72. Bemerkungen über Ringelemente.

Von Kenjiro SHODA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 11, 1941.)

Wir betrachten einen Ring $\mathfrak{o}$ mit dem Einselement e, der den Doppelkettensatz für Rechtsideale erfüllt. Dann ist es bekannt, daß jedes Element aus $\mathfrak{o}$ entweder Einheit oder Nullteiler ist. *Ein Element a aus $\mathfrak{o}$ ist dann und nur dann eine Einheit, wenn $a\mathfrak{o}=\mathfrak{o}$ ist.* Versteht man unter einer Halbeinheit aus $\mathfrak{o}$ eine Einheit eines Unterringes $c\mathfrak{o}c$ mit einem passend gewählten idempotenten Element c aus $\mathfrak{a}$, so kann man nach A. Ranum[1] behaupten: *Ein Element a aus $\mathfrak{o}$ ist dann und nur dann eine Halbeinheit, wenn $a\mathfrak{o}=a^2\mathfrak{o}$ ist.*

Die beiden Kriterien sind die unmittelbaren Folgerungen des Satzes:

Ist $\mathfrak{r}$ ein Rechtsideal, das der Gleichung $a\mathfrak{r}=\mathfrak{r}$ mit einem Element a aus $\mathfrak{r}$ genügt, so besitzt $\mathfrak{r}$ ein Linkseinselement u und a ist eine Einheit von $u\mathfrak{o}u$.

Aus $a\mathfrak{r}=\mathfrak{r}$ folgt nämlich die Existenz des Elementes u mit $au=a$, $u\in\mathfrak{r}$. Dann ist $a(uz-z)=0$ und nach einem Artinschen Satz[2] $uz=z$ für jedes z aus $\mathfrak{r}$. Hieraus folgt $u^2=u$, $ua=a$, also ist u ein Linkseinselement von $\mathfrak{r}$ und $a\in u\mathfrak{o}u$. Auf der anderen Seite folgt aus $a\mathfrak{r}=\mathfrak{r}$ die Existenz des Elementes a' mit $aa'=u$. Dann ist $aa'a=ua=au$, also $a'a=u$; d. h. a ist eine Einheit von $u\mathfrak{o}u$.

Besteht $\mathfrak{o}$ nur aus Einheiten (ausschließlich Null), so ist $\mathfrak{o}$ ein Schiefkörper. Besteht $\mathfrak{o}$ aus Einheiten und nilpotenten Elemente, so ist $\mathfrak{o}$ vollständig primär im Artinschen Sinne. Besteht $\mathfrak{o}$ aus Halbeinheiten, so ist $\mathfrak{o}$ nach A. Ranum die direkte Summe von Schiefkörpern. Wir beweisen nun:

Besteht $\mathfrak{o}$ nur aus Halbeinheiten und nilpotenten Elemente und zwar enthält $\mathfrak{o}$ mindestens eine von Einheit verschiedene Halbeinheit und mindestens ein von Null verschiedenes nilpotentes Element, so ist der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ nach dem Radikal $\mathfrak{n}\neq 0$ die direkte Summe von zwei Schiefkörpern und zwar $\mathfrak{a}=e_1\mathfrak{o}e_1+e_2\mathfrak{o}e_2+\mathfrak{n}$ mit primitiven idempotenten Elemente e_1, e_2; und umgekehrt.

Es sei nämlich $e=c_1+c_2$ eine Zerlegung des Einselementes e in die Summe zweier zueinander orthogonalen idempotenten Elemente. Dann ist $\mathfrak{o}$ die direkte Summe von vier Untermoduln $c_i\mathfrak{o}c_j$ und man ersieht leicht, daß mit $\mathfrak{o}$ auch der Unterring $\mathfrak{o}'=c_1\mathfrak{o}c_1+c_2\mathfrak{o}c_2$ aus Halbeinheiten und nilpotenten Elemente besteht. Ist aber etwa n_1 ein nilpotentes Element aus $c_1\mathfrak{o}c_1$, so ist n_1+c_2 weder Halbeinheit noch nilpotentes Element. Also enthält $c_1\mathfrak{o}c_1$ kein nilpotentes Element und folglich ist $\mathfrak{o}'$ die direkte Summe von Schiefkörpern.

---

1) A. Ranum, The groups belonging to a linear associative algebra, American Journal of Math. **49** (1927), 285.

2) E. Artin, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Abh. aus dem Math. Seminar zu Hamburg **5** (1927), 251.

Ist nun $e=e_1+e_2+\cdots+e_r$ eine Zerlegung von e in die Summe der primitiven idempotenten Elemente, so sind die $e_i\mathfrak{o}e_i$ alles Schiefkörper und $\mathfrak{n}=\sum_{i\neq j} e_i\mathfrak{o}e_j$ ist der Radikal von $\mathfrak{o}$. Ist $r>2$, so setze man $c_a=e_1+\cdots+e_{a-1}+e_{a+1}+\cdots+e_r$. Da $c_a\mathfrak{o}c_a$ die dirkte Summe von Schiefkörpern ist, so ist $c_a\mathfrak{n}c_a=0$, also ist $e_i\mathfrak{n}e_j=0$ für $i, j\neq a$. Aus diesen Gleichungen für $a=1, 2, 3$ folgt $e_i\mathfrak{n}e_j=0$ für jedes i, j und daher $\mathfrak{n}=0$. Da aber $\mathfrak{o}$ mindestens ein von Null verschiedenes nilpotentes Element enthält, so muss $r\leqq 2$ sein. Ist $r=1$, so ist $\mathfrak{o}$ bekanntlich vollständig primar und $\mathfrak{o}$ besteht aus Einheiten und nilpotenten Elementen. Nach der Voraussetzung muss also $r=2$ und $\mathfrak{o}=e_1\mathfrak{a}e_1+e_2\mathfrak{o}e_2+\mathfrak{n}$ sein.

Wir beweisen nun die Umkehrung. Ein Element $a=a_1+a_2+n$ aus $\mathfrak{o}=e_1\mathfrak{o}e_1+e_2\mathfrak{o}e_2+\mathfrak{n}$ ist eine Einheit, wenn $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$ sind. Daher haben wir nur zu beweisen, daß a_2+n eine Halbeinheit ist. Es ist nämlich $\mathfrak{n}^2=0$, da $\mathfrak{n}^2$ in $e_1\mathfrak{o}e_1+e_2\mathfrak{o}e_2$ enthalten ist. Ferner ist $e_2n+ne_2=n$, da n die Gestalt $e_1be_2+e_2ce_1$ hat. Daher ist e_2+n für jedes n aus $\mathfrak{n}$ ein idempotentes Element. Bezeichnet man den Reziprok eines Elementes a_2 in $e_2\mathfrak{o}e_2$ mit $\bar{a}_2$, so ist $(e_2+n')\,(a_2+n)=(a_2+n)\,(e_2+n')=a_2+n$, wobei $n=e_1be_2+e_2ce_1$, $n'=e_1b\bar{a}_2+\bar{a}_2be_1$ sind. Also ist a_2+n eine Halbeinheit mit dem idempotenten Element e_2+n'.