90. Die Theorie der Klassenkörper im Kleinen über diskret perfekten Körpern. II.

Von Mikao MORIYA.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Hokkaido Universität, Sapporo.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1942.)

Wie in der früheren Note[1] bezeichnet k einen diskret perfekten Körper in bezug auf einen Primdivisor $\mathfrak{p}$, und der Restklassenkörper $k/\mathfrak{p}$ besitzt wieder die beiden folgenden Eigenschaften:

1) $k/\mathfrak{p}$ ist vollkommen,
2) zu einer beliebigen natürlichen Zahl n existiert genau eine algebraische Erweiterung vom Grade n über $k/\mathfrak{p}$.

Ferner benutzen wir im folgenden alle dort eingeführten Bezeichnungen ohne Erklärung. Nun schicken wir als Vorbereitung einige Hilfssätze voran.

Hilfssatz 1. Es sei K/k ein Klassenkörper, und $\bar{K}$ ein Zwischenkörper von K/k. Ist dann K bzw. $\bar{K}$ galoissch über $\bar{K}$ bzw. k, so sind K und $\bar{K}$ bzw. Klassenkörper über $\bar{K}$ und k. Ferner stimmt $H(K,\bar{K})$ mit der Gesamtheit $\bar{H}$ aller derjenigen Elemente aus $\bar{K}$ überein, deren Normen nach k in $H(K,k)$ hineinfallen.

Beweis. Zunächst gilt nach Definition:

$$H(K,\bar{K}) \leqq \bar{H};$$

Da bekanntlich $(\bar{A}:\bar{H}) = \big(H(\bar{K},k):H(K,k)\big)$ ist[2], so folgt

$$\big(\bar{A}:H(K,\bar{K})\big) \geqq (\bar{A}:\bar{H}) = \big(H(\bar{K},k):H(K,k)\big).$$

Weil $K,\bar{K}$ bzw. über $\bar{K},k$ galoissch sind, so gilt[3]:

$$(\bar{A}:\bar{H}) \leqq \big(\bar{A}:H(K,\bar{K})\big) \leqq (K:\bar{K})$$

und

$$\big(A:H(\bar{K},k)\big) \leqq (\bar{K}:k),$$

woraus man leicht

$$\big(A:H(K,k)\big) = \big(A:H(\bar{K},k)\big)(\bar{A}:\bar{H}) \leqq (\bar{K}:k)(K:\bar{K}) = (K:k)$$

schließt. Weil nach Voraussetzung K/k ein Klassenkörper, also $\big(A:H(K,k)\big) = (K:k)$ ist, so müssen unbedingt

$$(\bar{A}:\bar{H}) = (K:\bar{K}) \quad \text{und} \quad \big(A:H(\bar{K},k)\big) = (\bar{K}:k)$$

sein; d. h. $\bar{K}$ ist ein Klassenkörper über k.

---

1) M. Moriya, Die Theorie der Klassenkörper im Kleinen über diskret perfekten Körpern. I., Proc. **18** (1942), 39–44.

2) $\bar{A}$ bezeichnet die Gesamtheit aller von Null verschiedenen Elemente aus $\bar{K}$.

3) M. Moriya, loc. cit., S. 42.

Aus der Ungleichung

$$(K:\bar{K})=(\bar{A}:\bar{H})\leqq\bigl(\bar{A}:H(K,\bar{K})\bigr)\leqq(K:\bar{K})$$

schließt man sofort:

$$\bigl(\bar{A}:H(K,\bar{K})\bigr)=(K:\bar{K}) \quad \text{und} \quad \bar{H}=H(K,\bar{K}),$$

weil $\bar{H}\geqq H(K,\bar{K})$ ist; d. h. $K/\bar{K}$ ist ein Klassenkörper zu $\bar{H}$.

Hilfssatz 2. In einer Körperkette

$$k\leqq\tilde{K}\leqq\bar{K}\leqq K$$

seien $\tilde{K}/k$, $\bar{K}/\tilde{K}$ und $K/\tilde{K}$ galoissch. Ist dann K ein Klassenkörper über k, so ist $\bar{K}$ auch ein Klassenkörper über k.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 ist K ein Klassenkörper über $\tilde{K}$, und zwar ist $H(K,\tilde{K})$ die Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus $\tilde{K}$, deren Normen nach k in $H(K,k)$ hineinfallen. Wendet man auch den obigen Hilfssatz auf $K/\tilde{K}$ an, so ist K ein Klassenkörper über $\bar{K}$. Dabei stimmt $H(K,\bar{K})$ mit der Gesamtheit aller Elemente aus $\bar{K}$, deren Normen nach $\tilde{K}$ in $H(K,\tilde{K})$ hineinfallen. Bezeichnet man nun mit $\bar{H}$ die Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus $\bar{K}$, deren Normen nach k in $\bar{H}(K,k)$ hineinfallen, so ist offenbar

$$\bar{H}=H(K,\bar{K}).$$

Da nach Voraussetzung K/k ein Klassenkörper ist, so ist

$$(K:\bar{K})(\bar{K}:k)=(K:k)=\bigl(A:H(K,k)\bigr)=\bigl(A:H(\bar{K},k)\bigr)(\bar{A}:\bar{H}),$$

wo $\bar{A}$ die Gesamtheit aller von Null verschiedenen Elemente aus $\bar{K}$ bezeichnet. Da $\bar{H}=H(K,\bar{K})$ und $K/\bar{K}$ ein Klassenkörper ist, so folgt aus der obigen Gleichnung

$$(\bar{K}:k)=\bigl(A:H(\bar{K},k)\bigr), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Hilfssatz 3. Es sei k_0 eine endliche separable zyklische Erweiterung über k, und K eine endliche separable abelsche Erweiterung über k_0. Ist dann $H(K,k_0)$ bei Anwendung eines erzeugenden Automorphismus τ von k_0/k invariant, so ist K/k galoissch.

Beweis. Da in der kleinsten, K enthaltenden separablen galoisschen Erweiterung über k τ mindestens eine Fortsetzung besitzt, so bezeichnen wir eine solche auch schlechthin mit τ. Bezeichnet nun K^{τ} denjenigen Körper, welcher aus K durch Anwendung von τ entsteht, so ist dann und nur dann K über k galoissch, wenn $K^{\tau^i}=K$ ist. Wie leicht bestätigt wird, ist K^{τ^i} über $k_0^{\tau^i}=k_0$ abelsch, und es gilt:

$$H(K^{\tau^i},k_0)=H(K,k_0)^{\tau^i}=H(K,k_0);$$

also ist K^{τ^i} ein abelscher Klassenkörper über k_0, dessen Normgruppe gleich $H(K, k_0)$ ist. Nach dem Eindeutigkeitssatz[1] muß daher $K^{\tau^i}=K$ sein, w. z. b. w.

Nun beweisen wir folgenden

Satz 1. *Ein galoisscher Klassenkörper K über k ist stets über k abelsch.*

Beweis. Da der Satz für die zyklischen Klassenkörper vom Primzahlgrad gültig ist, so nehmen wir an, daß der Satz bereits für alle galoisschen Klassenkörper bewiesen ist, deren Grade nach k kleiner sind als $(K:k)$.

Weil K über k galoissch ist, so können wir über k stets eine echte zyklische Erweiterung $\widetilde{K}$ so bestimmen, daß K über $\widetilde{K}$ *vollverzweigt* ist. Da nach Hilfssatz 1 $K/\widetilde{K}$ ein galoisscher Klassenkörper ist, so ist K nach Induktionsannahme über $\widetilde{K}$ abelsch. Bekanntlich ist dabei K aus endlich vielen, über $\widetilde{K}$ zyklischen Erweiterungen zusammengesetzt. Es sei K' ein beliebiger zyklischer Teilkörper von $K/\widetilde{K}$. Dann ist K'/k nach Hilfssatz 2 ein Klassenkörper. Da $K'/\widetilde{K}$, $\widetilde{K}/k$ abelsch sind, so ist $H(K', \widetilde{K})$ nach Hilfssatz 1 identisch mit der Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus $\widetilde{K}$, deren Normen nach k in $H(K', k)$ hineinfallen. Hierfolgt;

$$H(K', \widetilde{K})^{\tau}=H(K', \widetilde{K}),$$

falls τ einen erzeugenden Automorphismus von $\widetilde{K}/k$ bezeichnet. Nach Hilfssatz 3 ist K' über k galoissch. Es genügt also nur zu beweisen, daß K' über k abelsch ist. Wir können daher ohne Einschränkung annehmen, daß $K/\widetilde{K}$ von vornherein *vollverzweigt, zyklisch* ist.

Es sei nun T die unverzweigte, separable zyklische Erweiterung vom Grade $n=(K:\widetilde{K})$. Dann ist das Kompositum L von K und T ein abelscher Klassenkörper, dessen Normgruppe $H(L, K)$ gleich $H(K, \widetilde{K}) \frown H(T, \widetilde{K})$ ist. Da für ein Element $\tilde{\gamma} \neq 0$ aus $\widetilde{K}$ $N_{\widetilde{K},k}(\tilde{\gamma}^{1-\tau})=1$ ist, so ist nach Hilfssatz 1 $\tilde{\gamma}^{1-\tau}$ in $H(K, \widetilde{K})$ enthalten. Berücksichtigt man nun, daß T als ein Kompositum von $\widetilde{K}$ und einer unverzweigten zyklischen Erweiterung über k ein abelscher Klassenkörper ist, so enthält $H(T, \widetilde{K})$ auch $\tilde{\gamma}^{1-\tau}$. Die symbolische $(1-\tau)$-te Potenz eines jeden von Null verschiedenen Elementes aus $\widetilde{K}$ ist also stets in $H(L, \widetilde{K})$ enthalten.

Es seien nun σ_1, σ_2 die erzeugenden Automorphismen von $K/\widetilde{K}$, $T/\widetilde{K}$. Dann ist die Galoisgruppe von $L/\widetilde{K}$ das direkte Produkt $\{\sigma_1\} \times \{\sigma_2\}$, weil $K \frown T=\widetilde{K}$ ist. Die Galoisgruppe von L/k ist also von σ_1, σ_2 und τ erzeugt, wenn τ eine Fortsetzung des Automorphismus τ von $\widetilde{K}/k$ in die Galoisgruppe von L/k bedeutet. Da T über k abelsch ist, so ist offenbar $\tau^{-1}\sigma_2^{-1}\tau\sigma_2$ in der Gruppe $\{\sigma_1\}$ enthalten; weil anderseits $\{\sigma_2\}$ ein Normalteiler der Galoisgruppe von L/k ist, so muß $\tau^{-1}\sigma_2^{-1}\tau\sigma_2$ das Einheitselement sein. Es ist also $\tau\sigma_2=\sigma_2\tau$.

1) M. Moriya, loc. cit., S. 43–44.

Wir zeigen nun, daß $\tau\sigma_1=\sigma_1\tau$ ist. Es bezeichne $\widetilde{H}$ die Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus $\widetilde{K}$, deren Normen nach k in $H(L,k)$ hineinfallen. Ist dann $\tilde{\gamma}$ ein beliebiges Element aus $\widetilde{H}$, so gibt es ein Element Γ aus L derart, daß $N_{L,k}(\Gamma)=N_{\widetilde{K},k}(\tilde{\gamma})$ ist; d. h. $N_{\widetilde{K},k}\left(N_{L,\widetilde{K}}(\Gamma)\gamma^{-1}\right)=1$. Nach einem bekannten Satz[1] existiert daher ein Element $\tilde{\beta}$ aus $\widetilde{K}$, so daß $\tilde{\gamma}=N_{L,\widetilde{K}}(\Gamma)\tilde{\beta}^{1-\tau}$ ist. Da $N_{L,\widetilde{K}}(\Gamma)$, $\tilde{\beta}^{1-\tau}$ beide zu $H(L,\widetilde{K})$ gehören, so ist $\tilde{\gamma}$ ein Element aus $H(L,\widetilde{K})$, woraus $\widetilde{H}\leqq K(L,\widetilde{K})$ folgt. Weil anderseits stets $\widetilde{H}\geqq H(L,\widetilde{K})$ ist, so ist $\widetilde{H}=H(L,\widetilde{K})$. Hieraus folgt ohne weiteres, daß L ein Klassenkörper über k ist, weil

$$\left(A:H(L,k)\right)=\left(A:H(\widetilde{K},k)\right)(\tilde{A}:\widetilde{H})=(\widetilde{K}:k)(L:\widetilde{K})=(L:K)$$

ist, wo $\tilde{A}$ die Menge aller von Null verschiedenen Elemente aus $\widetilde{K}$ bezeichnet.

Der der Gruppe $\{\sigma_1\sigma_2\}$ zugeordnete Teilkörper $\bar{K}$ ist offenbar über $\widetilde{K}$ abelsch, also ist nach Hilfssatz 2 ein Klassenkörper über k. Da nach Hilfssatz 1 $H(\bar{K},\widetilde{K})$ aus allen denjenigen Elementen aus $\widetilde{K}$ besteht, deren Normen nach k in $H(\bar{K},k)$ hineinfallen, so gilt

$$H(\bar{K},\widetilde{K})^{\tau}=H(\bar{K},\widetilde{K});$$

$\bar{K}$ ist nach Hilfssatz 3 über k galoissch, und infolgedessen $\{\sigma_1\sigma_2\}$ ein Normalteiler der Galoisgruppe von L/k. $\tau^{-1}\sigma_1\sigma_2\tau$ ist also einerseits von der Form $\sigma_1^x\sigma_2^x$, und anderseits von der Form $\tau^{-1}\sigma_1\tau\sigma_2=\sigma_1^y\sigma_2$, weil $\tau\sigma_2=\sigma_2\tau$ und $\{\sigma_1\}$ ein Normalteiler der Galoisgruppe von L/k ist. Es muß daher

$$x\equiv 1 \mod n,$$

und folglich $\tau^{-1}\sigma_1\tau=\sigma_1$ sein. Der Körper L ist also über k abelsch, und K ist als ein Teilkörper von L/k auch abelsch.

Hilfssatz 4. Es sei K eine endliche separable galoische Erweiterung über k. Dann existiert über k ein abelscher Klassenkörper L, dessen Normgruppe $H(K,k)$ ist, und zwar ist L der größte abelsche Teilkörper von K/k.

Beweis. Da der Satz für den Falle, wo $(K:k)$ eine Primzahl ist, stets gültig ist, so nehmen wir an, daß der Satz bereits für alle galoischen Erweiterungen bewiesen ist, deren Grade nach k kleiner sind als $(K:k)$. Da K/k galoissch ist, so existiert ein zyklischer Teilkörper $\bar{K}$ von K/k, dessen Grad nach k eine Primzahl ist. Nach Induktionsannahme existiert über $\bar{K}$ ein abelscher Klassenkörper $\bar{L}$ derart, daß $H(\bar{L},\bar{K})=H(K,\bar{K})$ ist. Bezeichnet nun $\bar{H}$ die Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus $\bar{K}$, deren Normen nach k in $H(K,k)$ hineinfallen, so ist

$$\bar{H}\geqq H(K,\bar{K})=H(\bar{L},\bar{K}).$$

Daher existiert über $\bar{K}$ ein abelscher Klassenkörper L zu $\bar{H}$[2]. Da für

1) Vgl. etwa M. Deuring. Algebren, Ergebnisse d. Math., **4**, 1 (1935), S. 66–67.
2) M. Moriya, loc. cit., S. 44.

einen erzeugenden Automorphismus τ von $\bar{K}/k$ $\bar{H}^{\tau}=\bar{H}$ ist, so ist L nach Hilfssatz 3 galoissch über k.

Nun gilt, wie leicht bestätigt wird,

$$H(L, k) \leqq H(K, k);$$

da anderseits $K \geqq L$ ist, so ist stets $H(L, k) \geqq H(K, k)$, woraus $H(L, k) = H(K, k)$ folgt. Wenn man mit $\bar{A}$ die Gesamtheit aller von Null verschiedenen Elemente aus $\bar{K}$ bezeichnet, so gilt:

$$\big(A : H(L, k)\big) = \big(A : H(K, k)\big) = \big(A : H(\bar{K}, k)\big)\big(H(\bar{K}, k) : H(K, k)\big)$$
$$= (\bar{K} : k)(\bar{A} : \bar{H}) = (L : k);$$

d. h. L ist ein galoisscher Klassenkörper über k, also ist nach Satz 1 abelsch. Ist nun L' ein beliebiger abelscher Teilkörper von K/k, so ist $H(L', k) \geqq H(K, k) = H(L, k)$, woraus $L' \leqq L$ folgt[1], w. z. b. w.

Zusatz zu Hilfssatz 4.

Ist K eine endliche separable Erweiterung über k, so existiert ein abelscher Klassenkörper, dessen Normgruppe gleich $H(K, k)$ ist.

Beweis. Es sei K^* eine K enthaltende, endliche separable galoissche Erweiterung über k. Dann existiert nach Hilfssatz 4 ein abelscher Klassenkörper, dessen Normgruppe $H(K^*, k)$ ist. Da $H(K, k) \geqq H(K^*, k)$ ist, so existiert sicher ein abelscher Klassenkörper zu $H(K, k)$[2].

Satz 2. Abgrenzungssatz. *Ist K eine endliche separable Erweiterung über k, so existiert über k ein abelscher Klassenkörper, dessen Normgruppe gleich $H(K, k)$ ist. Ferner ist dieser Klassenkörper der größte abelsche Teilkörper von K über k.*

Beweis. Wir betrachten über k die K enthaltende, endliche separable galoissche Erweiterung K^*, und führen den Beweis in zwei Abschnitten.

1) $(K^* : K)$ ist eine Primzahlpotenz p^{ν}.

Die K zugeordnete Untergruppe $\mathfrak{H}$ aus der Galoisgruppe von K^*/k ist in einer zu p gehörigen Sylowgruppe $\mathfrak{S}$ enthalten[3]. Ist dann $\bar{K}$ der $\mathfrak{S}$ zugeordnete Teilkörper von K^*/k, so gilt

$$\big(A : H(K^*, k)\big) = \big(A : H(\bar{K}, k)\big)(\bar{A} : \bar{H}),$$

wo $\bar{A}$ die Gesamtheit aller von Null verschiedenen Elemente aus $\bar{K}$ und $\bar{H}$ die Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus $\bar{K}$, deren Normen nach k in $H(K^*, k)$ hineinfallen, bezeichnet. Da $(\bar{K} : k) = n$ zu p prim ist und für ein Element a aus A stets $a^n = N_{\bar{K}k}(a)$ ist, so ist $\big(A : H(\bar{K}, k)\big)$ prim zu p. Nun existiert nach Hilfssatz 4 ein abelscher Klassenkörper $\bar{L}$ über k, dessen Normgruppe gleich $H(\bar{K}, k)$ ist. Bildet man dann das Kompositum $\bar{K}\bar{L}$ von $\bar{K}$ und $\bar{L}$, so ist $(\bar{K}\bar{L} : \bar{K})$ ein Teiler von $(\bar{L} : k)$, also prim zu p. Weil $\bar{L}$ im größten abelschen Teilkörper von

1) M. Moriya, loc. cit., S. 44, Satz 3.

2) M. Moriya, loc. cit., S. 44, Hilfssatz 3.

3) Vgl. etwa, A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. (1937), S. 65-66.

K^*/k enthalten ist, so muß $\bar{K}\bar{L}$ in K^* enthalten sein; dies ist aber nur dann möglich, wenn $\bar{K}\bar{L}=\bar{K}$, also $\bar{L}\leqq\bar{K}$ ist. Wie leicht bestätigt wird, ist dabei $\bar{L}$ der größte abelsche Teilkörper von $\bar{K}/k$.

Da der Normalisator von $\mathfrak{H}$ aus $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{H}$ verschieden und jede p-Gruppe auflösbar ist, so wird zwischen $\bar{K}$ und K eine Körperkette $\bar{K}=\bar{K}_0\subset\bar{K}_1\subset\cdots\subset\bar{K}_\nu=K$ eingeschaltet, wo für jedes i $(K_i:K_{i-1})=p$ ist.

Wir bezeichnen nun mit $\bar{L}_1$ den abelschen Klassenkörper zu $H(\bar{K}_1,k)$ über k. Ist zuerst $H(\bar{K}_1,k)=H(\bar{K},k)$, so folgt $H(\bar{L}_1,k)=H(\bar{L},k)$, weil $H(\bar{K}_1,k)=H(\bar{L}_1,k)\leqq H(\bar{L},k)=H(\bar{K},k)$ ist. Da $\bar{L}_1\geqq\bar{L}$ ist, so muß $\bar{L}_1=\bar{L}$ sein. Daß dabei $\bar{L}_1$ auch der größte abelsche Teilkörper von $\bar{K}_1/k$ ist, kann ohne Schwierigkeit bewiesen werden.

Es sei nun $H(\bar{K}_1,k)\neq H(\bar{K},k)$. Dann ist wegen $H(\bar{K}_1,k)\leqq H(\bar{K},k)$ stets $\big(A:H(\bar{K}_1,k)\big)>\big(A:H(\bar{K},k)\big)$. Bezeichnet man dann mit $\bar{A}$ die Gesamtheit aller von Null verschiedenen Elemente aus $\bar{K}$ und mit $\bar{H}$ die Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus $\bar{K}$, deren Normen nach k in $H(\bar{K}_1,k)$ hineinfallen, so folgt aus der Gleichung $\big(A:H(\bar{K}_1,k)\big)=\big(A:H(\bar{K},k)\big)(\bar{A}:\bar{H})$

$$(\bar{A}:\bar{H})=p\,,$$

weil $1<(\bar{A}:\bar{H})<\big(\bar{A}:H(\bar{K}_1,\bar{K})\big)=p$ ist; ferner ist wegen $H(\bar{K}_1,\bar{K})\leqq\bar{H}$

$$H(\bar{K}_1,\bar{K})=\bar{H}\,.$$

Da offenbar $(\bar{L}_1:k)=\big(A:H(\bar{L}_1,k)\big)=\big(A:H(\bar{K}_1,k)\big)=(\bar{L}:k)p$ ist, so ist $(\bar{L}_1\bar{K}:\bar{K})=p$.

Bezeichnet nun $\bar{H}_1$ die Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus $\bar{K}$, deren Normen nach k in $H(\bar{L}\bar{K}_1,k)$ hineinfallen, so folgt aus $\big(A:H(\bar{L}_1,k)\big)\leqq\big(A:H(\bar{K}\bar{L}_1,k)\big)=\big(A:H(\bar{K},k)\big)(\bar{A}:\bar{H}_1)$

$$(\bar{A}:\bar{H}_1)=p\,,$$

weil $\bar{H}_1\geqq H(\bar{K}\bar{L}_1,\bar{K})$ und $\big(\bar{A}:H(\bar{K}\bar{L}_1,\bar{K})\big)=p$ ist; hieraus folgt sofort $\bar{H}_1=H(\bar{K}\bar{L}_1,\bar{K})$. Da die beiden Normgruppen $\bar{H}_1$ und $\bar{H}$ unter $\bar{A}$ einen und denselben Index besitzt, und da aus $\bar{L}_1\leqq\bar{K}\bar{L}_1$ stets $\bar{H}_1\leqq\bar{H}$ folgt, so ist $\bar{H}_1=\bar{H}$, also ist

$$H(\bar{K}_1,\bar{K})=H(\bar{K}\bar{L}_1,\bar{K})\,.$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz[1] gilt stets: $\bar{K}_1=\bar{K}\bar{L}_1$; d. h. L_1 ist in $\bar{K}_1$ enthalten. Ferner ist leicht zu beweisen, daß jeder abelsche Teilkörper von $\bar{K}_1/k$ stets in $\bar{L}_1$ enthalten ist. Der Körper $\bar{L}_1$ ist also der größte abelsche Teilkörper von $\bar{K}_1$ über k. Durch vollständige Induktion beweist man ohne Schwierigkeit, daß der Satz stets gültig ist, wenn $(K^*:K)$ eine Primzahlpotenz ist.

2) Es sei $\mathfrak{G}$ die K zugeordnete Untergruppe aus der Galoisgruppe von K^*/k, und $p_1,\dots,p_r$ die sämtlichen verschiedenen Primteiler der

1) M. Moriya, loc. cit., S. 43-44, Satz 4.

Ordnung von $\mathfrak{G}$. Bezeichnet dann $\mathfrak{S}_i$ $(i=1, \ldots, r)$ eine zu p_i gehörige Sylowgruppe aus $\mathfrak{G}$ und K_i den $\mathfrak{S}_i$ zugeordneten Teilkörper von K^*/k, so ist nach 1)

$$H(L_i, k)=H(K_i, k)\,,$$

wo L_i den größten abelschen Teilkörper von K_i/k bezeichnet. Da offenbar $K=K_1 \cap \cdots \cap K_r$ ist, so ist $L=L_1 \cap \cdots \cap L_r$ in K enthalten, und die L zugeornete Normgruppe in k ist gleich $H(L_1, k) \cap \cdots \cap H(L_r, k)$[1]. Ist aber L' ein beliebiger abelscher Teilkörper von K/k, so ist L' in jedem L_i enthalten, also ist $H(L', k) \geqq H(L, k)$, woraus $L' \leqq L$ folgt, w. z. b. w.

Mit Hilfe von Satz 2 beweist man folgenden

Satz 3. *Ein Klassenkörper über k ist stets abelsch.*

Beweis. Ist K ein Klassenkörper über k, so ist $(K:k)=\big(A:H(K,k)\big)$. Nach Satz 2 existiert ein abelscher Klassenkörper L zu $H(K, k)$, welcher in K enthalten ist. Aus $(L:k)=\big(A:H(K,k)\big)=(K:k)$ folgt ohne weiteres

$$L=K\,.$$

Satz 4. Verschiebungssatz.

Es sei k' eine endliche separable Erweiterung über k, und L eine endliche separable abelsche Erweiterung über k. Dann ist $k'L$ der Klassenkörper über k', dessen Normgruppe aus allen denjenigen Elementen aus k' besteht, deren Normen nach k in $H(L, k)$ hineinfallen.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, wo K' über k primitiv ist[2]. Dann muß der größte abelsche Teilkörper L' von k'/k entweder mit k' oder k übereinstimmen; da $H(L', k)=H(k', k)$ ist, so ist $\big(A:H(k',k)\big)$ entweder gleich $(k':k)$ oder 1. Ist zunächst $(k':k)=\big(A:H(k',k)\big)$, so ist k' nach Satz 3 über k abelsch, also ist $k'L/k'$ ein Klassenkörper zu $H(k', k) \cap H(L, k)$. Nach Hilfssatz 1 ist der Satz sicher gültig. Ist aber $\big(A:H(k',k)\big)=1$, so ist

$$\big(A:H(k'L,k)\big)=\big(A:H(k',k)\big)(A':H')=(A':H')\,,$$

wo A' die Gesamtheit aller von Null verschiedenen Elemente aus k' und H' die Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus k', deren Normen nach k in $H(k'L, k)$ hineinfallen, bezeichnet. Da L offenbar der größte abelsche Teilkörper von $k'L/k$ ist, so ist nach Satz 2 $H(k'L, k)=H(L, k)$, also ist $(A':H')=\big(A:H(k'L,k)\big)=(L:k)=(k'L:k')$. Hieraus folgt ohne weiteres $H'=H(k'L, k')$, weil $H' \geqq H(k'L, k')$ und $\big(A':H(k'L,k')\big)=(k'L:k')$ ist. Wegen $H(k'L, k)=H(L, k)$ besteht H' aus allen denjenigen Elementen aus k', deren Normen nach k in $H(L, k)$ hineinfallen. Auf jeden Fall ist der Satz gültig, wenn k'/k primitiv ist.

---

1) M. Moriya, loc. cit., S. 44, Satz 5.

2) D. h. zwischen k und k' existiert kein echter Zwischenkörper.

Da der Satz für alle primitiven Körper über k bewiesen wird, so nehmen wir an, daß der Satz bereits für alle Körper bewiesen ist, deren Grade nach k kleiner sind als $(k':k)$. Nun können wir zwischen k und k' einen Zwischenkörper $\bar{k}$ derart einschalten, daß $\bar{k}/k$ primitiv ist und $1<(\bar{k}:k)$ ist. Dann ist $\bar{k}L$ nach dem oben Bewiesenen ein Klassenkörper über $\bar{k}$, dessen Normgruppe $H(\bar{k}L, \bar{k})$ mit der Gesamtheit aller derjenigen Elemente übereinstimmt, deren Normen nach k in $H(L, k)$ hineinfallen. Ferner ist nach Induktionsannahme $k'\bar{k}L=k'L$ ein Klassenkörper über k', dessen Normgruppe $H(k'L, k')$ aus allen denjenigen Elementen besteht, deren Normen nach $\bar{k}$ in $H(\bar{k}L, \bar{k})$ hineinfallen. Wie leicht bestätigt wird, stimmt aber $H(k'L, k')$ mit der Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus k' überein, deren Normen nach k in $H(L, k)$ hineinfallen, w. z. b. w.