PAPERS COMMUNICATED

44. *Sur la notion de la dimension.*

Par Motokiti KONDÔ.
L'institut mathématique, l'université impériale de Kyûsyû.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., May 12, 1943.)

1. D'après la définition de M. M. Fréchet[1], étant donné deux ensembles A et B de points, nous dirons que le type de dimension de A est supérieur ou au moins égal au type de dimension de B, s'il est possible d'établir une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points de B et ceux d'une partie de A. Or, sa idée sur la dimension est fondamentale et applicable sans le changement essentiel sur divers ensembles d'éléments. Voici un exemple.

2. Soit $\mathbb{L}$ un système demi-ordonné d'éléments pour lesquels la notion de la congruence est donnée, c'est-à-dire, entre éléments de $\mathbb{L}$ les relations désignées par $A \geqq B$ ou bien $B \leqq A$ et $A \cong B$ sont données et elles remplissent les postulats suivants.

LI. $\mathbb{L}$ est demi-ordonné par rapport à la relation $\geqq$, c'est-à-dire, (α) si l'on a $A \geqq B$ et $B \geqq A$ en même temps, on a $A = B$, (β) si l'on a $A \geqq B$ et $B \geqq C$, on a aussi $A \geqq C$.

LII. Il existe dans $\mathbb{L}$ l'élément I d'unité et celui O de nullité, c'est-à-dire, on a $I \geqq A \geqq 0$ pour tout élément A de $\mathbb{L}$.

CI. La relation $\cong$ est symétrique, réflexive et transitive, c'est-à-dire, (α) $A \cong A$, (β) $A \cong B$ entraine $B \cong A$, (γ) $A \cong B$ et $B \cong C$ entrainent $A \cong C$.

Nous dirons alors que le type de dimension de A est supérieur (inférieur) ou au moins égal au type de dimension de B, s'il existe un élément C tel qu'on ait $B \cong C$ et $A \geqq C$ ($A \cong C$ et $B \geqq C$). Et, nous représentons une telle circonstance par la notion $\dim(A) \geqq \dim(B)$ $\big(\dim(A) \leqq \dim(B)\big)$. Enfin, quand nous avons $\dim(A) \geqq \dim(B)$ et $\dim(B) \geqq \dim(A)$ en même temps, nous dirons que les types de dimension de A et B sont égaux et nous le désignons par $\dim(A) = \dim(B)$. Nous avons alors suivants.

1. Si l'on a $A \geqq B$, on a $\dim(A) \geqq \dim(B)$.
2. Si l'on a $A \cong B$, on a $\dim(A) = \dim(B)$.

Maintenant, nous ajoutons le postulat suivant

CII. Si l'on a $A \geqq C$ et $A \cong B$, il y a un élément D tel qu'on ait $C \cong D$ et $B \geqq D$[2],

pour obtenir la résultat suivante

3. Si l'on a $\dim(A) \geqq \dim(B)$ et $\dim(B) \geqq \dim(C)$, on a $\dim(A) \geqq \dim(C)$.

3. Or, comme on sait, il a beaucoup des définitions de la dimen-

1) M. Fréchet, Les espaces abstraits, (1928), Paris. p. 30.
2) Quand $\mathbb{L}$ est complémentaire, CII est deduit du postulat CIII donné plus loin.

sion. Surtout, celles au sens de M. M. Fréchet, de M. F. Hausdorff[1], de P. Urysohn et M. K. Menger[2], de M. P. Alexandroff[3], de M. G. Birkhoff[4], de MM. J. v. Neumann et F. J. Murray[5], de M. J. v. Neumann[6], etc. sont très importantes Ces définitions sont posées suivant les demandes des théorie pour lesquelles elles sont nécessaires et donc il nous parait qu il n'y a aucune ordre entre elles. Or, nous pouvons unifier celles-ci au point de vue de l'idée de M. M. Fréchet et donner la dimension numérique sur celles-ci suivant de l'idée de M. A. Tarski[7]. De plus, comme MM. J. v. Neumann et F. J. Murray ont fait dans le théorie des anneaux d'opérateurs, nous pouvons les classifier en trois types, c'est-à-dire, celui de fini, de infini et de purement infini. C'est ce qui j'écrirai dans cette note.

4. Pour cela, nous introduissons d'abord la notion de l'orthogonalité dans $\mathbb{L}$ et posons quelques postulats sur celle-ci. Quand deux éléments A et B de $\mathbb{L}$ sont orthogonaux, nous désignons ce fait par $A \perp B$. Nous avons alors

OI. Si l'on a $A \perp B$, on a aussi $B \perp A$,

OII. Si l'on a $A \perp B$, $A \geqq C$ et $B \geqq D$, on a aussi $C \perp D$,

OIII. Lorsqu'il existe $A \cup B$ et qu'on a $A \perp B$ et $(A \cup B) \perp C$, il existe $A \cup C$ et $B \cup C$, et on a $(A \cup C) \perp B$ et $(B \cup C) \perp A$[8],

CIII. Lorsqu'il existe $A_1 \cup A_2$ et $B_1 \cup B_2$ et qu'on a $A_k \cong B_k$ $(k=1, 2)$, $A_1 \perp A_2$ et $B_1 \perp B_2$, on a $(A_1 \cup A_2) \cong (B_1 \cup B_2)$,

CIV. Si l'on a $A \cong B$, $A = A_1 \cup A_2$ et $A_1 \perp A_2$, il existe deux éléments B_1 et B_2 tels qu'on ait $B = B_1 \cup B_2$, $A_k \cong B_k$ $(k=1, 2)$ et $B_1 \perp B_2$.

5. Quand nous désignons par $\mathbb{D}$ le domaine du type de dimension d'éléments de $\mathbb{L}$, c'est-à-dire, l'ensemble de tous les types de dimension d'éléments de $\mathbb{L}$, il y a la relation de demi-ordre entre les éléments de $\mathbb{L}$, comme nous avons vu dans le précédent. Or, nous pouvons introduire la notion de l'addition entre ceux-ci, c'est-à-dire, pour a et b de $\mathbb{D}$, quand il existe A et B de $\mathbb{L}$ tels qu'il existe $A \cup B$ et qu'on ait $\dim(A) = a$, $\dim(B) = b$ et $A \perp B$, nous entendrons par la somme de a et b le type de dimension de $A \cup B$, et nous la désignons par $a+b$. Nous avons alors suivants.

1. S'il existe $a+b$, elle est déterminée uniquement pour a et b.

En effet, lorsqu'on a $\dim(A') = a$, $\dim(B') = b$ et $A' \perp B'$, et qu'il existe $A' \cup B'$, on a d'après CIII $A \cup B \cong A' \cup B'$, ce qui entraine l'unicité de $a+b$.

2. S'il existe $a+b$, il existe aussi $b+a$ et $a+b = b+a$.

---

1) F. Hausdorff, Dimension und ausseres Mass. Math. Ann., **79** (1918).

2) K. Menger, Dimensionstheorie, (1928), Berlin.

3) P. Alexandroff, Dimensionstheorie. Math. Ann., **106** (1932).

4) G. Birkhoff, Lattice theory, (1940), p. 11.

5) J. v. Neumann et F. J. Murray, On rings of operators. Ann. Math., **37** (1936).

6) J. v. Neumann, Lectures on continuous geometries, (1936–7), Princeton. p. 64.

7) A. Tarski, Algebraische Fassung des Massproblems. Fund. Math., **31** (1938).

8) C'est une formulation algébrique du théorème de trois perpendicules dans la géométrie.

3. S'il existe $(a+b)+c$, il existe aussi $a+(b+c)$ et on a $(a+b)+c = a+(b+c)$.

Démonstration. D'après la supposition, il existe P et Q de $\mathbb{L}$ tels qu'on ait $P \perp Q$, $\dim(P)=a+b$ et $\dim(Q)=c$. De même, il existe A et B de $\mathbb{L}$ tel qu'on ait $A \perp B$, $\dim(A)=a$ et $\dim(B)=b$. Nous avons alors $P \cong A \cup B$ et donc il existe d'après CIV A' et B' de $\mathbb{L}$ tels qu'on ait $P=A' \cup B'$, $A' \cong A$, $B' \cong B$ et $A' \perp B'$. Or, on a $(A' \cup B') \perp Q$ et par suite d'après OII $B' \perp Q$, ce qui donne $(B' \cup Q) \perp A'$ d'après OIII. Donc, il existe $b+c$ et $a+(b+c)$, d'où, d'après $(A' \cup B') \cup Q = A' \cup (B' \cup Q)$, nous avons $(a+b)+c=a+(b+c)$.

4. Quand on désigne par o le type de dimension de o, on a pour tout a de $\mathbb{D}$ $a=o+a=a+o$.

6. Cependant comme on voit, il n'existe pas toujours la somme de deux éléments de $\mathbb{D}$, et et donc, pour eviter cet inconvenient, nous prolongeons $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}^*$ comme il suit. Etant donnée une suite finie $a^*=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ d'éléments de $\mathbb{D}$, nous construirons l'ensemble $[a^*]$ suivant les conditions

I. $a^* \in [a^*]$,

II. si l'on a $b^*=(b_1, b_2, \dots, b_m) \in [a^*]$, $c_k \leqq b_k \cdot (k=1, 2, \dots, m)$, on a aussi $(c_1, c_2, \dots, c_m) \in [a^*]$,

III. si l'on a $b^*=(b_1, b_2, \dots, b_m) \in [a^*]$ et $b_m = b'+b''$, on a aussi $(b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b', b'') \in [a^*]$,

IV. s'il existe $b_{m-1}+b_m$ et $b^*=(b_1, b_2, \dots, b_m) \in [a^*]$, on a aussi $(b_1, b_2, \dots, b_{m-2}, b_{m-1}+b_m) \in [a^*]$,

V. quand on a $b^*=(b_1, b_2, \dots, b_m) \in [a^*]$, toute suite obtenue en permutant d'éléments de b^* appartient aussi à $[a^*]$,

VI. $[a^*]$ est la partie commune de tous les ensembles ayant les propriétés I–V.

et nous désignons par $\mathbb{D}^*$ la famille de tous les ensembles $[a^*]$.

7. Maintenant, nous introduissons dans $\mathbb{D}^*$ les notions de la demi-ordre et de l'addition. Quand nous avons $[a^*] \supseteqq [b^*]$ pour deux éléments $[a^*]$ et $[b^*]$ de $\mathbb{D}^*$ nous désignons ce fait par $[a^*] \geqq [b^*]$ ou bien $[b^*] \leqq [a^*]$. Nous avons alors suivants.

1. Si l'on a $[a^*] \geqq [b^*]$ et $[b^*] \geqq [a^*]$ en même temps, on a aussi $[a^*]=[b^*]$.

2. Si l'on a $[a^*] \geqq [b^*]$ et $[b^*] \geqq [c^*]$, on a $[a^*] \geqq [c^*]$.

Puis, pour deux éléments $[a^*]$ et $[b^*]$, où $a^*=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $b^*=(b_1, b_n, \dots, b_m)$, nous entendrons la somme de ceux l'élément $[c^*]$, où $c^*=(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m)$, et nous la désignons par $[a^*]+[b^*]$. Nous voyons alors les suivants.

1. Pour deux éléments $[a^*]$ et $[b^*]$ de $\mathbb{D}^*$, il existe toujours $[a^*]+[b^*]$

2. Pour $[a^*]$, $[b^*]$ et $[c^*]$ de $\mathbb{D}^*$, on a $([a^*]+[b^*])+[c^*]=[a^*]+([b^*]+[c^*])$.

En effet, quand on a $a^*=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b^*=(b_1, b_2, \dots, b_m)$ et $c^*=(c_1, c_2, \dots, c_l)$, on a

$$
\begin{aligned}
([a^*]+[b^*])+[c^*] &= [(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m)]+[c^*] \\
&= [(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m, c_1, c_2, \dots, c_l)] \\
&= [a^*]+[(b_1, b_2, \dots, b_m, c_1, c_2, \dots, c_l)=[a^*]+([b^*]+[c^*]).
\end{aligned}
$$

3. Quand on désigne par o l'element $[(o)]$, on a $[a^*]=o+[a^*]=[a^*]+o$.
4. Quand on désigne par $n[a^*]$ la somme $[a^*]+[a^*]+\cdots+[a^*]$ (n-fois), on a $(n+m)[a^*]=n[a^*]+m[a^*]$ et $n(m[a^*])=(nm)[a^*]$.

8. Or, voir la relation entre les éléments de D et ceux de D*, nous définissons d'abord l'équivalence d'éléments de D. Quand nous avons pour a et b de D $a\geqq b$ et $b\geqq a$ en même temps, nous dirons que a et b sont équivalents et nous désignons ce fait par $a\sim b$[1]. Cette relation est symétrique, reflexive et transitive et donc les éléments de D sont partagés en classes de l'équivalence. Maintenant, quand nous désignons par $[a]$ l'élément $[(a)]$, nous avons

1. pour qu'on ait $[a]\geqq[b]$, il faut et il suffit qu'on ait $a\geqq b$,
2. pour qu'on ait $[a]=[b]$, il faut et il suffit que a et b soient équivalents,
3. $[a+b]=[a]+[b]$.

Par conséquent, quand nous faissons correspondre chaque élément a de D au élément $[a]$ de D*, les éléments de D sont représentés homomorphiquement par ceux de D*.

9. Puis, nous introduissons suivant M. A. Tarski[2] la notion de la normalité d'éléments de D*, c'est-à-dire, quand il n'existe aucun nombre naturel n tel qu'on ait $(n+1)[a^*]\leqq n[a^*]$, nous dirons que $[a^*]$ est normal. De même, quand pour un élément A de L, $[\dim(A)]$ est normal, nous dirons aussi que A est normal.

Or, nous pouvons classifier L au point de vue de cette notion comme il suit.

I. L'élément d'unité de L est normal. Dans ce cas, nous dirons que L est du type fini.

II. L'élément de unité 1 de L n'est pas normal, mais il y a au moins un élément normal dans L. Dans ce cas, nous dirons que L est du type infini.

III. Tous les éléments de L ne sont pas normaux. Dans ce cas, nous dirons que L est du type purement infini.

Cette classification: les types de fini, infini et purement infini corresponds au ceux de MM. J. v. Neumann et F. J. Murray[3].

10. Nous considérons d'abord le cas où L est du type fini. Nous rangeons tous les éléments de D* en une suite bien ordonnée:

$$a_0, a_1, \dots, a_\alpha, \dots \qquad (\alpha<\eta)$$

où $a_0=[\dim(I)]$. Puis, nous désignons par D^*_ξ l'ensemble de o et de toutes les sommes finies d'éléments de a_α $(\alpha<\xi)$, c'est-à-dire,

1) En général, $a\sim b$ n'entraine pas $a=b$, mais il y a les cas où $a\sim b$ et $a+b$ sont équivalents. Nous verrions tels exemples dans **14**, **17** et **18**.

2) A. Tarski, loc. cit.

3) J. v. Neumann et F. J. Murray, loc. cit. p. 172.

$$a_{\alpha_1}+a_{\alpha_2}+\cdots+a_{\alpha_n}, \quad \alpha_k<\xi \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Nous avons alors

1. $\mathbb{D}^*_\xi$ est monotone croissante,
2. $\mathbb{D}^*_\eta=D^*$.

Maintenant, nous définissons une fonction $\mu(x)$ pour les éléments de $\mathbb{D}^*$ par l'induction transfinie.

D'abord, nous posons pour les éléments na_0 $(n=0,1,2,\ldots)$ de $\mathbb{D}^*_1$

$$\mu(na_0)=n.$$

Nous avons alors pour les éléments de $\mathbb{D}^*_1$.

(α) $0\leqq\mu(x)$, $\mu(0)=0$ et $\mu(a_0)=1$.

(β) $x\leqq y$ entraine $\mu(x)\leqq\mu(y)$.

(γ) $\mu(x+y)=\mu(x)+\mu(y)$.

Puis, en supposant que $\mu(x)$ est définie déjà pour éléments de $\mathbb{D}^*_{\xi'}$ $(\xi'<\xi)$, nous considérons les éléments de $\mathbb{D}^*_\xi$. Quand ξ est un nombre limit, nous avons

$$\mathbb{D}^*_\xi=\sum_{\xi'<\xi}\mathbb{D}^*_{\xi'},$$

et donc $\mu(x)$ est définie pour les éléments de $\mathbb{D}^*_\xi$.

Quand nous avons $\xi=\xi'+1$, tout élément x de $\mathbb{D}^*_\xi$ est de form

$$x=b+na_{\xi'} \qquad b\in\mathbb{D}^*_{\xi'}.$$

Maintenant, en prenant deux éléments c et d de $\mathbb{D}^*_\xi$ tel qu'on ait

$$d\leqq mx+c$$

pour quelque nombre naturel m, nous construirons

$$\mu(c,d;m)=\frac{1}{m}\{\mu(d)-\mu(c)\}.$$

Alors, nous entendrons par $\mu(x)$ la borne supérieure de ces nombres quand c, d et m varient. Quand, pour un nombre positif ε, nous choisissons c, d et m de manièrè que $|\mu(x)-\mu(c,d;m)|<\varepsilon$, nous avons d'après $x=b+na_{\xi'}$

$$\mu(na_{\xi'})\geqq\frac{1}{m}\{\mu(d)-\mu(c)-m\mu(b)\}$$

et donc $\mu(na_{\xi'})\geqq-\varepsilon+\mu(x)-\mu(b)$, ce qui entraine $\mu(na_{\xi'})+\mu(b)\geqq\mu(x)$. En autre part, quand, pour un nombre positif ε, nous prenons c, d et m de maniere que

$$a\leqq mna_{\xi'}+c \quad \text{et} \quad |\mu(na_{\xi'})-\mu(c,d;m)|<\varepsilon,$$

nous avons

$$d+mb\leqq mx+c$$

et donc

$$\mu(x)\geqq\frac{1}{m}\{\mu(d)+m\mu(b)-\mu(c)\}$$

$$\geqq-\varepsilon+\mu(na_{\xi'})+\mu(b),$$

d'où $\mu(x) \geqq \mu(na_{\xi'})+\mu(b)$. Par suite, nous avons d'après la précédente

$$\mu(x)=\mu(na_{\xi'})+\mu(b)\,.$$

Puis, quand, pour un nombre positif ε, nous choisissons c, d et m de manièrè que

$$d \leqq ma_{\xi'}+c \quad \text{et} \quad |\mu(a_{\xi_1})-\mu(c, d; m)|<\varepsilon\,,$$

nous avons

$$\mu(na_{\xi'}) \geqq \frac{1}{m}\{n\mu(d)-n\mu(c)\} \geqq n\bigl(-\varepsilon+\mu(a_{\xi'})\bigr)\,,$$

d'où $\mu(na_{\xi'}) \geqq n\mu(a_{\xi'})$. De même, quand nous avons pour un nombre positif ε

$$d \leqq mna_{\xi'}+c \quad \text{et} \quad |\mu(na_{\xi'})-\mu(c, d; m)|<\varepsilon\,,$$

nous avons aussi

$$\mu(a_{\xi'}) \geqq \frac{1}{mn}\{\mu(d)-\mu(c)\} \geqq \frac{1}{n}\{-\varepsilon+\mu(na_{\xi'})\}$$

et donc $n\mu(a_{\xi'}) \geqq \mu(na_{\xi_1})$. Par conséquent, nous avons $\mu(na_{\xi'})=n\mu(a_{\xi'})$, ce qui donne

$$\mu(x)=\mu(b)+n\mu(a_{\xi'})\,.$$

D'après cette résultat, nous pouvons voir sans peine que $\mu(x)$ remplit les conditions (α)-(γ) pour les éléments de D^*_ξ et donc, il existe une fonction $\mu(x)$ qui remplit les même conditions pour les éléments de D^*. Maintenant, nous posons pour un élément A de L

$$\delta(A)=\mu(a)\,; \quad \text{où} \quad a=\dim(A)\,.$$

Alors, nous pouvons voir que

(a) $0 \leqq \delta(A) \leqq 1$, $\delta(0)=0$ et $\delta(I)=1$,

(b) $A \leqq B$ entraine $\delta(A) \leqq \delta(B)$,

(c) $A \simeq B$ entraine $\delta(A)=\delta(B)$,

(d) lorsqu'il existe $A \cup B$ et qu'on a $A \perp B$, on a

$$\delta(A \cup B)=\delta(A)+\delta(B)\,,$$

et donc, $\delta(A)$ est une dimension numérique d'éléments de L.

11. Puis, nous supposons que L est du type infini. Alors, de même que le cas précédent, il existe une fonction $\mu(x)$ pour les éléments de L qui remplit les conditions (β), (γ) et

(α') $0 \leqq \mu(x) \leqq \infty$, $\mu(o)=0$ et $\mu(a_0)=\infty$,

(δ) Lorsque nous avons $\mu(a)=\infty$, nous pouvons choisir pour un nombre positif M deux éléments b, c et un nombre naturel n tels qu'on ait

$$na+b \geqq c\,, \quad \mu(b), \mu(c)<\infty \quad \text{et} \quad \mu(c, b, n) \geqq M\,.$$

Donc, quand nous posons $\delta(A)=\mu(a)$ où $a=[\dim(A)]$, remplit les conditions (b)–(d) et

(a′) $0 \leqq \delta(A) \leqq \infty$, $\delta(0)=0$ et $\delta(I)=\infty$,
d'où $\delta(A)$ est une dimension numérique d'éléments de $\mathbb{L}$[1].

12. Enfin, nous considérons le cas où $\mathbb{L}$ est du type purement infini. Dans cas, pour chaque élément a de $\mathbb{D}^*$, il existe un nombre naturel n tel qu'on ait $(n+1)a \leqq na$. Donc, $\mu(x)$ qui remplit les conditions (α'), (β) et (γ), et de même $\delta(A)$ qui remplit les conditions (a′), (b)–(d) ne peut prendre que 0 et ∞ sa value, d'où dans ce cas il n'y a aucune dimension numérique au sens propre. Un systeme $\mathbb{L}$ demi-ordonné du type purement infini ne jouit pas les propriétés telles que ceux de type fini ou infini jouissent. Or, les dimensions au sens de M. F. Hausdorff, de P. Urysohn et M. K. Menger, etc. appartiennent au ce cas comme nous verrions plus loin et nous pouvons trouver diverses propriétés intéressantes ne appartenant qu'a ceux du type purement infini. Par exemple, comme une généralisation du théorème de l'additivité sur la dimension au sens de P. Urysohn et M. K. Menger, nous avons le suivant, c'est-à-dire, lorsqu'il existe $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ et que nous avons $\dim(A_k)=a$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, $2a=a$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants les uns les autres[3], nous avons

$$\dim(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=a.$$

13. Dans les précédents, nous avons voir qu'il existe une dimension numérique pour un système $\mathbb{L}$ demi-ordonné du type fini ou infini, mais elle n'est pas en général déterminée uniquement. En effet, nous verrions tels exemples dans **16, 17,** et **18.** Nous avons ici le problème de la détermination de la forme générale des dimensions numériques et celui de l'unicité de la dimension numérique, mais nous les discuterons dans autres occasions[2].

14. Voici quelques exemples des systèmes demi-ordonnées qui remplissent les postulats LI–II, OI–III et CI–IV.

Etant donné un ensemble M d'éléments quelconques, nous désignons par $\mathbb{L}$ le système de tous les sous-ensembles de M. Pour deux éléments A et B de M, si nous avons $A \supseteqq B$, nous dirons que $A \geqq B$. Puis, lorsque nous avons $A \cap B=0$, nous posons $A \perp B$, et lorsqu'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de A et ceux de B, nous posons $A \cong B$. $\mathbb{L}$ remplit alors nos postulats et le type de dimension d'un élément A de $\mathbb{L}$ est le nombre cardinal de A. Donc, $\mathbb{L}$ est du type fini ou bien infini suivant M est de fini ou non. De plus, si M est de infini et si nous prenons $\geqq$, $\perp$ et $\cong$ comme le précédent, le système de tous les sous-ensembles infinis de M et de l'ensemble vide est du type purement infini.

15. Etant donné un espace topologique R, nous désignons par $\mathbb{L}$

---

1) Dans le cas du type infini, nous avons toujours $\delta(I)=\infty$ et donc la dimension numérique au cas du type infini est distinguée necéssairement de celle au cas du type fini.

2) Voir mes notes: "Sur la réducibilité d'une algébre," et "Sur la dimension numérique et son unicité" qui paraitront dans ce journal.

3) Quand nous avons $(A_{n_1} \cup A_{n_2} \cup \cdots \cup A_{n_p}) \perp (A_{m_1} \cup A_{m_2} \cup \cdots \cup A_{m_q})$ pour deux ensembles disjoints $(n_1, n_2, \ldots, n_p)$ et $(m_1, m_2, \ldots, m_q)$ tels qu'on ait $n_k, m_k \leqq n$, nous dirons que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants les uns les autres.

le système de tous les sous-ensembles de R. Pour deux éléments A et B de $\mathbf{L}$, si nous avons $A \geqq B$, nous dirons que $A \geq B$, et puis lorsqu'il existe deux ensembles ouverts U et V tels qu'on ait $U \geqq A$, $V \geqq B$ et $UV=0$, nous dirons que $A \perp B$. Enfin, si A et B sont homéomorphiques, nous posons $A \cong B$.

$\mathbf{L}$ est alors remplit nos postulats et il est du type fini ou bien infini. Le type de dimension d'éléments de $\mathbf{L}$ est celui au sens de M. M. Fréchet.

En particulier, quand R est la somme d'ensembles disjoints R_k $(k=1, 2, \dots)$, où R_k est une courbe simplement fermé, $\delta(A)$ est le nombre de courbes simplement fermés contenues dans A.

16. Soient G un groupe topologique et $\mathbb{L}$ est le système de tous les sous-ensembles mesurables (B). Nous entendrons $\geq$ et $\perp$ comme le cas de **14.** Quand, pour deux éléments A et B de $\mathbb{L}$, ils sont congruence (en gauche) en décomposition finie[1], c'est-à-dire, il existe les éléments A_k, B_k $(k=1, 2, \dots n)$ et les éléments a_k $(k=1, 2, \dots, n)$ de G tels qu'on ait $A=\sum_{k=0}^{n} A_k$, $B=\sum_{k=0}^{n} B_k$, $A_i \frown A_j = B_i \frown B_j = 0$ pour $i \neq j$ et $B_k = a_k A_k$, nous dirons que $A \cong B$, Alors, $\mathbb{L}$ est remplit nos postulats et quand il existe une mesure invariante en gauche, $\mathbb{L}$ est du type fini ou bien infini.

En général, étant donné un espace topologique R et un groupe G de transformations topologiques de R, nous pouvons donner un système demi-ordonné de même que le cas de groupe topologique. Dans ce cas, la dimension numérique n'est pas en général déterminée uniquement, si elle existe.

17. Etant donné un anneau $\mathscr{M}$ des opérateurs au sens de MM. J. v. Neumann et F. J. Murray, nous considérons le système $\mathbb{L}$ de tous les sous-espaces $\mathfrak{M}$ linéaires et fermés de l'espace hilbertien $\mathfrak{H}$ tels qu'on ait $\mathfrak{M} \eta \mathscr{M}$[2]. Pour deux éléments $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de $\mathbb{L}$, quand nous avons $\mathfrak{M} \geqq \mathfrak{N}$, mous posons $\mathfrak{M} \geq \mathfrak{N}$, et quand $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont orthogonaux, nous posons $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$. Puis, quand il existe une transformation partiellement isométrique P de $\mathscr{M}$ telle qu'on ait $\mathfrak{M} = P\mathfrak{N}$, nous dirons que $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$. Alors, $\mathbb{L}$ remplit nos postulats et il est des types de fini, infini et purement infini. De plus, la dimension numérique d'éléments de $\mathbb{L}$ n'est pas en général déterminée uniquement.

18. Soit $\mathbb{L}$ un géométrie continue de M. J. v. Neumann. Pour deux éléments A et B de $\mathbb{L}$, si l'on a $A \geqq B$, on dit que $A \geq B$, et si l'on a $A \frown B = 0$, on dit que $A \perp B$. Puis, la relation $A \cong B$ est définié par la perspectivité entre A et B. Alors, $\mathbb{L}$ remplit nos postulats et il est du type fini.

19. Etant donné un espace topologique R, nous considérons le système $\mathbb{L}$ de tous les sous-ensembles de R. Pour deux éléments A et B de $\mathbb{L}$, si nous avons $A \geqq B$, nous posons $A \geq B$, et quand ils sont séparable (F_σ), c'est-à-dire, il existe deux ensembles F_σ: U et V

---

1) S. Banach et A. Tarski, Sur la décomposition des ensembles en parties respectivement congruentes. Fund. Math., t. **11** (1924).

2) J. v. Neumann et. F. J. Murray, loc. cit. p. 141.

tels qu'on ait $U \geqq A$, $V \geqq B$ et $U \frown V = 0$, nous dirons que $A \perp B$. Puis, quand ils sont de même dimensionelles au sens de P. Urysohn et M. K. Menger, nous posons $A \cong B$. Alors, $\mathbb{L}$ remplit nos postulats et il est du type purement infini. De plus, Le type de dimension d'éléments de $\mathbb{L}$ est celle au sens de P. Urysohn et M. K. Menger.

20. Etant donné un espace métrique R, nous prenons le système $\mathbb{L}$ de tous les sous-ensembles de R. Pour deux éléments A et B de $\mathbb{L}$, si l'on a $A \geqq B$, on dit que $A \geqq B$, et s'ils sont séparable (B), on dit que $A \perp B$. Enfin, quand A et B sont de même dimensionelles au sens de M. F. Hausdorff[1], on dit que $A \cong B$. Alors, $\mathbb{L}$ est remplit nos postulats et, il est du type purement infini. Le type de dimension d'éléments de $\mathbb{L}$ est celle au sens de M. F. Hausdorff.

21. Le système $\mathbb{L}$ consist de tous les sous-ensembles linéaires et mesurable (B) de la classe α au sens de M. N. Lusin. Dans $\mathbb{L}$, nous entendrons $\geqq$ et $\perp$ comme le cas de **14**, et quand A et B de $\mathbb{L}$ sont congruences en décomposition infinie, c'est-à-dire, quand il existe parmi $\mathbb{L}$ les éléments A_k, B_k $(k=1, 2, \ldots)$ tels qu'on ait $A_i \frown A_j = B_i \frown B_j = 0$ pour $i \neq j$, $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ et $B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k$, et que A_k et B_k soient homéomorphiques, nous dirons que $A \cong B$. Alors, $\mathbb{L}$ est remplit nos postulats et il est du type infini. De plus, $\delta(A)$ est ∞ quand A est d'infini, et n quand A consist précisément n points[2].

---

1) F. Hausdorff, loc. cit.

2) M. Kondô, Sur la structure des ensembles, ce journal, t. **18** (1942).