^{\gamma}_{a\beta}\}, \\ M^{\cdot\cdot i}_{a\beta}=H^{\cdot\cdot i}_{a\beta}-\dfrac{1}{n-1}g^{\gamma\delta}H^{\cdot\cdot i}_{\gamma\delta}g_{a\beta}.\end{cases}$$

§ 4. Les tenseurs de courbure de l'hypersurface peuvent être définis par

$$(4.1)\quad \Omega^{P}_{Q\gamma\delta}=\Pi^{P}_{Q\gamma,\,\delta}-\Pi^{P}_{Q\delta,\,\gamma}+\Pi^{R}_{Q\gamma}\Pi^{P}_{R\delta}-\Pi^{R}_{Q\delta}\Pi^{P}_{R\gamma}$$
$$(P, Q, R, \dots=\dot 0, \dot 1, \dots, \dot{n}-\dot 1, \dot\infty).$$

En cherchant les relations entre Ω^{A}_{Bkh} et $\Omega^{P}_{Q\gamma\delta}$, nous obtiendrons, dans le cas de la connexion générale (le repère étant naturel),

$$(4.2)\quad \Omega^{a}_{\beta\gamma\delta}=B^{a}_{\cdot i}B^{\cdot j}_{\beta}\Omega^{i}_{jkh}\frac{\partial u^k}{\partial u^\gamma}\frac{\partial u^h}{\partial u^\delta}+M_{\beta\gamma}M^{a}_{\cdot\delta}-M_{\beta\delta}M^{a}_{\cdot\gamma},$$

$$(4.3)\quad N_iB^{\cdot j}_{\beta}\Omega^{i}_{jkh}\frac{\partial u^k}{\partial u^\gamma}\frac{\partial u^h}{\partial u^\delta}-M_{\beta\gamma;\,\delta}+M_{\beta\delta;\,\gamma}=0,$$

où

$$B^{a}_{\cdot i}=G^{a\beta}G_{ij}B^{\cdot j}_{\beta},\quad B^{\cdot i}_{\beta}=a^{-\frac{1}{n-1}}\frac{\partial u^i}{\partial u^\beta},\quad M^{a}_{\cdot\delta}=G^{a\gamma}M_{\gamma\delta},$$

$$M_{P\gamma;\,\delta}=M_{P\gamma,\,\delta}-M_{Q\gamma}\Pi^{Q}_{P\delta}-M_{P\varepsilon}\Pi^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\quad\text{et}\quad (A_P dA_{\dot n})=-M_{P\gamma}du^\gamma.$$

Les équations (4.2) et (4.3) sont respectivement les équations de Gauss et de Codazzi pour notre hypersurface.

Dans le cas de la connexion normale, en prenant le repère de M. O. Veblen, nous aurons, au lieu de (4.2) et (4.3),

$$\Omega^{a}_{\beta\gamma\delta}=B^{a}_{\cdot i}B^{\cdot j}_{\beta}B^{\cdot k}_{\gamma}B^{\cdot h}_{\delta}\Omega^{i}_{jkh}+M_{\beta\gamma}M^{a}_{\cdot\delta}-M_{\beta\delta}M^{a}_{\cdot\gamma}\,, \tag{4.4}$$

$$B_{i}B^{\cdot j}_{\beta}B^{\cdot k}_{\gamma}B^{\cdot h}_{\delta}\Omega^{i}_{jkh}-M_{\beta\gamma\delta}+M_{\beta\delta\gamma}=0\,, \tag{4.5}$$

où
$$B^{a}_{\cdot i}=g^{a\beta}g_{ij}B^{\cdot j}_{\beta}\,,\quad B^{\cdot i}_{\beta}=\frac{\partial u^{i}}{\partial u^{\beta}}\,,\quad M^{a}_{\cdot\delta}=g^{a\gamma}M_{\gamma\delta}\,,$$

$$M_{a\beta}=H_{a\beta}-\frac{1}{n-1}g^{\gamma\delta}H_{\gamma\delta}g_{a\beta}\,,$$

et
$$M_{\beta\gamma\delta}=M_{\beta\gamma//\delta}-g_{\beta\delta}\left[\frac{1}{n-1}\frac{\partial g^{\varepsilon\rho}H_{\varepsilon\rho}}{\partial u^{\gamma}}+\Pi^{0}_{jk}B^{j}B^{k}_{\gamma}\right]$$

// désignant la dérivée covariante par rapport aux symboles de Christoffel $\left\{{a \atop \beta\gamma}\right\}$.

Par un calcul direct, on peut démontrer que les équations (4.4) et (4.5) coïncident respectivement avec les équations de Gauss et de Codazzi précedemment obtenues par un des présents auteurs.[1]

§ 5. Pour les courbes tracées sur l'hypersurface, on peut démontrer le théorème suivant

Théorème: Si une courbe est tracée sur l'hypersurface totalement ombiliquée ($M_{a\beta}=0$) le paramètre projectif t sur la courbe regardée comme étant celle dans l'espace ambiant et le paramétre projectif τ sur la courbe regardée comme étant celle sur l'hypersurface coïncident à une transformation homographique près.

En considérant une congruence Γ de sphères A trangente à une hypersurface donnée dans un espace à connexion conforme, on peut généraliser la théorie des courbes autoconcourantes de M. A. Haimovici.[2] La circonférence généralisée sur l'hypersurface que nous avons traitée en haut est une sorte de courbe autoconcourante, seulemant nous avons pris les sphères A_n comme celles qui forment une congruence des sphères.

§ 6. Pour les points ombilics et les hypersurfaces totalement ombiliquées, nous avons une suite de théorèmes:

Théorème: Si toutes les courbes sur l'hypersurface passant par un point fixe et étant en contact du troisième ordre avec les circonférences généralisées de l'espace ambiant peuvent être en contact de troisième ordre avec une circonférence généralisée sur l'hypersurface, ce point fixe est un point ombilic.

Théorème: Une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les courbes autoconcourantes spéciales[3] passant par un point fixe soient

1) K. Yano: Sur les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann, Proc. **15** (1939), 247–252, Sur les équations de Codazzi dans la géométrie conforme des espaces de Riemann, Proc. **15** (1939), 340–344.

2) A. Haimovici: Directions concourantes et directions parallèles sur une variété d'un espace conforme, Thèse Jassy (1938).

3) K. Yano et Y. Mutô: Sur la théorie des hypersurfaces dans un espace à connexion conforme (sous presse).

en contact du troisième ordre avec les circonférences généralisées de l'hypersurface est que ce point soit un point ombilic.

Théorème : Sur une hypersurface totalement ombiliquée, la circonférence généralisée et la courbe autoconcourante spéciale coïncident, inversement, si ces deux courbes coïncident toujours, cette hypersurface doit être totalement ombiliquée.

Théorème : S'il existe toujours une hypersurface totalement ombiliquée passant par un point fixe et étant orthogonale à n'importe quelle direction, le tenseur conforme de courbure de M. Weyl s'annule en ce point.[1]

---

1) J. A. Schouten : Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmung, Math. Zeitsch. **2** (1921), 58–88.

K. Yano : Sur les équations de Codazzi......, Proc. **15** (1939), 340–344.