# 40. Gemeinsame Behandlung der Äquivalenzprobleme der Kurven in der elliptischen konformen, parabolischen konformen und hyperbolischen konformen Ebene[1].

Von Tsurusaburo TAKASU.

Mathematisches Institut der Tohoku Kaiserlichen Universität, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., June 12, 1941.)

**1.** *Einleitung.* Auf Grund einer von meinen vorherigen Arbeiten[2] möchte ich im folgenden die Äquivalenzprobleme der Kurven in der elliptischen konformen[3], parabolischen konformen und hyperbolischen konformen Ebene gemeinsam behandeln.

**2.** *Die zu Grunde liegenden komplexen Zahlen.* Setzt man nach Euler, Clifford, Weierstrass und Cayley mit reellen Zahlen $x, y$:

$$z=x+my, \qquad \bar{z}=x-my,$$

| | | |
|---|---|---|
| $m=i,\ i^2=-1,$ | $m=p=$ Infinitesimale[4], $p^2=0,$ | $m=h,\ h^2=+1,$ |

so sind die eigentlichen $m$-konformen Transformationen $(m=e, p, h)$ durch die Formeln

$$z^*=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad N(ad-bc)\neq 0 \tag{1}$$

und die uneigentlichen $m$-konformen Transformationen durch die Formeln

$$\bar{z}^*=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad N(ad-bc)\neq 0 \tag{2}$$

dargestellt.

**3.** *Natürliche Gleichung.* Eine Cayleysche Identität lautet folgendermassen:

$$\{X, Y\}=\left(\frac{dt}{dY}\right)^2\left[\{X, t\}-\{Y, t\}\right], \tag{3}$$

worin $\{X, Y\}$ die Schwarzsche Ableitung ist.

---

1) Dieses Stück gehört zur Reine von Untersuchungen, welche finanziell vom Unterrichtsministerium unterstützt sind.

2) T. Takasu, Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Differentialgeometrien. Proc. **16** (1940), 333-340.

3) Wegen dieses Falles siehe: T. Kubota, Beiträge zur Inversionsgeometrie und Laguerre-Geometrie. Jap. J. Math., **1** (1924); Beiträge zur Inversionsgeometrie. Tohoku Sci. Rep., **13** (1924-25), S. 243. T. Takasu, Natural Equations of Curves under Circular Point-Transformation Groups and their Duals. Jap. J. Math., **1** (1924); Tohoku Math. J., **25** (1925); Differentialgeometrien in den Kugelräumen, Bd. **1** (1938), SS. 36, 39, 40, 42. *Siehe auch die Schlussbemerkung!*

4) Diese Interpretation sieht neu zu sein aus.

Setzt man $X=z$, $t=z$ in (3), so folgt:

$$(4) \qquad \{z, Y\} = -\frac{\{Y, \bar{z}\}}{\left(\frac{dY}{dz}\right)^2}.$$

Erfährt $z$ eine lineare Transformation (1), so folgt:

$$(5) \qquad \{z^*, Y\} = \{z, Y\},$$

so dass nach (4)

$$\{Y, z^*\} : \left(\frac{dY}{dz^*}\right)^2 = \{Y, z\} : \left(\frac{dY}{dz}\right)^2$$

d. h.

$$(6) \qquad \{Y, z^*\}^{\frac{1}{2}} dz^* = \{Y, z\}^{\frac{1}{2}} dz$$

bis auf das Vorzeichen eine Invariante ist.

Setzen wir $d\lambda = \frac{1}{2}\{\bar{z}, z\}^{\frac{1}{2}} dz$, so folgt aus (4) für $Y=\bar{z}$:

$$[7] \qquad d\lambda = \frac{1}{2}\{\bar{z}, z\}^{\frac{1}{2}} dz = \frac{i}{2}\{z, \bar{z}\}^{\frac{1}{2}} d\bar{z}.$$

*$d\lambda^2$ ist eine absolute Invariante gegenüber den Transformationen* (1) *und ihr Vorzeichen ändert sich bei den Transformationen* (2).

Benutzt man dieses $\lambda$ für $t$ und $z$, $\bar{z}$ bzw. für $X$, $Y$ in (3), so folgt aus (3):

$$[8] \qquad \{z, \lambda\} - \{\bar{z}, \lambda\} = 4.$$

Zieht man nun die Gleichung

$$[9] \qquad \{z, \lambda\} + \{\bar{z}, \lambda\} = \phi(\lambda)$$

heran, so *ist $\phi(\lambda)$ gegenüber den m-konformen Transformationen* (1), (2) *eine absolute Invariante.*

Verbindet man (9) mit (8), so ergibt sich:

$$[10] \qquad \{z, \lambda\} = \frac{1}{2}\phi(\lambda) + 2, \qquad \{\bar{z}, \lambda\} = \frac{1}{2}\phi(\lambda) - 2,$$

welche mit den folgenden äquivalent sind:

$$[11] \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dX}{d\lambda} = -1 - \dfrac{1}{4}\phi(\lambda) + X^2, & X = \dfrac{d^2z}{d\lambda^2} : 2i\dfrac{dz}{d\lambda}, \\ \dfrac{dY}{d\lambda} = +1 - \dfrac{1}{4}\phi(\lambda) + Y^2, & Y = \dfrac{d^2\bar{z}}{d\lambda^2} : 2i\dfrac{d\bar{z}}{d\lambda}. \end{array} \right.$$

Wenn (11) d. h. (10) aufgelöst werden:

$$(12) \qquad z = z(\lambda), \qquad \bar{z} = \bar{z}(\lambda),$$

so haben wir schon die Gleichungen der gesuchten Kurve:

$$(13) \qquad x = x(\lambda), \qquad y = y(\lambda).$$

Also *können wir* (9) *als natürliche Gleichung der Kurve* (13) *gegenüber der m-konformen Gruppe ansehen*[1].

**4.** *Natürliche Gleichungen in Tetrahyperbolischen Koordinanten usw.* Die tetra-

| zyklischen | parabolischen | hyperbolischen |
|---|---|---|

Koordinanten

| des orientierten Kreises | der orientierten Parabel[2] | der orientierten Hyperbel |
|---|---|---|

$$(x-a)^2-(my-mb)^2=\varepsilon r^2, \qquad (\varepsilon=\pm 1),$$

| $m=i$, | $m=p$, | $m=h$, |
|---|---|---|

sind:

$$(14)^{3)} \quad \begin{cases} \xi_1=\dfrac{a}{\sqrt{\varepsilon r}}, \quad \xi_2=-\dfrac{imb}{\sqrt{\varepsilon r}}, \quad \xi_3=\dfrac{i}{2\sqrt{\varepsilon r}}(a^2-m^2b^2-\varepsilon r^2+1), \\ \xi_4=\dfrac{1}{2\sqrt{\varepsilon r}}(a^2-m^2b^2-\varepsilon r^2-1), \quad \big((\xi\xi)_4=1\big). \end{cases}$$

Ist $(\xi)_4$ insbesondere

| der Schmiegungskreis | die Schmiegungsparabel | die Schmiegungshyperbel |
|---|---|---|

der Kurve

$$(15) \qquad \mathfrak{x}_n=\mathfrak{x}_n(\lambda), \qquad (n=1,2,3,4), \qquad \big((\mathfrak{x}\mathfrak{x})_4=0\big),$$

worin

$$(16) \quad \begin{cases} \rho\cdot\mathfrak{x}_1=x, \quad \rho\cdot\mathfrak{x}_2=-imy, \quad \rho\cdot\mathfrak{x}_3=\dfrac{i}{2}(1+x^2-m^2y^2), \\ \rho\cdot\mathfrak{x}_4=-\dfrac{1}{2}(1-x^2+m^2y^2) \end{cases}$$

ist, so ist

$$(17) \qquad (d\xi d\xi)_4=\frac{da^2-m^2db^2-\varepsilon dr^2}{\varepsilon r^2}=0^{4)}.$$

In der Tat ist

$$d\xi_1:d\xi_2:d\xi_3:d\xi_4=\mathfrak{x}_1:\mathfrak{x}_2:\mathfrak{x}_3:\mathfrak{x}_4.$$

Dann, $(\xi\mathfrak{x})_4=0$, $(d\xi\mathfrak{x})_4=0$, $(d\mathfrak{x}\xi)_4\equiv-(\mathfrak{x}d\xi)_4=0$, $(\xi d^2\mathfrak{x})_3\equiv-(d\mathfrak{x}d\xi)_4=0$, $(\xi d\xi)_4=0$, also

$$d\xi_1:d\xi_2:d\xi_3:d\xi_4=|\mathfrak{x}_2 d\mathfrak{x}_3\xi_4|:|\mathfrak{x}_3 d\mathfrak{x}_1\xi_4|:|\mathfrak{x}_4 d\mathfrak{x}_1\xi_2|:|\mathfrak{x}_1 d\mathfrak{x}_2\xi_3|$$

einerseits und $(\mathfrak{x}\mathfrak{x})_4=0$, $(\mathfrak{x}d\mathfrak{x})_4=0$, $(\mathfrak{x}\xi)_4=0$ also

$$\mathfrak{x}_1:\mathfrak{x}_2:\mathfrak{x}_3:\mathfrak{x}_4=|\mathfrak{x}_2 d\mathfrak{x}_3\xi_4|:|\mathfrak{x}_3 d\mathfrak{x}_1\xi_4|:|\mathfrak{x}_4 d\mathfrak{x}_1\xi_2|:|\mathfrak{x}_1 d\mathfrak{x}_2\xi_3|$$

---

1) Der Fall $m=i$ ist nichts anderes als der Kubotaschen, a. a. O.

2) Dies wird zu: $(x-a)^2=4d.(y-b')$.

3) T. Takasu, a. a. O. Im Falle $m=p$ ist: $\xi_1=\dfrac{ip}{2d}a$, $\xi_2=1$, $\xi_3=-\dfrac{p}{4d}(1+a^2+4b'd)$, $\xi_4=-\dfrac{ip}{4d}(1-a^2-4b'd)$. Dabei ist $\sqrt{\varepsilon r}=p\sqrt{b(2b'-b)}$, $2d=-p^2b$, $\varepsilon=+1$.

4) Im Falle $m=p$ wird dies zu: $(da)^2+4db'.(dd)=0$.

andererseits, so dass

$$d\xi_1 : d\xi_2 : d\xi_3 : d\xi_4 = \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 : \mathfrak{x}_4$$

ist.

Setzt man nun

$$(18) \qquad \xi_1' = \sigma(1 - z\bar{z}), \quad \xi_2' = \sigma i(1 + z\bar{z}), \quad \xi_3' = \sigma(z + \bar{z}), \quad \xi_4' = \sigma i(\bar{z} - z),$$

wo $\xi_1' = \dfrac{d\xi_1}{d\lambda}$ usw. ist, so ist die Bedingung (17) identisch erfüllt, und es folgt auch, dass

$$(19) \qquad (\xi''\xi'')_4 = 4\sigma^2 z'\bar{z}'$$

ist.

Wir wollen jetzt den Parameter $\lambda$ so bestimmen, dass

$$[20] \qquad (\xi''\xi'')_4 = 1$$

wird. Zum Zwecke von [20] sollen wir annehmen:

$$[21] \qquad \sigma = 1 : 2\sqrt{z'\bar{z}'}.$$

Jede $m$-konforme Transformation kann aus Transformationen der Typen

$$(22) \qquad \begin{cases} z^* = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, & \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \\[2ex] \bar{z}^* = \dfrac{\bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\bar{z} + \bar{\delta}}, & \bar{\alpha}\bar{\delta} - \bar{\beta}\bar{\gamma} \neq 0 \end{cases}$$

und

$$(23) \qquad \begin{cases} \bar{z}^* = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, & \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \\[2ex] z^* = \dfrac{\bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\bar{z} + \bar{\delta}}, & \bar{\alpha}\bar{\delta} - \bar{\beta}\bar{\gamma} \neq 0 \end{cases}$$

zusammengesetzt werden. (22) *stellt eigentliche und* (23) *uneigentliche m-konforme Transformationen dar.*

*$\lambda$ ist eine Integralinvariante gegenüber eigentlichen m-konformen Transformationen und $d\lambda^2$ bekommen durch uneigentliche m-konforme Transformationen den Faktor $-1$.*

Hierzu bemerken wir noch dass *alle $\xi'$ den Faktor $i$ erhalten wenn $\xi'$ einer uneigentlichen m-konformen Transformation unterworfen wird.*

Integriert man (18) und setzt in $(\xi\xi)_4 = 1$ ein, so erhält man:

$$[24] \qquad \{z, \lambda\} - \{\bar{z}, \lambda\} = 4,$$

welche nichts anderes als (8) ist.

Aus der Cayleyschen Identität

$$(25) \qquad \{z, \bar{z}\} = \left(\frac{d\lambda}{d\bar{z}}\right)^2 \left[\{z, \lambda\} - \{\bar{z}, \lambda\}\right]$$

und (24) erhalten wir

$$[26] \qquad d\lambda = \frac{1}{2}\{z, \bar{z}\}^{\frac{1}{2}} d\bar{z}.$$

Aus der Identität (25), indem wir $z$ anstatt von $\lambda$ setzen, erhalten wir

$$(27)\qquad \{\bar{z}, z\} = -\{z, \bar{z}\} : \left(\frac{dz}{d\bar{z}}\right)^2.$$

Folglich wird (26) zu:

$$[28]\qquad d\lambda = \frac{1}{2}\{z, \bar{z}\}^{\frac{1}{2}} d\bar{z} = \frac{i}{2}\{\bar{z}, z\}^{\frac{1}{2}} dz.$$

Wenn $z$ eine lineare Transformation erfährt, so haben wir

$$(29)\qquad \{\bar{z}^*, z\} = \{\bar{z}, z\},$$

so dass nach (27)

$$(30)\qquad \{z, \bar{z}\} : \left(\frac{dz}{d\bar{z}}\right)^2 = \{z, \bar{z}^*\} : \left(\frac{dz}{d\bar{z}^*}\right)^2$$

oder

$$(31)\qquad \{z, \bar{z}\}^{\frac{1}{2}} d\bar{z} = \{z, \bar{z}^*\}^{\frac{1}{2}} d\bar{z}^*$$

ist. (31) ist invariant gegenüber den linearen Transformationen.

Es gilt weiter die Formel

$$[32]\qquad |\,\xi'\ \xi''\ \xi'''\ \xi^{(\mathrm{IV})}\,| = -1,$$

die mit (24) sowie mit (26) äquivalent ist. In der Tat, (32) folgt aus der Relation $(\xi^{(\mathrm{IV})}\xi^{(\mathrm{IV})})_4 - (\xi'''\xi''')_4^2 = 1$, die ihrerseits folgendermassen bewiesen wird: da $(\xi\xi')_4 = 0$, $(\xi''\xi')_4 = 0$, $(\xi^{(\mathrm{IV})}\xi')_4 = 0$ ist, so wird $(\xi'\xi')_4 = 0$ zu:

$$\|\,\xi\xi'\xi^{(\mathrm{IV})}\,\|^2 = -1 + (\xi^{(\mathrm{IV})}\xi^{(\mathrm{IV})})_4 - (\xi'''\xi''')_4^2 = 0.$$

Aus (32) erhalten wir

$$[33]\qquad d\lambda = (d\xi' d\xi')_4^{\frac{1}{2}} = i\,|\,\xi' d\xi' d^2\xi' d^3\xi'\,|^{\frac{1}{6}},$$

woraus hervorgeht, dass $d\lambda$ den Faktor $i$ erhält, wenn die $\xi'$ einer uneigentlichen $m$-konformen Transformation unterworfen werden.

Durch eine langweilige Berechnung erhalten wir weiter:

$$(34)\qquad (\xi'''\xi''')_4 = \{z, \lambda\} + \{\bar{z}, \lambda\},$$

welche nichts anderes als (9) ist.

Diese Grösse ist unter eigentlichen $m$-konformen Transformationen eine *absolute Invariante* und *wechselt ihr Vorzeichen durch uneigentliche m-konforme Transformationen.*

Aus (24) und (34) schliesst man wieder wie im letzten Artikel, dass

$$(35)\qquad (\xi'''\xi''')_4 = \{z, \lambda\} + \{\bar{z}, \lambda\} = \phi(\lambda)$$

als *natürliche Gleichung* der Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\lambda)$ brauchbar ist.

Schlussbemerkung: *Die sämtlichen obigen Ergebnisse sind bei den allgemeineren konformen Ebenen von* $z = x + jy$, ($j^2 = \mu + \nu j$; $\mu$, $\nu$ = reelle Zahlen) *ebenfalls gültig.*