41. Gemeinsame Behandlung der Äquivalenzprobleme der Kurven in der elliptischen Laguerreschen, parabolischen Laguerreschen und hyperbolischen Laguerreschen Ebene[1].

Von Tsurusaburo TAKASU.

Mathematisches Institut der Tohoku Kaiserlichen Universität, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., June 12, 1941.)

1. *Einleitung.* Auf Grund von einer von meinen vorherigen Arbeiten[2] möchte ich im folgenden die Äquivalenzprobleme der Kurven in der elliptischen Laguerreschen[3], parabolischen Laquerreschen und hyperbolischen Laqurreschen Ebene gemeinsam behandeln.

2. *Die zu Grunde liegenden komplexen Zahlen.* Setzt man nach Euler, Clifford, Weierstrass und Cayley mit reellen Zahlen x, y:

$$z=x+my\,,\qquad \bar{z}=x-my\,,$$

$m=i,\ i^2=-1,$	$m=p=$ Infinitesimale, $p^2=0,$	$m=h,\ h^2=+1,$

so sind die Geradenkoordinaten in der m-Laguerreschen Ebene ($m=e, p, h$) durch

$$(1)\quad \begin{cases} \sigma\cdot\mathfrak{u}_1=\cos m\,\varphi=\dfrac{e^{m\varphi}+e^{-m\varphi}}{2}\,, & \sigma\cdot\mathfrak{u}_2=-im\sin m\,\varphi=-i\,\dfrac{e^{m\varphi}-e^{-m\varphi}}{2}\,,\\ \sigma\cdot\mathfrak{u}_3=i\,, \quad \sigma\cdot\mathfrak{u}_4=-P & \left(\sigma\neq 0,\ (\mathfrak{u}\mathfrak{u})_3\equiv 0\right) \end{cases}$$

dargestellt.

Die m-Laguerre-geometrischen Koordinaten

des orientierten Kreises	der orientierten Parabel[4]	der orientierten Hyperbel

$$(2)\qquad (x-a)^2-(my-mb)^2=\varepsilon r^2\,,\qquad (\varepsilon=\pm 1)\,,$$

$m=i,$	$m=h,$	$m=p=$ Infinitesimale, $p^2=0,$
$i^2=-1,$	$h^2=+1,$	$-p^2b=2d=$ endlich, $\sqrt{\varepsilon}\,r=p\sqrt{b(2b'-b)},$

sind:

$$(3)^{5)}\quad \xi_1=a\,,\quad \xi_2=-imb\,,\quad \xi_3=i\sqrt{\varepsilon}\,r\,,\quad \bar{\xi}_4=1\,,\quad \xi_4=-\frac{1}{2}\{(\xi\xi)_3-1\}\,.$$

1) Dieses Stück gehört zur Reihe von Untersuchungen, welche finanziell vom Unterrichtsministerium unterstützt sind.

2) T. Takasu, Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen Laguerreschen, hyperbolischen Laguerreschen und parabolischen Laguerreschen Differentialgeometrien. Proc. **16** (1940), 346-349.

3) Dieser Fall verdanken wir wesentlich Herrn T. Kubota: Beiträge zur Inversionsgeometrie und Laguerre-Geometrie. Jap. J. Math., **1** (1924); On the Differential Invariants of the Laguerre Group. Proc. Cambridge Phil. Soc., **2** (1924). *Siehe auch die Schlussbemerkung!*

4) Dies wird zu: $(x-a)^2=4d.(y-b'),\ \varepsilon=+1.$

5) Im Falle $m=p$ ist: $\xi_1=a,\ \xi_2=\dfrac{2id}{p},\ \xi_3=-\sqrt{d}\sqrt{b'+\dfrac{d}{p^2}},\ \bar{\xi}_4=1.$

Ist $(\xi)_4$ insbesondere

der Schmiegungskreis	die Schmiegungs-parabel	die Schmiegungs-hyperbel

der Kurve

(4) $$\mathfrak{u}_n=\mathfrak{u}_n(\lambda)\,, \qquad (n=1,2,3,4)\,,$$

so ist

(5) $$(d\xi d\xi)_3=da^2-m^2db^2-\varepsilon dr2\equiv 0^{1)}\,.$$

In der Tat ist

$$d\xi_1:d\xi_2:d\xi_3:d\xi_4=\mathfrak{u}_1:\mathfrak{u}_2:\mathfrak{u}_3:\mathfrak{u}_4\,.$$

Denn, $(\xi\mathfrak{u})_4=0$, $(d\xi\mathfrak{u})_3=0$, $(d\mathfrak{u}\xi)_3\equiv-(d\xi\mathfrak{u})_3=0$, also

$$d\xi_1:d\xi_2:d\xi_3=|\,\mathfrak{u}_2 d\mathfrak{u}_2\,|:|\,\mathfrak{u}_3 d\mathfrak{u}_1\,|:|\,\mathfrak{u}_1 d\mathfrak{u}_2\,|$$

einerseits und $(\mathfrak{u}\mathfrak{u})_3=0$, $(\mathfrak{u}d\mathfrak{u})_3=0$ also

$$\mathfrak{u}_1:\mathfrak{u}_2:\mathfrak{u}_3=|\,\mathfrak{u}_2 d\mathfrak{u}_3\,|:|\,\mathfrak{u}_3 d\mathfrak{u}_1\,|:|\,\mathfrak{u}_1 d\mathfrak{u}_2\,|$$

andererseits, so dass

$$d\xi_1:d\xi_2:d\xi_3=\mathfrak{u}_1:\mathfrak{u}_2:\mathfrak{u}_3$$

ist. Weiter ist

$$\frac{d\xi_4}{d\xi_1}=-\frac{(\xi d\xi)_3}{d\xi_1}=-\frac{(\xi\mathfrak{u})_3}{\mathfrak{u}_1}\,.$$

Wählt man eine Integralinvariante λ durch die Forderung

(8) $$\left(\frac{d^2\xi}{d\lambda^2}\,\frac{d^2\xi}{d\lambda^2}\right)_3=1\,,$$

so gilt nach (5):

(9) $$(d^2\xi d^2\xi)_3=(d\lambda)^4.$$

Setzt man

(10) $$\frac{d\xi}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{P}\right)\mathfrak{u}\equiv\hat{\mathfrak{u}}^{2)}$$

und

(11) $$\rho\cdot\hat{\mathfrak{u}}_1=\frac{1-u^2}{2}\,,\quad \rho\cdot\hat{\mathfrak{u}}_2=\frac{i(+u^2)}{2}\,,\quad \rho\cdot\hat{\mathfrak{u}}_3=u\,,$$

(12) $$\rho\cdot\hat{\mathfrak{u}}_4=\frac{d\xi_4}{d\lambda}=-\left(\xi\frac{d\xi}{d\lambda}\right)_3=-(\xi\hat{\mathfrak{u}})_3=-\left(\hat{\mathfrak{u}}\int\hat{\mathfrak{u}}d\lambda\right)_3,$$

so gibt die Forderung (8):

(13) $$\rho=\frac{d\mathfrak{u}}{d\lambda}\,.$$

---

1) Im Falle $m=p$ ist: $(d\xi d\xi)_3=\mathrm{d}a^2+4\mathrm{d}b'.\mathrm{d}d$.

2) Wegen $1/P$ siehe: T. Takasu, Differentialgeometrien in den Kugelräumen, Band **II** (1939), S. 21, Formel (76).

Weiter erhalten wir

$$\left(\frac{d^3\xi}{d\lambda^3}\ \frac{d^3\xi}{d\lambda^3}\right)_4 \equiv 2\{u, \lambda\} = \phi(\lambda)\,, \tag{14}$$

welche als natürliche Gleichung der Kurve (4) brauchbar ist. In der Tat, löst man (14) für gegebene $\phi(\lambda)$ nach $u(\lambda)$ auf, und setzt man in (11) und dann in (12) mit (13) ein, so wird die Kurve bestimmt.

Schlussbemerkung: *Es ist ganz naheliegend das obige Erbenis zum Falle der allgemeineren Laguerreschen Ebenen mit Benutzung der komplexen Zahlen* $z=x+jy$, ($j^2=\mu+\nu j$; μ, ν = reelle Zahlen) *zu erweitern. Dabei kommt die Gleichung*

$$(x-a)^2+\nu(x-a)(y-b)-\mu(y-b)^2=\varepsilon r^2$$

an Stelle von (2) *in Betracht.*