46. Über die Umkehrbarkeit der Ideale im Integritätsbereiche.

Von Noboru NAKANO.
Mathematisches Institut, Hirosima Universität.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May, 12, 1943.)

In der vorliegenden Note wird gezeigt, dass ein beliebiges Ideal $(\neq (0))$ im Integritätsbereiche $\mathfrak{J}$ umkehrbar ist, wenn $\mathfrak{J}$ den folgenden Bedingungen[1] genügt:

(i) die Existenz mindestens eines Primidealteilers[2] von gegebenem Ideal[3]

(ii) die Umkehrbarkeit der Primideale.

Aus dem gewonnenen Ergebnis folgt ohne weiteres die bemerkenswerte Tatsache, dass die Umkehrbarkeit der Primideale den 0-Satz und den abgeschwächten U-Satz liefert.

In den folgenden Untersuchungen setzen wir keinen Kettensatz voraus, und um die dadurch entstandenen Schwierigkeiten zu überwinden, versuchen wir überzugehen vom gegebenen Ideal $\mathfrak{a}$ zu dem „halbprimen" Ideal $\mathfrak{h}$[4], das aus allen und nur den Elementen besteht, von denen eine Potenz in $\mathfrak{a}$ liegt.

Wie wir bei der Schlussbemerkung erwähnen, ist es nicht immer nötig, dass $\mathfrak{J}$ Integritätsbereich mit Einheit und ohne Nullteiler sei, sondern es genügt, dass $\mathfrak{J}$ nur ein kommutativer Ring mit Einheitselement ist.

Zunächst führen wir den Begriff der Umkehrbarkeit eines Ideals ein. Ist $\mathfrak{J}$ ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal von $\mathfrak{J}$, so bedeutet $\mathfrak{a}^{-1}$ das Ideal[5] aller der Körperelemente, deren Produkte mit sämtlichen Elementen von $\mathfrak{a}$ in ganze Elemente sich verwandeln; nämlich $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subseteqq \mathfrak{J}$. Wenn insbesondere $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{J}$, so heisst $\mathfrak{a}$ „*umkehrbar*".

Hilfssatz. Ist $\mathfrak{p}$ *ein Primidealteiler von* $\mathfrak{a}$, *so gibt es ein ganzes Ideal* $\mathfrak{b}$, *so dass* $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{b}$ *ist.*

Beweis. Aus $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1} \subseteqq \mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1} = \mathfrak{J}$; also ist $\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}$ ein ganzes

---

1) Wir können Bedingung (i) vernachlässigen, wenn wir beim Wohlordnungssatz Hilfe suchen. vgl. W. Krull: Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung. Math. Ann. Bd. **101** (1929), s. 732.

2) Im folgenden verstehen wir unter Primideal stets ein vom Einheits- und Nullideal verschiedenes Primideal.

3) In diesem Falle bedeutet ein gegebenes Ideal ein vom Einheitsideal verschiedenes Ideal aus $\mathfrak{J}$.

4) S. Mori: Über eindeutige Reduktion von Idealen in Ringen ohne Teilerkettensatz. Jour. Sci. Hiroshima Univ. **3** (1933), s. 275.

5) Nämlich das Krullsche „$\mathfrak{J}$-Ideal". vgl. W. Krull: Allgemeine Modul-, Ring- und Idealtheorie. Enz. Math. Wiss. Bd. 1 Heft **5** (1939).

Diejenigen Ideale, die echte Untermengen von $\mathfrak{J}$ sind, heissen ganz. Aber das $\mathfrak{J}$-Ideal muss nicht immer ganz sein. Im folgenden, unter Ideal verstehen wir stets ganzes Ideal, und in der Terminologie über $\mathfrak{a}^{-1}$ sollte man Modul statt Ideal schreiben.

Ideal. Setzen wir $\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{b}$, so wird wegen Umkehrbarkeit von $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}\mathfrak{b}$ folgen.

Satz 1. Jedes Primideal ist ein maximales Ideal.

Beweis. Existiert zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{J}$ ein echtes Zwischenideal $\mathfrak{a}$, so gibt es nach Voraussetzung (i) ein Primideal $\mathfrak{p}'$, derart dass $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}'$ ist: daher erhalten wir aus obigem Hilfssatz $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}'\mathfrak{q}$, wo $\mathfrak{q}\supset\mathfrak{p}$ ist. Denn, wäre $\mathfrak{q}\subseteqq\mathfrak{p}$, so folgte aus $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}'\mathfrak{q}$ ein Widerspruch: $\mathfrak{J}=\mathfrak{p}'\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{-1}\subseteqq\mathfrak{p}'$. Daher können wir zwei Elemente p', q finden, so dass $p'\in\mathfrak{p}'$, $p'\notin\mathfrak{p}$, $q\in\mathfrak{q}$, $q\notin\mathfrak{p}$, und wir erhalten $p'q\in\mathfrak{p}'\mathfrak{q}=\mathfrak{p}$, was der Primidealeigenschaft von $\mathfrak{p}$ widerspricht. Also muss $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal sein.

Satz 2. Primideal kann kein idempotentes Ideal sein.

Beweis. Es sei $\mathfrak{p}$ ein vom Einheitsideal verschiedenes Primideal aus $\mathfrak{J}$. Ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$, so wird $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{p}^2\mathfrak{p}^{-1}$, und daher folgt ein Widerspruch $\mathfrak{J}=\mathfrak{p}$.

Satz 3. Primideal $\mathfrak{p}$ besitzt eine endliche Basis[1].

Beweis. Es sei $p_1, p_2, \ldots, p_N, \ldots$ eine Basis für $\mathfrak{p}$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{J}$, und daher kann man endlich viele Elemente $p_1, p_2, \ldots, p_n$ aus $\mathfrak{p}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aus $\mathfrak{p}^{-1}$ so wählen, dass die Gleichung

$$p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n=1 \tag{1}$$

gilt. Setzt man dann $\mathfrak{p}'=(p_1 p_2, \ldots, p_n)$, so wird $\mathfrak{p}'\subseteqq\mathfrak{p}$; also folgt daraus unmittelbar $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}^{-1}\subseteqq\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{J}$, während nach (1) $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}^{-1}\ni 1$ ist. Daraus folgt $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{J}$, also $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}'=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Satz 4. Setzen wir $\mathfrak{p}\frown\mathfrak{p}^2\frown\cdots\frown\mathfrak{p}^N\frown\cdots=\mathfrak{N}$, so muss $\mathfrak{N}$ das Nullideal sein.

Beweis. Zunächst beweisen wir dass $\alpha\beta\notin\mathfrak{p}^{m+n}$ ist, wenn $\alpha\notin\mathfrak{p}^n$, $\beta\notin\mathfrak{p}^m$ ist. Zu diesem Zwecke nehmen wir $\alpha\beta\in\mathfrak{p}^{m+n}$ an. Aus $\alpha\notin\mathfrak{p}^n$, $\beta\notin\mathfrak{p}^m$ und Satz 2 folgt die Tatsache, dass α bzw. β ein genau durch $\mathfrak{p}^e$ $(0\leqq e<n)$ bzw. $\mathfrak{p}^f$ $(0\leqq f<m)$ teilbares Element ist. Nun ist nach Hilfssatz

$$(1) \qquad (\alpha)=\mathfrak{p}^e\mathfrak{q}_1, \quad (\beta)=\mathfrak{p}^f\mathfrak{q}_2, \quad 0\leqq e<n, \quad 0\leqq f<m,$$

wo $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ beide durch $\mathfrak{p}$ unteilbar sind. Da zufolge der Primidealeigenschaft von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ durch $\mathfrak{p}$ unteilbar ist, folgt $e+f\geqq m+n$ aus unserer Voraussetzung $\alpha\beta\in\mathfrak{p}^{m+n}$. Jedoch folgt aus (1) $e+f<m+n$, was ein Widerspruch ist. Damit ist $\alpha\beta\notin\mathfrak{p}^{m+n}$, wenn $\alpha\notin\mathfrak{p}^n$ $\beta\notin\mathfrak{p}^m$ ist.

Nun sei $\alpha\notin\mathfrak{N}$, $\beta\notin\mathfrak{N}$, so gilt $\alpha\notin\mathfrak{p}^n$, $\beta\notin\mathfrak{p}^m$ für passende g. r. Zahlen m, n. Dem obigen Ergebnisse zufolge haben wir $\alpha\beta\notin\mathfrak{p}^{m+n}$ also $\alpha\beta\notin\mathfrak{N}$. Damit soll $\mathfrak{N}$ ein Primideal sein. Aber offenbar ist $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{N}$, und folglich ist $\mathfrak{N}$ ein Primideal ohne Maximaleigenschaft. Damit muss $\mathfrak{N}$ das Nullideal sein.

Satz 5. Ein durch $\mathfrak{p}$ teilbares Ideal $\mathfrak{a}$ $\left(\neq(0)\right)$ ist genau durch eine endliche Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar.

Beweis. Es sei $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$, so folgt aus Hilfssatz $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}\mathfrak{a}_1$. Es sei $\mathfrak{a}_1\subset\mathfrak{p}$,

---

1) P. Lorenzen: Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie. Math. Zeit. Bd. **45** (1939), s. 540.

W. Krull: Ein Hauptsatz über umkehrbare Ideale. Math. Zeit. Bd. **31** (1930), s. 558.

so folgt auch $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}^2\mathfrak{a}_2$. Wenn $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{p}$ ist, so wiederholen wir dieses Verfahren. Wenn wir dieses Verfahren nach endlich häufiger Wiederholung nicht abbrechen, so wird

$$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{p} \frown \mathfrak{p}^2 \frown \cdots \frown \mathfrak{p}^N \frown \cdots .$$

Aus Satz 4 folgt $\mathfrak{a}=(0)$, was ein Widerspruch ist. Damit bricht das Verfahren nach endlich häufiger Wiederholung ab.

Ein Ideal $\mathfrak{h}$ heisst „*Halbprimideal*", wenn $\mathfrak{h}$ gleichzeitig mit a^r $(r \geqq 1)$ stets auch a enthält, d. h. wenn es im Restklassenring $\mathfrak{J}/\mathfrak{h}$ kein nilpotentes Element gibt. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, so ist das Ideal $\mathfrak{h}$ halbprim, welches aus allen und nur den Elementen besteht, von denen eine Potenz zu $\mathfrak{a}$ gehört. Dabei heisst $\mathfrak{h}$ das „*zugehörige Halbprimideal von* $\mathfrak{a}$"

Satz 6. Ist $\mathfrak{p}$ der Primidealteiler von $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{h}$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}$, so bestehen:

[1] *$\mathfrak{p}$ ist der Primidealteiler von $\mathfrak{h}$, und ferner ist $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}\mathfrak{h}'$.*

[2] *$\mathfrak{h}'$ ist durch $\mathfrak{p}$ unteilbar.*

[3] *$\mathfrak{h}'$ ist ein Halbprimideal.*

Beweis. [1] Es sei $\mathfrak{h} \not\leqq \mathfrak{p}$, so gibt es in $\mathfrak{h}$ ein Element a, das nicht in $\mathfrak{p}$ liegt. Aus der Primidealeigenschaft, folgt $a^r \notin \mathfrak{p}$ $(r \geqq 1)$. Jedoch ist $\mathfrak{h}$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}$, also folgt aus $a \in \mathfrak{h}$ $a^r \in \mathfrak{a}$ und daraus wegen $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ folgt $a^r \in \mathfrak{p}$, was ein Widerspruch ist. Damit muss $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{p}$ sein und nach Hilfssatz erhalten wir $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}\mathfrak{h}'$.

[2] Wäre $\mathfrak{h}' \leqq \mathfrak{p}$, so würde $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}\mathfrak{h}' \geqq \mathfrak{h}'^2$. Damit wäre Quadrat aller Elemente von $\mathfrak{h}'$ durch $\mathfrak{h}$ teilbar und folglich sollte $\mathfrak{h} \geqq \mathfrak{h}'$ nach der Eigenschaft des Halbprimideals $\mathfrak{h}$ sein und daher folgte $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'$ nach $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}\mathfrak{h}' \leqq \mathfrak{h}'$; also hätten wir $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}\mathfrak{h}=\mathfrak{p}^2\mathfrak{h}=\cdots \leqq \mathfrak{p} \frown \mathfrak{p}^2 \frown \mathfrak{p}^3 \ldots$, was Satz 4 widerspricht.

[3] Wir nehmen an, dass $\mathfrak{h}'$ kein Halbprimideal ist. Es gibt dann ein Element a, dass $a \notin \mathfrak{h}'$, $a^r \in \mathfrak{h}'$ $(r>1)$ ist. Wegen $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}\mathfrak{h}'$ ergibt sich $\mathfrak{p}a^r \leqq \mathfrak{h}$, also $(a\mathfrak{p})^r \subset a^r\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{h}$. Da $\mathfrak{h}$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}$ ist, so ergibt sich $a\mathfrak{p} \subset \mathfrak{h}$, also $a \in \mathfrak{h}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{h}'$, was ein Widerspruch ist.

Zusatz. Es sei $\mathfrak{J}/\mathfrak{h}=\bar{\mathfrak{J}}$, $\mathfrak{p}/\mathfrak{h}=\bar{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}=\bar{\mathfrak{h}}'$, so wird $\bar{\mathfrak{J}}=\bar{\mathfrak{p}}\dotplus\bar{\mathfrak{h}}'$, $\bar{\mathfrak{h}}'=\bar{\mathfrak{h}}'^2$.

Beweis. Da nach Satz 6 [2] $\mathfrak{h}' \not\leqq \mathfrak{p}$ ist, so ist $(\mathfrak{p}, \mathfrak{h}')=\mathfrak{J}$, und daher ist $\mathfrak{p} \frown \mathfrak{h}'=\mathfrak{p}\mathfrak{h}'=\mathfrak{h}$. Daraus folgt

$$\bar{\mathfrak{p}}\bar{\mathfrak{h}}'=\bar{\mathfrak{p}} \frown \bar{\mathfrak{h}}'=(0).$$

Ferner folgt aus $(\mathfrak{h}', \mathfrak{p})=\mathfrak{J}$ unmittelbar $\bar{\mathfrak{J}}=(\bar{\mathfrak{h}}', \bar{\mathfrak{p}})$. Daraus erhalten wir $\bar{\mathfrak{J}}=\bar{\mathfrak{p}}\dotplus\bar{\mathfrak{h}}'$ und daher folgt $\bar{\mathfrak{h}}'=\bar{\mathfrak{h}}'^2$ nach $\bar{\mathfrak{J}}=\bar{\mathfrak{J}}^2$.

Satz 7. Wenn das zugehörige Halbprimideal $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{a}$ einen anderen Primidealteiler $\mathfrak{p}_1$ ausser $\mathfrak{p}$ hat, so erhalten wir $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}\mathfrak{h}'=\mathfrak{p}_1\mathfrak{h}_1'$; dabei ist

[1] $\mathfrak{h}' \neq \mathfrak{h}_1'$,

[2] $\mathfrak{h}' \frown \mathfrak{h}_1'=\mathfrak{h}$.

Beweis. [1] Wenn $\mathfrak{h}'=\mathfrak{h}_1'$ ist, so wird

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{p}\mathfrak{h}'=\mathfrak{p}_1\mathfrak{h}' . \tag{1}$$

Wegen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_1$, gibt es ein Element a derart, dass es in $\mathfrak{p}_1$, aber nicht in $\mathfrak{p}$ liegt. Dann ist $(\mathfrak{p}, a)=\mathfrak{J}$, $(\mathfrak{p}\mathfrak{h}', a\mathfrak{h}')=\mathfrak{h}'$, daraus folgt

(2) $$(\mathfrak{h}, a\mathfrak{h}')=\mathfrak{h}'.$$

Ferner folgt aus $a \in \mathfrak{p}_1$ und (1) $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}_1\mathfrak{h}' \geqq (a)\mathfrak{h}'$, also folgt aus (2) $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'$. Nach (1) ergibt sich damit $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}\mathfrak{h}$, also

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{p}\mathfrak{h}=\mathfrak{p}^2\mathfrak{h}=\cdots \subseteqq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}^2 \cap \cdots$$

Danach erhalten wir aus Satz 4 $\mathfrak{h}=(0)$, was ein Widerspruch ist.

[2] Es ist ersichtlich $\mathfrak{h} \subseteqq \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{h}'_1$. Aus $\mathfrak{p}\mathfrak{h}'=\mathfrak{p}_1\mathfrak{h}'_1$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_1$ und der Primidealeigenschaft ergibt sich ohne weiteres $\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{h}'_1$, also $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}' \geqq \mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}'$. Wegen $\mathfrak{h}' \cap \mathfrak{p}=\mathfrak{p}\mathfrak{h}'=\mathfrak{h}$ ergibt sich sogleich $\mathfrak{h} \geqq \mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}'$ daher $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}'$.

Satz 8. Das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}$ *besitzt nur endlich viele voneinander verschiedene Primidealteiler.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}\mathfrak{h}'=\mathfrak{p}_1\mathfrak{h}'_1$. Nach dem Zusatze von Satz 6 erhalten wir $\mathfrak{J}=\bar{\mathfrak{p}}+\bar{\mathfrak{h}}'=\bar{\mathfrak{p}}_1+\bar{\mathfrak{h}}'_1$. Nach Satz 7 folgt $\bar{\mathfrak{h}}' \cap \bar{\mathfrak{h}}'_1=(0)$, also $\bar{\mathfrak{p}} \geqq \bar{\mathfrak{h}}'_1$. Wir nehmen nun von $\mathfrak{J}$ verschiedene Primidealteiler $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_i \ldots$ aus und setzen $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}_i\mathfrak{h}'_i$ im allgemeinen, dann ergibt sich

$$\bar{\mathfrak{p}} \geqq \bar{\mathfrak{h}}'_i, \quad \bar{\mathfrak{h}}'_i=\bar{\mathfrak{h}}'^2_i \quad (i=1, 2, \ldots),$$

wo $\bar{\mathfrak{h}}'_i \cap \bar{\mathfrak{h}}'_j=(0)$ $(i \neq j)$ ist. Wir setzen die Existenz von unendlich vielen durch $\bar{\mathfrak{p}}$ teilbaren $\bar{\mathfrak{h}}'_i$ voraus, und nehmen daraus abzählbar unendlich viele $\bar{\mathfrak{h}}'_1, \bar{\mathfrak{h}}'_2, \ldots, \bar{\mathfrak{h}}'_N, \ldots$, und setzen $\mathfrak{a}_0$ für die Gesamtheit des Restes. Wir setzen ferner $\mathfrak{a}_i=(\mathfrak{a}_0, \bar{\mathfrak{h}}'_1, \bar{\mathfrak{h}}'_2, \ldots, \bar{\mathfrak{h}}'_i)$, dann folgt ohne weiteres $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_{i+1}$. Weiter ist die Vereinigung von allen Idealen $\mathfrak{a}_i$ ersichtlich $\bar{\mathfrak{p}}$. So erhält man eine Teilerkette von abzählbar unendlich vielen Gliedern:

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_i \subset \cdots \subset \bar{\mathfrak{p}}.$$

Da nach Satz 3 $\mathfrak{p}$ aber eine endliche Basis hat, setzen wir $\mathfrak{p}=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Dann erhalten wir $\mathfrak{p}/\mathfrak{h}=\bar{\mathfrak{p}}=(\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n)$. Jedes $\bar{p}_i$ liegt in einem Ideal $\mathfrak{a}_{m_i}$. Ist m die grösste der Zahlen m_i, so liegen $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n$ sämtlich in $\mathfrak{a}_m$. Da alle Elemente von $\bar{\mathfrak{p}}$ linear von $\bar{p}_1 \cdots \bar{p}_n$ abhängen, so liegen alle Elemente von $\bar{\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{a}_m$, und daraus folgt

$$\bar{\mathfrak{p}}=\mathfrak{a}_m=\mathfrak{a}_{m+1}=\cdots$$

Daher bricht die Teilerkette $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_i \subset \cdots \subset \bar{\mathfrak{p}}$ nach endlich vielen Gliedern ab. Also die Anzahl von $\bar{\mathfrak{h}}'_1, \bar{\mathfrak{h}}'_2, \ldots, \bar{\mathfrak{h}}'_N, \ldots$ muss endlich sein. Daher muss es die Anzahl von Zugeordneten $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_N, \ldots$ ebenfalls sein, womit unser Satz bewiesen ist.

Satz 9. Ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{J}$ *besitzt nur endlich viele voneinander verschiedene Primidealteiler.*

Beweis. Der Definition zufolge ist für jedes $\mathfrak{a}$ das zu demselben gehörige Halbprimideal $\mathfrak{h}$ eindeutig bestimmt. Nach Satz 6 ist der Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ auch der Teiler von $\mathfrak{h}$. Umgekehrt der Primidealteiler von $\mathfrak{h}$ ist offenbar der Teiler von $\mathfrak{a}$. Daher ist die Gesamtzahl der Primteiler von $\mathfrak{a}$ und dieselbe von $\mathfrak{h}$ gleich, und ausserdem ist nach Satz 8 diese endlich. Also ist der Beweis des Satzes geliefert.

Nun sind wir in der Lage, das Ziel dieser Note zu beweisen:

Satz 10. Ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{J}$ *ist umkehrbar.*

Beweis. Wegen der ursprünglichen Voraussetzungen (i) (ii), Satz 5 und Satz 9 lässt ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ sich eindeutig in der Gestalt $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1^{r_1}\mathfrak{p}_2^{r_2}\ldots\mathfrak{p}_n^{r_n}$ darstellen. Zufolge $\mathfrak{a}(\mathfrak{p}_1^{-r_1}\ldots\mathfrak{p}_n^{-r_n})=(\mathfrak{p}_1^{r_1}\ldots\mathfrak{p}_n^{r_n})(\mathfrak{p}_1^{-r_1}\ldots\mathfrak{p}_n^{-r_n})=\mathfrak{J}$ und der Definition der Umkehrbarkeit ergibt sich

$$\mathfrak{a}^{-1}\geqq(\mathfrak{p}_1^{-r_1}\ldots\mathfrak{p}_n^{-r_n}),$$

also nach beiderseitiger Multiplikation mit $\mathfrak{a}$ die Darstellung: $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}\geqq\mathfrak{a}(\mathfrak{p}_1^{-r_1}\ldots\mathfrak{p}_n^{-r_n})=\mathfrak{J}$. Im allgemeinen ist aber $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}\leqq\mathfrak{J}$, daher ist $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{J}$.

Schlussbemerkung I.

Da ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}\big(\neq(0)\big)$ in $\mathfrak{J}$ nach Satz 10 umkehrbar ist, so besitzt $\mathfrak{a}$ ganz genau wie bei Satz 3 eine endliche Basis. Daher in $\mathfrak{J}$ gilt der Teilerkettensatz.

Ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{J}$ besitzt stets die eindeutige Darstellung (Primfaktorzerlegung) $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1^{r_1}\ldots\mathfrak{p}_n^{r_n}$. Es sei $\mathfrak{a}_i$ ein Teiler von $\mathfrak{a}$, dann erhalten wir $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{p}_1^{s_1}\ldots\mathfrak{p}_n^{s_n}$ mit $r_j\geqq s_j\geqq 0$ $(j=1,2,\ldots,n)$, wobei $\mathfrak{p}_i^0$ wie üblich gleich $\mathfrak{J}$ ist. Daher gilt in $\mathfrak{J}$ der Vielfachenkettensatz modulo jedem vom Nullideal verschiedenen Ideal.

Schlussbemerkung II.

Wir haben $\mathfrak{J}$ als einen Integritätsbereich ohne Nullteiler angenommen, und die ganze Theorie dieser Note entwickelt, jedoch spielt diese Voraussetzung keine wesentliche Rolle. Damit gilt die ganze Theorie dieser Note (von Satz 1 bis Satz 10) ohne wesentliche Modifikationen, wenn wir den Quotientenkörper durch den Quotientenring ersetzen, d. h. durch den Ring aller Brüche a/b, wo b kein Nullteiler ist. Nachdem wir in dieser Weise Satz 10 erhalten, folgt aus Satz 10 die bemerkenswerte Tatsache, dass $\mathfrak{J}$ *ohne Nullteiler ist.* Denn wir erzeugen ein Hauptideal (d) aus einen Element d in $\mathfrak{J}$. Da alle Ideale in $\mathfrak{J}$ umkehrbar sind, so ergibt sich $(d)(d)^{-1}=\mathfrak{J}$. Daher in $(d)^{-1}$ gibt es ein Element d' derart, dass $dd'=1$ ist. Es sei d ein Nullteiler in $\mathfrak{J}$, dann muss $rd=0$ für ein Element r $(\neq 0)$ in $\mathfrak{J}$ sein, also $rdd'=r=0$, was einen Widerspruch bedeutet. Danach ist d regulär und $\mathfrak{J}$ besitzt keinen Nullteiler.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen, erhalten wir folgendes.

Folgerungen: Es sei $\mathfrak{R}$ *ein Ring mit Einheit, und nimmt die Existenz mindestens eines Primidealteiler vom gegebenen Ideal und die Umkehrbarkeit der Primideale an. Dann ist ein beliebiges Ideal* $\big(\neq(0)\big)$ *in R umkehrbar, und in* $\mathfrak{R}$ *gilt sowohl der* 0*-Satz als auch der abgeschwächte U-Satz. Ausserdem besitzt R keinen Nullteiler.*

Meinem hochverehrten Lehrer Prof. S. Mori bin ich für seine vielfachen Anregungen zu dieser Arbeit und sein dauerndes Interesse an ihrem Fortgang zu grossem Dank verpflichtet.